目　录

第一篇　平面积分几何

第二篇　一般积分几何

第三篇 E_n 里的积分几何

第四篇 常曲率空间积分几何

第 一 篇

平 面 积 分 几 何

第一章 平面里的凸集

1. 引言

在积分几何里，凸集起重要作用. 因此，我们在这里综述它们的主要性质，特别是在下面各节中需用的那些性质. 在本章里，我们讨论平面里的凸集. 关于 n 维欧氏空间里的凸集，可看第十三章，至于较详尽的论述，可参考 Blaschke[50]和 Bonnesen 与 Fenchel[63]的经典著作，或较现代的作品：Benson[27]，Eggleston[162]，Grünbaum[247]，Jaglom 与 Boltjanski[320]，Hadwiger[270]，Hadwiger 与其合作者[282]，Valentine[683]。

已给平面里的一个点集 K，若对于每一对点 $A\in K$，$B\in K$，总有 $AB\subset K$，其中 AB 是联结 A 和 B 的线段，则 K 叫做**凸集**. 为方便起见，我们将始终假定凸集是有界闭集。

若一条具有端点 P,Q 的曲线，连同线段 PQ，包围一个凸集，则这曲线叫做**凸(曲)线**. 若一个凸集有界而且有内点，则 K 的边界叫做**闭凸(曲)线**. 集 K 的边界将总用 ∂K 表示. 若 K 的一切点属于 ∂K，则 K 是一个线段。

可以证明：(a) 一切凸线都是分段可微导的(即它们是可数多个弧的并集，而且每个弧都有连续地转动的切线)；换句话说，凸线至多有可数集的隅角；(b) 一切有界凸线是有长的. 一个凸集 K 的边界的长叫做 K 的**周长**。

2. 直线族的包络

一个含一个参数 λ 的曲线族 $F(x,y,\lambda)=0$ 的包络是指一条曲线，它的每一点是它和该族中一条曲线的切点. 我们知道，包络的方程可以从方程 $F=0$ 和 $\partial F/\partial\lambda=0$ 消去 λ 得到. 下面我们把这个

结果应用于直线族。

平面上一条直线可以用从原点到它的距离 p 和从 x 轴到它的法线的角 φ 来确定(图1.1)。这样，直线的方程就是

$$x\cos\phi + y\sin\phi - p = 0. \tag{1.1}$$

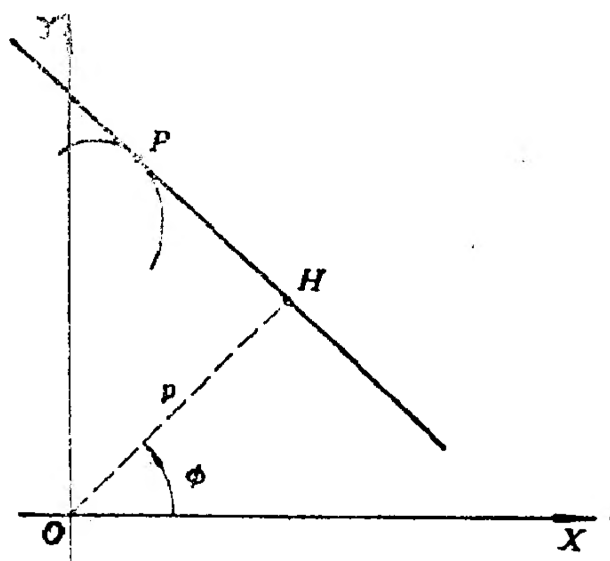


图 1.1

若 p 为一个函数 $p = p(\phi)$，则 (1.1) 是一族直线，而若假定 $p(\phi)$ 是可微导的，则直线族的包络可以从(1.1) 和经微导后的方程

$$-x\sin\phi + y\cos\phi - p' = 0 \quad (p' = dp/d\phi) \tag{1.2}$$

得到。

从(1.1)和(1.2)，得直线族(1.1)的包络的参数方程

$$x = p\cos\phi - p'\sin\phi, \qquad y = p\sin\phi + p'\cos\phi. \tag{1.3}$$

这两个公式给出直线和包络的切点 P 的坐标。由于从 O 到直线的垂线同直线的交点的坐标是 $p\cos\phi, p\sin\phi$，可知

$$HP = p'. \tag{1.4}$$

假定函数 p 属于C^2 类(记住 C^n 类是指可以连续微导 n 次)，由(1.3)可知

$$dx = -(p + p'')\sin\phi d\phi, \quad dy = (p + p'')\cos\phi d\phi.$$

故$ds = |p + p''|d\phi$，而包络的曲率半径是 $\rho = ds/d\phi = |p + p''|$。

若包络是一个凸集K的边界∂K，而O是K的一个内点，则$p=p(\phi)$就叫做K或凸线∂K相对于O的[支]撑函数。直线(1.1)则叫做K的[支]撑线。这时，我们可以证明$p+p''>0$（例如参看[…，第18页]），而上段的两个公式可以写作

$$ds=(p+p'')d\phi, \quad \rho=p+p'' \tag{1.5}$$

可以证明，周期函数p为一个凸集K的撑函数的一个充要条件是$p+p''>0$。

由(1.5)中的第一式，可知具有C^2类撑函数p的闭凸线的周长是

$$L=\int_0^{2\pi} p d\phi. \tag{1.6}$$

"p属于C^2类"的假设可以省掉。可以证明，对于任意闭凸线，公式(1.6)成立(例如参看[683，第161页])。

凸集K的面积也可以从撑函数计算。事实上，若设想把K分解成以O为公共顶点的无穷小三角形，它们的高是p，底是ds，则

$$F=\frac{1}{2}\int_{\partial K} p ds=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p(p+p'')d\phi, \tag{1.7}$$

而经过分部积分，就得

$$F=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2-p'^2)d\phi. \tag{1.8}$$

3. Minkowski混合面积

设K_1，K_2为平面上两个有界凸集，它们依次相对于O_1，O_2的撑函数p_1，p_2都属于C^2类。考虑函数$p(\phi)=p_1(\phi)+p_2(\phi)$。直线族$x\cos\phi+y\sin\phi-p=0$的包络是一条凸线，它的曲率半径是

$$\rho=p+p''=(p_1+p_1'')+(p_2+p_2'')=\rho_1+\rho_2.$$

由于∂K_1和∂K_2是凸线，$\rho_1>0$，$\rho_2>0$，因而$\rho>0$。故上述包络是一个凸集K_{12}的边界。若p_1和p_2不属于C^2类，这个证明不能用，但

结果仍然成立：函数$p = p_1 + p_2$总是一个凸集K_{12}的撑函数，므K_{12}则称为K_1和K_2的混合凸集[63，第29页]。

K_{12}的面积可以写作

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2 - p'^2)\mathrm{d}\phi = F_1 + F_2 + 2F_{12}, \tag{1.9}$$

其中F_1, F_2是K_1, K_2的面积，而

$$F_{12} = F_{21} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p_1 p_2 - p'_1 p'_2)\mathrm{d}\phi \tag{1.10}$$

叫做K_1和K_2的Minkowski 混合面积。

通过分部积分，并利用(1.5)，得

$$F_{12} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_1(p_2 + p''_2)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_{\partial K_2} p_1 \mathrm{d}s_2. \tag{1.11}$$

同样，又得

$$F_{21} = \frac{1}{2}\int_{\partial K_1} p_2 \mathrm{d}s_1. \tag{1.12}$$

其中 $\mathrm{d}s_1, \mathrm{d}s_2$是$\partial K_1, \partial K_2$ 在垂直于方向ϕ的撑线上的切点处的弧元[素]。

注意混合面积F_{12} 与原点O_1, O_2无关。事实上，若用 O_1^* 代替 O_1，而$O_1O_1^* = a$，又 α 是从 x 轴到 $O_1O_1^*$ 的角(图1.2)，则相对于

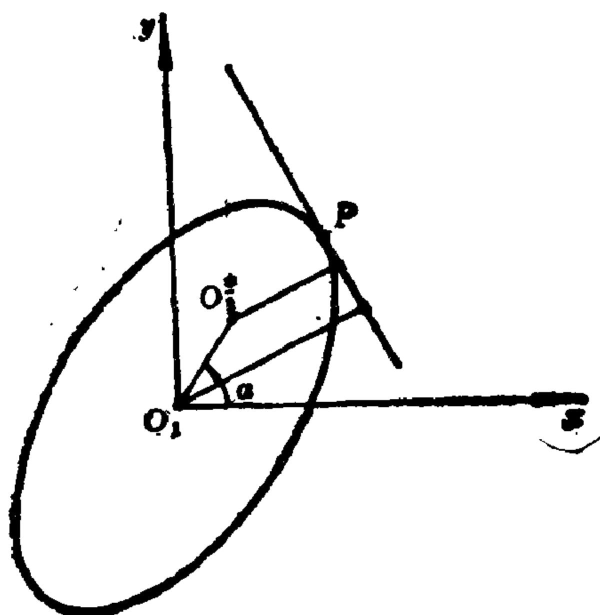


图 1.2

O_1^*的撑函数$p_1^* = p_1 - a\cos(\phi - \alpha)$，于是利用(1.10)，并通过分部积分，就可以验证$F_{12}^* = F_{12}$。若改变O_2的位置，同样结论显然也是正确的。

此外，经过K_1和K_2的平移，由于p_1和p_2不变，混合面积F_{12}也不变。现在假定两个凸集之一，例如K_1，绕一点O转动一个角θ.设O_1^*为O_1的象。这个转动等价于绕O_1转动θ，再作矢量$\overrightarrow{O_1O_1^*}$所确定的平移。因此，由于$F_{12}$不受平移影响，我们只须考察绕$O_1$转动的作用。经过绕$O_1$转动$\theta$角，新的撑函数是$p_1^* = p(\phi - \theta)$，因而$K_2$和转动后的凸集$K_1^*$的混合面积是

$$F_{12}(\theta) = \frac{1}{2}\int_{\partial K_2} p_1(\phi - \theta) ds_2.$$

对θ积分，并利用(1.6)，得

$$\int_0^{2\pi} F_{12}(\theta) d\theta = \frac{1}{2} L_1 L_2. \qquad (1.13)$$

这个公式下面将用到。

例 1　若K_2为从K_1经过平移所得，我们可以假定$p_1 = p_2$，$ds_2 = ds_1$，因而(1.12)给出$F_{12} = F_1 = F_2$，即：两个经过平移可以重合的凸集的混合面积等于两个凸集的共同面积。

例 2　若K_2是半径等于r的圆，则$ds_2 = r d\phi$，而(1.11)给出

$$F_{12} = \frac{1}{2} r \int_0^{2\pi} p_1 d\phi = \frac{1}{2} r L_1. \qquad (1.14)$$

例 3　设K_1, K_2为两个线段，其长依次为$2a, 2b$，而α为含这两线段的直线之间的角。利用(1.10)，就得$F_{12} = 2ab|\sin\alpha|$。从0到2π对α积分，就得$8ab$，和(1.13)一致。注意一条线段是一个凸集，其周长等于线段长的两倍。

4.　一些特殊凸集

设已给凸集K，直线h，以及一点$P \in \partial K$，$P \in h$。直线h把

平面分为两个开半平面，若K含在两者之一的闭包内，则h是K在P点的撑线。若∂K在P点有切线，则在P点的撑线和切线重合。一个凸集的每一点在一条撑线上，而垂直于一个已给方向恰好有两条撑线。

垂直于方向ϕ的两条撑线把K夹在当中，它们之间的距离$\Delta(\phi)$叫做K在方向ϕ的宽[度][1]。若$p(\phi)$是K的撑函数，则$\Delta(\phi)=p(\phi)+p(\phi+\pi)$，而根据(1.6)，就得

$$L=\int_0^\pi \Delta(\phi)\mathrm{d}\phi. \tag{1.15}$$

因此，Δ的中值或期望值是

$$E(\Delta)=L/\pi, \tag{1.16}$$

其中L为K的周长。注意宽度$\Delta(\phi)$可以看成K在一条垂直于沿方向ϕ的直线的投影长。于是(1.16)给出：任意一个周长为L的凸线可以投影到某一直线上，使投影长$\geqslant L/\pi$，也可以投影到某一直线上，使投影长$\leqslant L/\pi$。

一个凸集的最小宽度叫做K的幅[度][2]。它将用E表示。K中两点间的最大距离叫做K的直径，用D表示。宽度的最大值也叫做直径。显然$E\leqslant\Delta\leqslant D$。故由(1.15)可得

$$\pi E\leqslant L\leqslant \pi D. \tag{1.17}$$

现在我们给出几种特殊凸集的定义，它们对我们的目的特别有意义。

平行凸集。已给凸集K，取中心在K的一点而半径等于r的一切圆，它们的并集K_r叫做K的r距平行集。它的边界∂K_r叫做∂K的r距外平行曲线。图1.3、1.4、1.5依次表示一个线段、一个三角形和一个椭圆的平行集。

若$p(\phi)$为K相对于O的撑函数，则K_r相对于同一点O的撑函

---

① Breath。——译者

② Width。——译者

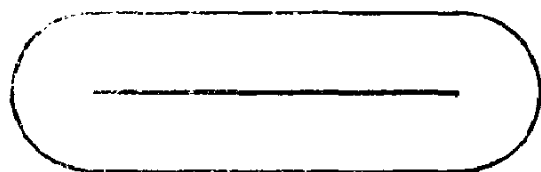


图 1.3

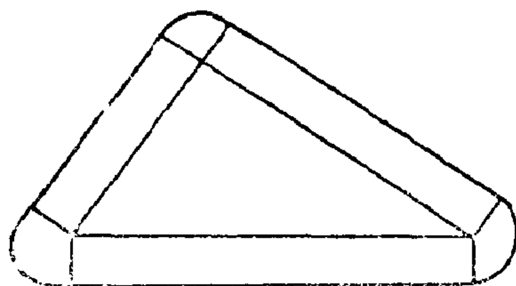


图 1.4

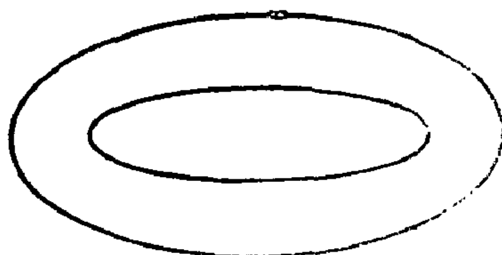


图 1.5

数是$p(\phi)+r$，而根据(1.6)和(1.8)，可知K_r的周长和面积依次为

$$L_r = L + 2\pi r, \quad F_r = F + Lr + \pi r^2. \tag{1.18}$$

若∂K属于C^2类，则根据(1.5)，∂K_r的曲率半径是

$$\rho_r = \rho + r. \tag{1.19}$$

对于满足$r \leqslant \min \rho$的r值，就有一个以$p(\phi)-r$为撑函数的凸集，叫做K的内平行集，用K_{-r}表示。∂K_{-r}的周长和K_{-r}的面积可用公式(1.18)表示，但须作代换$r \to -r$。

常宽集。若对于一切ϕ，$\Delta(\phi)=\Delta=$常数，凸集K叫做**常宽集**。这时$E=\Delta=D$，而根据(1.15)，K的周长就是

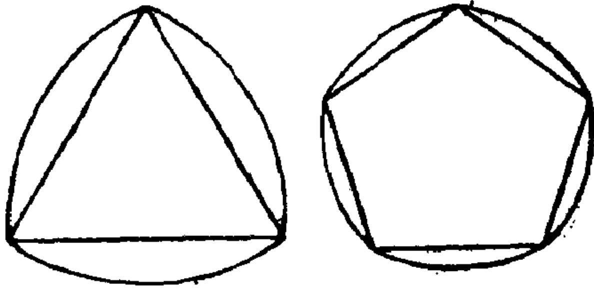
$$L = \pi\Delta. \tag{1.20}$$

此外，若∂K属于C^2类，则由(1.5)以及$\Delta = p(\phi)+p(\phi+\pi)$，有

$$\rho(\phi)+\rho(\phi+\pi)=\Delta. \tag{1.21}$$

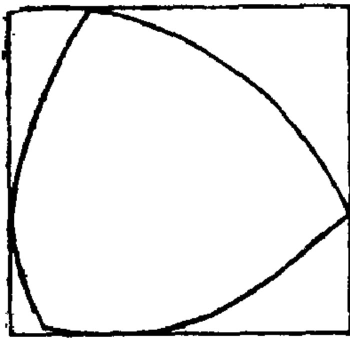
除圆以外，最简单的常宽凸集是所谓的Reuleaux多边形。已给一个正$2n+1$边形($n=1,2,\cdots$)，若以其顶点为中心以对边为弦作圆弧，则所得诸圆弧构成一个Reuleaux多边形。图1.6表示

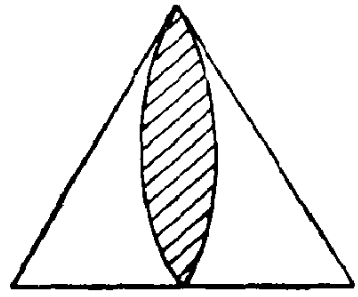
Reuleaux 三角形和Reuleaux五边形。注意一个常宽集的每一个平行集也是常宽集。


图 1.6

可以证明，每一个直径 $D \leqslant \Delta$ 的集是一个具有常宽 Δ 的凸集的子集[63，第130页]。

三角凸集。 常宽集可以在一个正方形里转动（即一切外接长方形是全等正方形，图1.7）。也有些凸集可以在一个固定正三角形内转动，这等于说，一切外接正三角形全等。这种集叫做三角集。例如图 1.8 里带阴影的纺锤状区域是一个三角集。一个三角集的每一个平行集也是三角集。


图 1.7


图 1.8

从一正三角形的内点到三边距离之和等于三角形的高，因此，一个三角集的撑函数满足条件 $p(\phi)+p(\phi+2\pi/3)+p(\phi+4\pi/3)=h$。由这个等式和(1.6)可知，内接于以 h 为高的正三角形的一个三角集的周长是 $L=(2\pi/3)h$。

5. 幺球面面积与幺球体体积

在本书内，我们总用 O_n 表示 n 维幺球面的面积而用 κ_n 表示 n 维幺球体的体积。它们的值是

$$O_n = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)}, \quad \kappa_n = \frac{O_{n-1}}{n} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}. \quad (1.22)$$

其中 Γ 表示 Γ 函数，它们满足关系

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad \Gamma(n) = (n-1)!\,(n \text{ 为整数}), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (1.23)$$

例如

$$O_0 = 2, \quad O_1 = 2\pi, \quad O_2 = 4\pi, \quad O_3 = 2\pi^2,$$

$$\kappa_1 = 2, \quad \kappa_2 = \pi, \quad \kappa_3 = \frac{4}{3}\pi.$$

6. 注记与练习

(1) 关于凸集的极小问题。一个凸集的面积 F，周长 L，直径 D，和幅度 E 之间，有若干不等式，其中的一些如下：

$$L^2 \geqslant 4\pi F \quad \sqrt{3}F \geqslant E^2, \quad L \geqslant \pi F, \quad 2F \geqslant ED,$$
$$L \geqslant 2(D^2 - E^2)^{1/2} + 2E \arcsin(E/D),$$
$$L \leqslant 2(D^2 - E^2)^{1/2} + 2D \arcsin(E/D),$$
$$2F \leqslant E(D^2 - E^2)^{1/2} + D^2 \arcsin(E/D),$$
$$4F \leqslant 2EL - \pi E^2.$$

还不知道一组完备的不等式都包括什么。在每一款中，确定满足等式的点集，一般是困难的课题。若要查阅关于这个问题的文献及系统论述，可看论文：Kubota 与 Hemmi[349]，Ohmann [462]，Santaló[576]，Sholander[606]。关于凸集的一些结果可看专著 Convexity (V. Klee 主编；Amer. Math. Soc, Providence, R.I, 1963)。

(2) **配极凸集.** 设K为平面上一个有界凸集。设O为K的一个内点，P是从O出发，在方向ϕ上，K的一个边界点。函数$h^*(\phi)=|OP|^{-1}$是一个凸集K^*的撑函数，K^*称为K对于O的配极集.配极凸集对于数的几何有若干应用(见 C.G. Lekerkerker[301]和 Cassels[92]两书)。我们叙述以下性质：

(a) 混合面积$F_{12}(K,K^*)$满足不等式$F_{12}(K,K^*)\geqslant\pi$；当$K$为以$O$为中心的圆时，而且只有这时候，等式成立。

(b) 若K有对称中心O，则面积$F(K)$和$F(K^*)$满足不等式

$$\pi^2/2\leqslant F(K)\cdot F(K^*)\leqslant\pi^2. \tag{1.24}$$

对于不一定是凸的闭曲线，其极角是弧长的单调函数，Guggenheimer[255]研究了仿射不变量$F(K)\cdot F(K^*)$，并把它应用于与微分方程的周期解有关的不等式。关于平面上的凸曲线，参看 Heil[296]，关于对微分方程的应用，参看[445]—[448]。

不等式(1.24)可以推广到n维欧氏空间E_n里的中心对称集.用$V(K)$，$V(K^*)$表示它们的体积，则

$$\kappa_n^2 n^{-n/2}\leqslant V(K)\cdot V(K^*)\leqslant\kappa_n^2. \tag{1.25}$$

其中κ_n是E_n里幺球的体积(1.22)。不等式(1.25)源出于Mahler[387]，而为Bambah[19]和 Santalò[556]所改进.(1.25)中右边的不等式对于一切凸集，不限于中心对称集，是最佳的，而对于以O为中心的n维椭球，等式成立。对于中心对称体，(1.25)中左边等式成立的充要条件是K为平行超体或交叉多胞体。Mahler猜想：对于任意凸体K，$V(K)\cdot V(K^*)\geqslant 4^n n!$（等式成立的充要条件是$K$为单纯形)，但这个不等式尚未证明。某些改进可以在Dvoretzky与 Rogers[157]和 Guggenheimer[258]中找到。对于数的几何的应用，见[361，104—110页].仿射不变量$V(K^*)$在仿射积分几何里有一种清楚的几何意义，这一点我们在第十一章第二和第三节里将看到。

练习1 设K为凸集，它的边界∂K属于C^2类。假定∂K有

正向，对于 ∂K 的每一点 A，作弦 AB，使 AB 同在 A 点的切线作固定角 θ。假定 K 具有性质 $|AB| = \lambda =$ 常数。证明 ∂K 的长是 $L = \pi\lambda/\sin\theta$。若 K 是常宽集而 $\theta = \pi/2$，则 λ 为宽度而这个公式化为(1.20)。

练习2 设 ∂K 为属于 C^1 类的闭凸线。假定经过 K 每一点 A 有一条具有已给长度 $|AB| = \lambda$ 的弦，在每一条这样的弦上取一点 X，使 $|AX| = a$，$|XB| = b(a + b = \lambda)$。证明 ∂K 与 X 所描的曲线之间的面积是 πab（与 ∂K 无关）。这个结果叫做 Holditch 定理。

练习3 若垂直于方向 ϕ_0 的撑线含有 ∂K 的一个线段 P_1P_2（图1.9），证明撑函数 $p(\phi)$ 在 ϕ_0 没有导数，但有右导数 $p'_+(\phi_0)$ 和左导数 $p'_-(\phi_0)$，而且 $p'_+(\phi_0) = HP_1$，$p'_-(\phi_0) = HP_2$，其中 H 是从 O 到撑线的垂足。

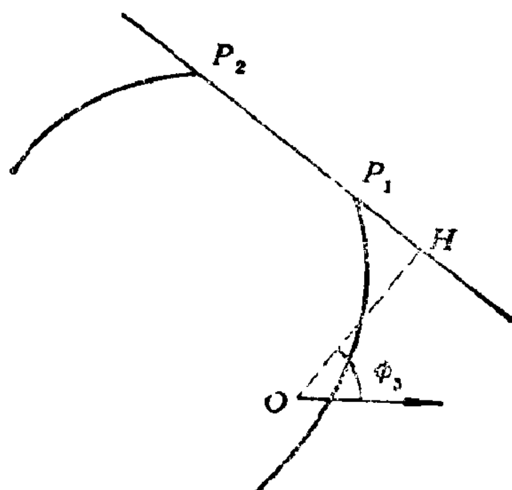


图 1.9

第二章　平面里的点集与 Poisson 过程

1. 点集的密度

设 x,y 表示平面里的直角笛卡尔坐标。在积分几何和几何概率中，一个点集 X 的测度是指在这个点集上，一个微分齐式 $\omega=f(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 的积分（假定按 Lebesgue 的意义这个积分存在），其中函数 $f(x,y)$ 是遵照下面条件选择的：测度 $m(X)$ 在平面运动群下不变。

我们将始终采用外微积的记号和定则，这些可以在任何现代的微积分或微分几何书中看到（例如 Fleming[204]，Flanders[201，202]，Loomis 与 Sternberg[368]，以及 H.Cartan[91]）。

设 $\mathfrak{M}$ 为平面里的运动群。在一个直角笛卡儿坐标系里，一个运动 $u\in\mathfrak{M}$ 的方程是

$$x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha+a,\quad y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha+b,\qquad(2.1)$$

其中 (a,b) 是 u 的平移分量而 α 是 u 的转角。

我们需要求一个函数 $f(x,y)$，使对于任意点集 X，测度

$$m(X)=\int_X f(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

在 $\mathfrak{M}$ 下不变。若 $X'=uX$ 为 X 经过运动 u 后的象，则由于 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\mathrm{d}x'\wedge\mathrm{d}y'$，我们有

$$m(X')=\int_{X'}f(x',y')\mathrm{d}x'\wedge\mathrm{d}y'$$

$$=\int_X f(x',y')\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\qquad(2.2)$$

而根据对于任意 X，$m(X')=m(X)$ 的条件，可知对于一切对应的点偶 $(x,y)\to(x',y')$，$f(x',y')=f(x,y)$。由于任意点 x,y 可以经过运动变到任意另一点 (x',y')（即运动群对于点是可迁的），

可见 $f(x,y)=$常数。由此可见下面定义是合理的：

平面里，点 $P(x,y)$ 的一个集合的测度用微分齐式

$$\mathrm{d}P=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \tag{2.3}$$

在该点集上的积分确定，$\mathrm{d}P$ 称为点密度。

显然，除一个常数因子外，这是在运动下唯一不变的密度。与此类似，对于 n 个彼此独立的点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 所构成的 n 点组的集合，我们可以叙述如下定义：

平面里独立的 n 点组 $P_i(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n$ 所构成的集合的密度是

$$\mathrm{d}P_1\wedge\mathrm{d}P_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}P_n, \tag{2.4}$$

其中 $\mathrm{d}P_i=\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}y_i$。除一个常数因子外，这个密度是唯一的。

对于密度(2.3)和(2.4)，我们总是取它们的绝对值。

若 P 点是用另一种坐标 ξ,η 确定的，它们和直角坐标 x,y 的关系是 $x=h(\xi,\eta)$，$y=g(\xi,\eta)$，点密度可以写成

$$\mathrm{d}P=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=|J|\,\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\eta,$$

其中 J 是雅科比行列式 $J=h_\xi g_\eta-h_\eta g_\xi$。

设 X 为一个集合(点集或 n 点组的集)，而 $Y\subset X$。有了点集和 n 点组的集的定义后，若已经知道一个随机元素(点或 n 点组)在 X 里，就可以确定它在 Y 里的概率，这个概率的定义是

$$p=\frac{m(Y)}{m(X)}. \tag{2.5}$$

下面我们需用的关于几何概率的概念，见于 Deltheil[144]，M.G.Kendall 与 P.A.P Moran[335]，M.I.Stoka 与 R.Theodorescu[654]。一个公理化的构造见 Hadwiger[275] 或 Rényi[501, 503]。

2. 初始的积分公式

我们将按照 Crofton[132, 133]和 Lebesgue[357]的款式，给一个例来说明，密度 $\mathrm{d}P=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 在不同坐标系里的简单计算可

以给出关于平面卵凸集的一些值得注意的积分公式。

设 K_1,K_2 为两个有界凸集，它们相对于点 O_1,O_2 的撑函数是 $p_1(\phi_1),p_2(\phi_2)$。假定每一条撑线和相应的凸集只有一个公共点。设 $\tau_i=\phi_i+\pi/2(i=1,2)$ 为垂直于方向 ϕ_i 的撑线方向(图 2.1)。撑线的方程是

$$(x-x_i)\sin\tau_i-(y-y_i)\cos\tau_i-p_i=0 \quad (i=1,2), \tag{2.6}$$

其中 x_i,y_i 为 O_i 的坐标。

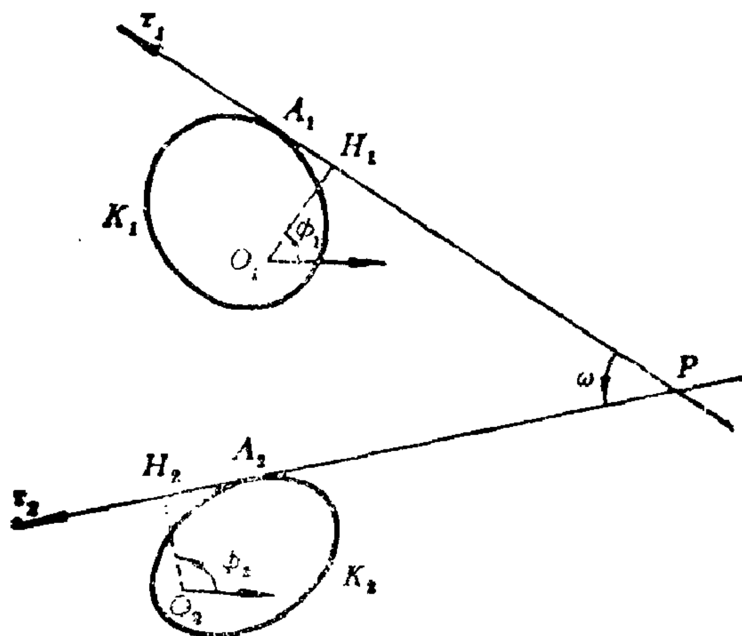


图 2.1

这两条撑线(2.6)的交点 P 的坐标是方程组(2.6)的解。我们要用 τ_1,τ_2 来表示密度 dP。对(2.6)微分，得

$$\sin\tau_i dx-\cos\tau_i dy=-t_i d\tau_i, \tag{2.7}$$

其中 t_i 表示从 P 到切点 A_i 的切线长。这是因为 $(x-x_i)\cos\tau_i+(y-y_i)\sin\tau_i=H_iP$ 是 O_iP 在撑线上的投影，因为按照(1.4)有

$$dp_i/d\tau_i=H_iA_i.$$

取(2.7) $i=1,2$ 的外积，得

$$dP=dx\wedge dy=\frac{t_1t_2}{\sin(\tau_2-\tau_1)}d\tau_1\wedge d\tau_2$$

或

$$d\tau_1\wedge d\tau_2=\frac{\sin(\tau_2-\tau_1)}{t_1t_2}dP。\tag{2.8}$$

现对 τ_1 和 τ_2 的一切值取这个等式两边的积分．在左边得 $4\pi^2$。在右边，注意经过在 K_1,K_2 外的每一点 P，有两条 K_1 的撑线，两条 K_2 的撑线。设 t_1,t_1' 和 t_2,t_2' 为从 P 到相应的切点的撑线长，而令 (t_i,t_j) 表示撑线 t_i 和 t_j 之间的角。对于每一点 P，有以下的和

$$\frac{\sin(t_1,t_2)}{t_1t_2}+\frac{\sin(t_1,t_2')}{t_1t_2'}+\frac{\sin(t_1',t_2)}{t_1't_2}+\frac{\sin(t_1',t_2')}{t_1't_2'}。\tag{2.9}$$

因而就有积分公式

$$\int_{P\notin K_1\cup K_2}\left[\frac{\sin(t_1,t_2)}{t_1t_2}+\frac{\sin(t_1,t_2')}{t_1t_2'}+\frac{\sin(t_1',t_2)}{t_1't_2}+\frac{\sin(t_1',t_2')}{t_1't_2'}\right]dP=4\pi^2,\tag{2.10}$$

其中的积分是对于 K_1,K_2 外面的一切点取的。

公式(2.10)包括一些特款：

(a) 若 $K_1\equiv K_2\equiv K$ 而令 t,t' 为 PA_1,PA_2 的长(图2.2)，则 $t=t_1=t_2$，$t'=t_1'=t_2'$ 而 $(t_1,t_2)=(t_1',t_2')=0$，$(t_1,t_2')=(t_1',t_2)=\omega=A_1PA_2$ 角。于是

$$\int_{P\notin K}\frac{\sin\omega}{tt'}dP=2\pi^2。\tag{2.11}$$

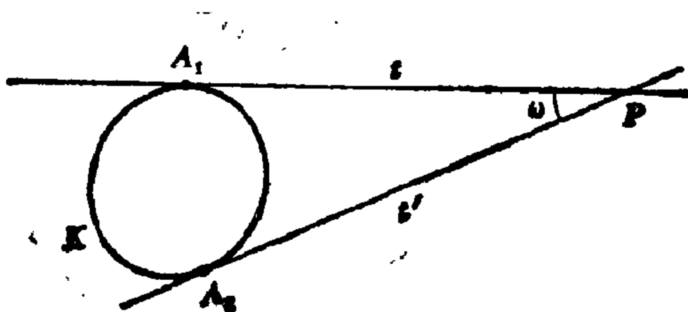


图 2.2

(b) 若凸集K的边界∂K有连续曲率半径ρ，令$\rho_i(i=1,2)$为在切点A_i的曲率半径，则$\rho_i d\tau_i = ds_i$，其中ds_i是K的边界在A_i的弧元。于是公式(2.8)可以写成

$$\frac{\sin\omega}{tt'}\rho_1 dP = ds_1 \wedge d\tau_2 \text{ 或 } \frac{\sin\omega}{tt'}\rho_1\rho_2 dP = ds_1 \wedge ds_2. \quad (2.12)$$

(c) 对于K外一切点取积分，注意每一点属于两条撑线，得

$$\int_{P \notin K} \frac{\sin\omega}{tt'}(\rho_1+\rho_2)dP = 2\pi L, \quad \int_{P \notin K} \frac{\sin\omega}{tt'}\rho_1\rho_2 dP = \frac{1}{2}L^2. \quad (2.13)$$

最后一项中出现因子$\frac{1}{2}$，因为把s_1, s_2交换时，得到同一点P。

练习　证明更一般的公式

$$\int_{P \notin K} \frac{\sin^m\omega}{tt'}dP = \frac{2\Gamma(m/2)}{\Gamma[(m+1)/2]}\pi^{3/2},$$

$$\int_{P \notin K} \frac{\sin^m\omega}{tt'}(\rho_1+\rho_2)dP = \frac{2\Gamma(m/2)}{\Gamma[(m+1)/2]}\sqrt{\pi}L. \quad (2.14)$$

类似公式为 Czuber[135], Masotti-Biggiogero[393]—[395]，和 Stoka[647]所给出。

3. 三点组的集合

设$P_i(x_i, y_i)$，$i=1,2,3$，为平面里三个独立的点。假定它们不共线，设$Q(\xi,\eta)$为三角形$P_1P_2P_3$的外心，而(R, α_i)为P_i对于Q的极坐标(R为三角形$P_1P_2P_3$的外接圆半径)。我们有

$$x_i = \xi + R\cos\alpha_i, \quad y_i = \eta + R\sin\alpha_i. \quad (2.15)$$

令$dP_i = dx_i \wedge dy_i$，$dQ = d\xi \wedge d\eta$，经过简捷了当的计算，就得到下面关于平面上三点组的密度。

$$dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3 = R^3|S|dQ \wedge dR \wedge d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 \wedge d\alpha_3, \quad (2.16)$$

其中

$$S=\sin(\alpha_2-\alpha_1)+\sin(\alpha_3-\alpha_2)+\sin(\alpha_1-\alpha_3)$$

$$=-4\sin\frac{(\alpha_2-\alpha_1)}{2}\sin\frac{(\alpha_3-\alpha_2)}{2}\sin\frac{(\alpha_1-\alpha_3)}{2}. \quad (2.17)$$

注意$\frac{1}{2}R^2S$是三角形$P_1P_2P_3$的面积T，就得

$$\begin{aligned}dP_1\wedge dP_2\wedge dP_3&=2RT\,dQ\wedge dR\wedge d\alpha_1\wedge d\alpha_2\wedge d\alpha_3\\&=2(T/S)dQ\wedge dT\wedge d\alpha_1\wedge d\alpha_2\wedge d\alpha_3. \quad (2.18)\end{aligned}$$

令$C\equiv C(P_1,P_2,P_3)$表示三角形$P_1P_2P_3$的外接圆盘。已给一个半径等于ρ的三角形C_ρ，考虑C在C_ρ内的一切有序三点组P_1,P_2,P_3所构成的集合。若令r,ϕ为Q相对于C_ρ的中心的极坐标，则根据(2.16)，这个集合的度量是

$$\begin{aligned}&m(P_1,P_2,P_3;C\subset C_\rho)\\&=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\rho(\rho-r)^4r\,dr\int_0^{2\pi}d\alpha_1\int_0^{2\pi}d\alpha_2\int_{\alpha_2}^{2\pi}|S|\,d\alpha_3\\&=\frac{\pi^3\rho^6}{5}. \quad (2.19)\end{aligned}$$

若只考虑$C\subset C_\rho$而且$P_1P_2P_3$是锐角三角形的三点组P_1,P_2,P_3，则这些三点组集合的度量是

$$\int_0^{2\pi}d\phi\frac{1}{4}\int_0^\rho(\rho-r)^4r\,dr\int_0^{2\pi}d\alpha_1\int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\pi}d\alpha_2\int_{\alpha_1+\pi}^{\alpha_2+\pi}|S|\,d\alpha_3$$

$$=\frac{\pi^3\rho^6}{10}.$$

因此，在$C\subset C_\rho$的三点组的集合中，三点组构成锐角三角形的概率是1/2。取$\rho\to\infty$时的极限，可知平面里随机三角形为锐角三角形的概率(按密度(2.16))是$\frac{1}{2}$(参看 R.E.Miles[411])。

Richard[510]证明了，在一个面积等于F的区域里，三个随机点所构成的三角形$P_1P_2P_3$的周长L的概率密度函数是$(4\pi^2/21F^2)L^3dL$(F充分大时的渐近值)。

4. 齐次平面 Poisson 点过程

设 D_0, D 为平面上两个区域，$D \subset D_0$。设 F_0, F 依次为 D_0, D 的面积。按密度 $dP = dx \wedge dy$，D_0 的一个随机点位于 D 内的概率是 F/F_0。若在 D_0 随意选取 n 点，则恰好有 m 点位于 D 内的概率是(二项分布)

$$p_m = \binom{n}{m}\left(\frac{F}{F_0}\right)^m\left(1-\frac{F}{F_0}\right)^{n-m}. \qquad (2.20)$$

若 D_0 扩大成整个平面，n 无限增加，而且 $n, F_0 \to \infty$ 时，$n/F_0 \to \rho$，ρ 是一个正常数，则

$$\lim p_m = \frac{(\rho F)^m}{m!} e^{-\rho F}. \qquad (2.21)$$

(2.21)右边是 Poisson 分布的概率函数；它只依赖于乘积 ρF，而 ρF 叫做分布的参数。这个关于平面上的点的概率模型叫做一个具有强度 ρ 的齐次平面 Poisson 点过程。它的特性是，在每一个区域 D 内的点数是一个只依赖于面积 F 的随机变量(不依赖于 D 的形状或 D 在平面的位置)，它具有分布(2.21)。关于 n 维空间中随机点过程，特别是关于 Poisson 过程的一个系统的探讨，见于 J.R.Goldman[232]。从积分几何的观点看，最重要的应用是 R.E.Miles 的成果[411]。下面是这篇论文中的一些结论。

(1) 设 $\Gamma_\theta(\nu,\lambda)$ $(\theta>0, \lambda>0, \nu>0)$ 表示所谓的 Γ 分布，它有概率密度函数

$$f(x) = \theta\lambda^{\nu/\theta}x^{\nu-1}\frac{\exp(-\lambda x^\theta)}{\Gamma(\nu/\theta)}, \quad x \geqslant 0, \qquad (2.22)$$

其中 Γ 是满足关系(1.23)的 Γ 函数。这就是说，随机变量介乎 x 与 $x+dx$ 之间的概率是 $f(x)dx$，因而

$$\int_0^\infty f(x)dx = 1. \qquad (2.23)$$

这个分布的矩是

$$\mu_k = \left\{\frac{\Gamma[(\nu+k)/\theta]}{\Gamma(\nu/\theta)}\right\}\lambda^{-k/\theta}, \quad k = 1, 2, \cdots. \qquad (2.24)$$

特殊地，x 的期望值是

$$E(x) = \mu_1 = \left\{\frac{\Gamma[(\nu+1)/\theta]}{\Gamma(\nu/\theta)}\right\}\lambda^{-1/\theta}. \qquad (2.25)$$

把一个 Poisson 过程的点叫做粒子，考虑以粒子 P_1, P_2, P_3 为顶点而含有恰好 m 个粒子在内的三角形的集合 $C(m)$。设 $P_1P_2P_3$ 为这样一个三角形，而 T 为其面积。按照概率恒等式 prob（面积为 T，含 m 个粒子在内）= prob(面积为 T) × prob(假定面积为 T，含 m 个粒子在内)，并利用(2.18)和(2.21)，就得以一个 Poisson 过程的粒子为顶点，具有面积 T，而含有恰好 m 个粒子在内的三角形的概率密度函数

$$f_m(T) = K_m \frac{(\rho T)^m}{m!} e^{-\rho T} T, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, \qquad (2.26)$$

其中 K_m 是通过条件(2.23)可以确定的常数。其结果是 $K_m = \rho^2/(m+1)$。于是有：

在一个强度为 ρ 的齐次平面 Poisson 点过程中，含有恰好 m 个粒子在内的三角形的面积分布是 $\Gamma_1(m+2, \rho)$。

特殊地，空三角形($m=0$)的平均面积是 $E(T_0) = 2/\rho$。

(2) 现在考虑三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆盘的半径 R。按照(2.16)，R 的概率密度函数和 R^3 成正比，因此，含有恰好 m 个粒子在内的圆盘（它边界上的粒子不计算在内）半径的概率密度函数可以写成 $K_m^*(\rho\pi R^2)^m[\exp(-\rho\pi R^2)/m!]R^3$ 的形状。条件(2.23)给出 $K_m^* = 2(\pi\rho^2)^2/(m+1)$，于是得

在一个具有强度 ρ 的齐次平面 Poisson 点过程中，设 R_m 为含恰好 m 个粒子的三角形 $P_1P_2P_3$ 的外接圆盘半径，则 R_m 的分布是 $\Gamma_2(2m+4, \pi\rho)$。

这样，R_0 的平均值是 $E(R_0)=3/2\sqrt{\rho}$。要得到细节和更完备的结果，请看 Miles 的论文[411]。

Krickeberg 研究了别的点过程，例如所谓的 Cox 过程或双随机 Poisson 过程。在研究几何变换群下具有不变性质的点过程中，Cox 过程起重要作用(见Krickeberg 的论文[345,346])。有关问题可以在 Matheron 的书[401a]里找到。

(3) **随机拼嵌.**[1] 一个拼嵌是(以凸多边形为边界的)胞腔集合，这些胞腔拼接在一起,没有重叠地覆盖 E_2。对欧氏平面和双曲平面上的规则拼嵌曾经有过探讨，例如 Coxeter[128,130]。问题是给出随机拼嵌的定义。我们将考虑齐性平面 Poisson 点过程所产生的某些随机拼嵌。

已给点 x，用 $P_i(x)$表示和 x 第 i 个最近的粒子，并规定以下等价关系：若对于 $i=1,2,\cdots,n,P_i(x)=P_i(y)$，则 x 和 y 称为**等价**。对于某些点，第 i 个最近粒子可能不唯一存在,除此以外，这个等价关系把整个平面分割成互不相交的等价点构成的集合，这些点集几乎肯定是有界凸多边形。这些多边形构成平面的一个随机拼嵌，Miles[411]用 V_n^* 表示它。

若对于 x，和 x 最近的 n 个粒子是唯一确定的，则这 n 个粒子的集合称为 x 的邻近 n 组。于是又有一个等价关系：若 x 和 y 有相同的邻近 n 组，则称为等价。这个等价关系所产生的拼嵌用 V_n 表示。显然 V_n 的每个胞腔是 V_n^* 的不相交胞腔的并集，因而 V_n^* 是 V_n 的一个细分。若 $n=1$，则 $V_1^*=V_1$，这时得到的是所谓 Veronoi 拼嵌，它可以在 E_n 内推广(见[704])。

对于一个拼嵌的每一个胞腔，我们可以确定面积 A，顶点数 N，以及周长 L。对 V_n 和 V_n^*，Miles 给出了这些纯量的下列中值。

(a) 对于 V_n，

---

[1] Tesselations.——译者

$$E(A)=[(2n-1)\rho]^{-1}, \quad E(N)=6,$$

$$E(L)=\frac{(2n)!}{n!(n-1)!(2n-1)2^{2n-3}\rho^{1/2}}\sim\frac{4}{(\pi n\rho)^{1/2}}.$$

(b) 对于 V_n^*,

$$E(A)=\{n[2n-1+(64/9\pi^2)(n-1)(n-2)]\rho\}^{-1}\sim\frac{9\pi^2}{64n^3\rho},$$

$$E(N)=\frac{54\pi^2 n+256(n-1)(n-2)}{9\pi^2(2n-1)+64(n-1)(n-2)}\sim 4,$$

$$E(L)=\frac{2\sum_1^n[(2m)!/m!(m-1)!2^{2m-2}]}{2[2n-1+(64/9\pi^2)(n-1)(n-2)]\rho^{1/2}}\sim\frac{3}{4}\left(\frac{\pi^3}{n^3\rho}\right)^{1/2},$$

其中～表示 $n\to\infty$时的渐近。

除了对于 V_n^*, $E(A^2)=1.280\rho^{-2}$ 之外，更高阶的矩尚属未知。若 ν 表示 V_n 的一个胞腔所含 V_n^* 的胞腔个数，上面结果给出

$$E(\nu)=n\left(1+\frac{64(n-1)(n-2)}{9\pi^2(2n-1)}\right)\sim\frac{32n^2}{9\pi^2}.$$

关于 Voronoi 拼嵌，Crain[130]利用 Monte Carlo 方法估计了 $N^2,N^3,N^4,L^2,L^3,A^2,A^3$ 的期望值。Matschinski 报导了有关随机拼嵌的一些有趣的理论和实验结果([403]，以及所附文献)；还可参看 Ambarcumjan 的论文[8,9]。关于 E_3 里的随机拼嵌，见第16章第 4 节注记 9 .

5. 注记

(1)**一些经典的积分公式**。(a)设 K 为平面上一个有界凸集，并考虑两条固定的交角为 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$的撑线(图2.3)。这两条撑线把 K 外那部分平面分成五个区域 R_1,R_2,R_3,R_4,R_5 如图 2.3。若I_i 表示在 R_i 上$(\sin\omega/tt')dP$ 的积分，其中 t,t' 为从 P 到切点的撑线长，可以证明下列公式：

$$I_1=\frac{1}{2}\alpha^2, \qquad I_2=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)^2,$$

$$I_3 = I_5 = \frac{1}{2}(\pi^2 - \alpha^2), \qquad I_4 = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi\alpha。$$

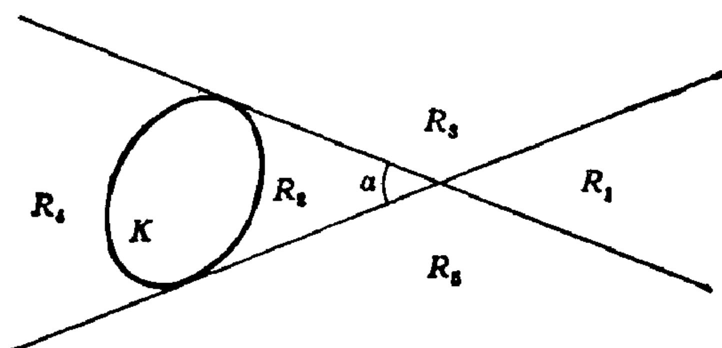


图 2.3

这些公式是 Crofton[132,133]和 Czuber[134]的工作；它们对任意 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$都是正确的。注意 $I_1+I_2+I_3+I_4+I_5=2\pi^2$，这是按照(2.11)可以预料的。

(b) 设K为有界凸集。经过K外一点，可以作两条撑线，设ω为它们的夹角。若ω为常数，例如$\omega=\omega_0$，则那些点构成一条闭凸曲线C.证明：在C与K之间的环形域上，$(\sin\omega/tt')\mathrm{d}P$的积分值是$2\pi(\omega-\omega_0)$[135]。

(c) 假定t, t'和ω具有与(a),(b)中相同的意义，可以证明下面公式[394]：

$$\int_{P\notin K}\omega^2\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}\right)\mathrm{d}P = 8\pi L\log 2,$$

$$\int_{P\notin K}\sin^2\omega\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}\right)\mathrm{d}P = 2\pi L。$$

(2) **随机三角形为钝角三角形的概率**。设$p(L)$为在一个具有边长$1\times L$的长方形内三个随机点构成钝角三角形的概率，则有Langford[355]的结果：若$1\leqslant L\leqslant 2$，则

$$p(L) = \frac{1}{3}+\frac{47}{300}\left(L^2+\frac{1}{L^2}\right)+\frac{\pi}{80}\left(L^3+\frac{1}{L^3}\right)-\frac{\log L}{5}\left(L^2-\frac{1}{L^2}\right);$$

若 $L\geqslant 2$，则

$$p(L)=\frac{1}{3}+\frac{1}{L^2}\left(\frac{\pi}{80L}+\frac{47}{300}+\frac{\log L}{5}\right)$$

$$+\left(\frac{L^2}{10}-\frac{3}{5L^2}\right)\log\frac{L+(L^2-4)^{1/2}}{L-(L^2-4)^{1/2}}+\frac{L^3}{40}\arcsin\frac{2}{L}-\frac{L^2\log L}{5}$$

$$+\frac{47L^2}{300}+\frac{L(L^2-4)^{1/2}}{150}\left(-31+\frac{63}{L^2}+\frac{64}{L^4}\right).$$

当长方形为正方形时，$L=1$，

$$p(1)=(97/150)+(\pi/40)=0.7252.$$

和第 3 节的结果比较，它们有矛盾吗？

(3) 关于 n 个随机点的凸包. 设 K 为凸集，它的边界属于 C^2 类. 设 $\kappa=\kappa(s)$ 为 ∂K 的曲率，它满足不等式 $0<\kappa<M$，其中 M 是常数. 设 H_n 为 K 内 n 个随机给定的点的凸包；设 F_n 为 H_n 的面积而 L_n 为其边界长. 关于 F_n 和 L_n 的期望值，Rényi 和 Sulanke[504] 证明了下列公式：

$$E(F_n)=F-\frac{\Gamma(8/3)(12F)^{2/3}Q_{1/3}}{10n^{2/3}}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$E(L_n)=L-\frac{\Gamma(2/3)(12F)^{2/3}Q_{4/3}}{12n^{2/3}}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 F 和 L 依次是 K 的面积和周长，而

$$Q_m=\int_0^L\kappa^m ds.$$

关于 H_n 的顶点数 ν，则有

$$E(\nu)\sim\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}(F^{-1/3}Q_{1/3})n^{1/3}.$$

若 ∂K 不属于 C^2 类，计算较复杂. 对于边长为 a 的正方形，结果是

$$E(F_n)=a^2-\frac{8a^2\log n}{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$E(L_n)=4a-\frac{a(2-q)(2\pi)^{1/2}}{n^{1/2}}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 q 为常数

$$q=\int_0^\infty\frac{[(1+t^2)^{1/2}-1]}{t^{3/2}}dt.$$

现在考虑 K 是具有 r 个顶点的凸多边形的情况，凸包 H_n 的顶点数 ν 的期望值是

$$E(\nu)=\frac{2r}{3}(\log n+C)+\frac{2}{3}\log\left(F^{-r}\prod f_i\right)+o(1),$$

其中 $C=0.5772\cdots$是 Euler 常数，F 是 K 的面积，而 f_i 表示三角形 $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ 的面积，其中 $A_1,A_2,\cdots,A_r$是按次序排列的 K 的顶点。例如，若 K 是三角形，则有 $E(\nu)=2(\log n+C)+o(1)$与三角形的形状无关。乘积 $F^{-r}\prod f_i$ 是 K 的一个仿射不变量，当 K 是正多边形时，它达到最大值。所有这些结果属于 Rényi与Sulanke [504]。

H.Raynaud[496] 给出了到 m 维空间的某些推广。例如，若 K 是 m 维幺球，而在 K 内取 n 个随机点的凸包，则当 $m\to\infty$时，这个凸包(多面形)面数的期望值的无穷大的阶是

$$E(\nu)\sim 2\frac{\kappa_{m-1}^2}{\kappa_m^2}\frac{\Gamma[(m^2+1)/(m+1)]}{(m+1)!}\left[(m+1)\frac{k_m}{\kappa_{m-1}}\right]^{\frac{m^2+1}{m+1}}n^{\frac{m-1}{m+1}}$$

其中 κ_i 为 i 维幺球面的体积(1.22)。

Efron[160]和 Geffroy[220,221]给出了其它结果。这些结果和关于 n 点组的集合的均匀密度(2.4) 联系着。Rényi 与 Sulanke [504]探讨了正则分布点的款。Carnal[84]考虑了较一般的款，只假定点的分布是旋转对称的。他研究了在两种情况下的概率问题中，期望值 $E(\nu)$、$E(L_n)$，$E(F_n)$的渐近表现。设一个随机点 P 到原点 O 的距离 $OP>x$，他研究的是 $x\to1$ 时的情况(在幺圆盘上的分布)，和 $x\to\infty$时的情况(在整个平面上的分布)。还可以

参看[736]。Miles[420]研究了在一个 m 维幺球面内，一个随机集的点的多胞凸包具有某个数目的顶的概率。研究随机凸包的另一种途径见 L.D.Fisher[196,197]。

（4）**一个 Poisson 过程中的最近邻点。** 设 p_n 为一个 Poisson 过程中，一个点是另外 n 个点的最近邻的概率。以一个已给点为最近邻的点最多是 6 个。这出现在 P 为以那六点为顶点所构成的正六边形的中心的时候。在一个 Poisson 过程中，这样一个格局出现的概率是零。因此，$n\geqslant 6$ 时，$p_n=0$。p_n 的准确值未知。利用 Monte Carlo 方法，Roberts[514]得到以下的界值：

$$p_0<0.3785,\quad p_2<p_0,\quad p_n<\frac{p_0}{n-1}<\frac{0.3785}{n-1}\quad (n=2,3,4,5).$$

直接计算 p_n 时，遇到了至今未能解决的组合问题。

现在考虑平面是一个具有强度 ρ 的齐性 Poisson 点过程。假定每一点是一个线段的终点，线段的正向在二维幺球上是均匀的而线段的长则具有分布 $\mathrm{d}F(s)(0\leqslant s<\infty)$。假定正向和长互不相关。这时，若与线段过程无关地选取一点，则该点与最近的线段终点的距离大于 u 的概率是

$$\exp(-\rho B_2(u))(0\leqslant u<\infty),$$

其中

$$B_2(u)=2u^2\left\{\pi-\int_0^{2u}\left[\arccos\frac{s}{2u}-\frac{s\sqrt{1-s/4u^2}}{2u}\right]\mathrm{d}F(s)\right\}.$$

这个结果是 Coleman[121]的。在 n 维欧氏空间 E_n 里，同样问题的概率是 $\exp(-\rho B_n(u))$，其中

$$B_n(u)=\left(\frac{2u^n}{n}\right)\Big\{O_{n-1}-O_{n-2}$$
$$\times\int_0^{2u}\left[\Phi_{n-2}(a)-\left(\frac{s}{2(n-1)u}\right)\left(1-\frac{s^2}{4u^2}\right)^{(n-1)/2}\right]\mathrm{d}F(s)\Big\},$$

这里，$\Phi_n(\alpha)=\int_0^\alpha \sin^h x\,dx$，$\alpha=\arccos(s/2u)$，而 O_h 是 h 维幺球的面积。有关的结果见 Holgate[311]，Eberhardt[158]，和 Coleman[120]。

(5) 直线上的覆盖问题。 设在实数轴的节 $0,L$ 上有 $n-1$ 个独立而均匀分布的点 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$。这 $n-1$ 个点所构成的 $n-1$ 组的密度是 $dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}$，其中 x_i 是 P_i 的坐标($0\leqslant x_i\leqslant L$)。可以证明，$0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},L$ 诸点所确定的 n 个节中，恰好有 m 个的长大于 $\mu(m\mu\leqslant L,\ m\leqslant n)$ 的概率是

$$p_{(m)}=\binom{n}{m}\left\{\left(1-\frac{m\mu}{L}\right)^{n-1}-\binom{n-m}{1}\left[1-\frac{(m+1)\mu}{L}\right]^{n-1}\right.$$

$$\left.+\binom{n-m}{2}\left[1-\frac{(m+2)\mu}{L}\right]^{n-1}-\cdots\right\},\qquad(2.27)$$

其中的和到 $1-(m+h)\mu/L>0$ 的最后一项为止(见[335])。

特殊地，在 $m=0$ 的情况下，就得：所有的节长不大于 $\mu(n\mu\geqslant L)$ 的概率是

$$p_{(0)}=1-\binom{n}{1}\left(1-\frac{\mu}{L}\right)^{n-1}+\binom{n}{2}\left(1-\frac{2\mu}{L}\right)^{n-1}-\cdots$$

$$+(-1)^r\binom{n}{r}\left(1-\frac{r\mu}{L}\right)^{n-1}\qquad(2.28)$$

其中 r 是满足 $r\mu\leqslant L$ 的最大整数。

至少 m 个节的长超过 $\mu(m\mu\leqslant L,m<n)$ 的概率是

$$p_m=\binom{n}{m}\left(1-\frac{m\mu}{L}\right)^{n-1}-\binom{m}{1}\binom{n}{m+1}\left[1-\frac{(m+1)\mu}{L}\right]^{n-1}$$

$$+\binom{m+1}{2}\binom{n}{m+2}\left[1-\frac{(m+2)\mu}{L}\right]^{n-1}-\cdots,\quad(2.29)$$

其中的和继续下去，但受条件 $(m+h)\mu\leqslant L(h=0,1,2,\cdots)$ 所限。

若干作者研究了这些问题，其中有 R.A.Fisher[198]；Garwood[214]，他给出了在车辆交通管理问题中的一种应用；Baticle[23]；Levy[365]。还可以参看 Kendall 与 Moran 的书[335]。

现在考虑在直线上具有长度 a 的节的集合。每一个这样的节可以用它的中点(或者它里面任意一个其他固定点)来确定，而具有固定长的节的集合的测度可以确定为它们中点点集的测度。这样，从(2.28)就得到直线上覆盖问题的下面解答：

设 S_0 为直线上具有固定长 L 的一个节。假定有 n 个具有长度 a $(na \geqslant L)$ 而与 S_0 相交的随机节，则它们完全覆盖 S_0 的概率是

$$p = 1 - \binom{n+1}{1}\left(1 - \frac{a}{L+a}\right)^n + \binom{n+1}{2}\left(1 - \frac{2a}{L+a}\right)^n + \cdots + (-1)^h \binom{n+1}{h}\left(1 - \frac{ha}{L+a}\right)^n \tag{2.30}$$

其中 h 是满足 $h \leqslant n+1$，$ha \leqslant L+a$ 的最大整数。

在圆上的相应问题可以叙述如下[630]：

设在半径为 1 的圆上，取 n 个具有长度 ϕ 的独立而随机的弧，则 $n\phi \leqslant 2\pi$ 时，它们完全覆盖圆的概率是 0，而 $n\phi \geqslant 2\pi$ 时，其概率是

$$p_0^* = 1 - \binom{n}{1}\left(1 - \frac{\phi}{2\pi}\right)^{n-1} + \binom{n}{2}\left(1 - \frac{2\phi}{2\pi}\right)^{n-1} - \cdots + (-1)^h \binom{n}{h}\left(1 - \frac{h\phi}{2\pi}\right)^{n-1}, \tag{2.31}$$

其中 h 是满足 $h\phi \leqslant 2\pi$ 的最大整数。

在维数大于 1 的空间里，覆盖问题困难得多，而且一般地还没有准确的解答(见第六章第 7 节)。关于其它覆盖问题，参看 Robbins[512,513]，Takacs[666]，Votaw[705]。

(6) Rényi 的"停车"问题① **[502]**。取节(0,x)，其中 $x>1$。

---

① Parking problems.——译者

在它里面，随意选取一个单位长的节。然后，在余下的节里，选第二个单位长的节。照这样下去，直到不再能选单位长的节为止。假定在已给节$(0,x)$里，所取的单位长的节的个数是N。问题是求N的平均数作为x的函数。这个问题显然就是在一条长度为x的路上停单位长的车的问题。Rényi 的主要结果是，当$x\to\infty$时，随机地停在一条长度为x的路上(单位长)的车的个数N和路长x之比，其极限是$C=0.74759\cdots$。

这个问题为几个作者所推广 Ney[449]考虑了具有随机长度的车的停车问题。Dvoretzky 与 Robbins[156]给出了关于$N(x)$的某些极限定理。Mannion[389]证明了当所给节的长度变成无穷大时，它里面停车所占据的部分的方差和c_1x成正比，其中x是节长，而$c_1=0.035672$(参见[440])。关于停车问题以及这个问题到高维情况的推广，Solomon[616,618]提出了一些建议，并列出了文献。关于二维的款，参看 Palasti[467]和 Gani[212]。Bernal[28]，Bernal，Masson 与 Knight[29]以及 D.G.Scott[602]研究了三维空间里关于随机空间填充和随机停车的若干问题，主要是联系着具有液体结构的模型。

第三章　平面里的直线集合

1．直线集合的密度

确定平面里一条直线G，我们用垂直于G的方向和一个固定方向所作的角$\phi(0\leqslant\phi\leqslant 2\pi)$以及$G$从原点$O$的距离$p(0\leqslant p)$。坐标$p,\phi$是从原点到直线的垂足的极坐标。这样$G$的方程是(图3.1)

$$x\cos\phi + y\sin\phi - p = 0. \tag{3.1}$$

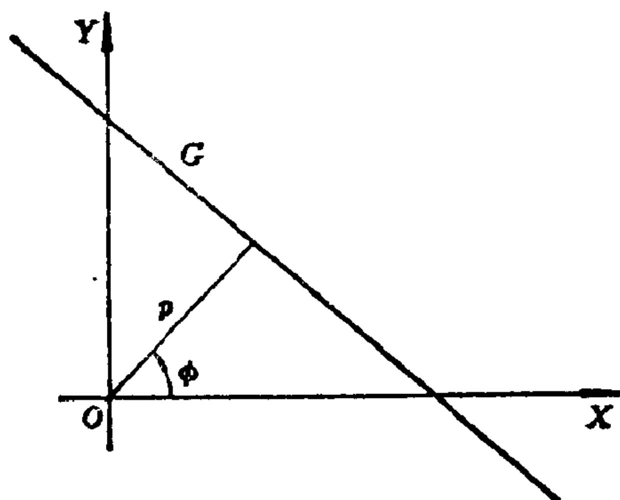


图 3.1

一个直线集合X的测度可以用任意具有象

$$m(X) = \int_X f(p,\phi)\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}\phi \tag{3.2}$$

那样的积分来确定，其中f必须遵照某些联系到问题性质的判别标准(或判准)来确定．在积分几何学和几何概率论里，所选的判准要求测度在运动群$\mathfrak{M}$下不变。

经过一个运动 $u(2.1)$，直线(3.1)变成

$$x\cos(\phi-\alpha)+y\sin(\phi-\alpha)-(p-a\cos\phi-b\sin\phi)=0.$$

和(3.1)比较，可见在运动 $u(a,b,\alpha)$ 下，G 的坐标 p,ϕ 按照

$$p'=p-a\cos\alpha-b\sin\alpha,\qquad \phi'=\phi-\alpha \tag{3.3}$$

而变换，故 $dp\wedge d\phi=dp'\wedge d\phi'$。变换了的集合 $X'=uX$ 的测度是

$$\begin{aligned}m(X')&=\int_{X'}f(p',\phi')dp'\wedge d\phi'\\&=\int_X f(p-a\cos\alpha-b\sin\alpha,\phi-\alpha)dp\wedge d\phi.\end{aligned} \tag{3.4}$$

若对于任意集合 X，要求 $m(X)=m(X')$，则由 (3.2) 和 (3.4)得$f(p-a\cos\phi-b\sin\phi,\phi-\alpha)=f(p,\phi)$，而由于这个等式对于一切运动 u 成立，就得 $f(p,\phi)=$ 常数。选这个常数为1，就得：

直线 $G(p,\phi)$的一个集合的测度，用微分齐式

$$dG=dp\wedge d\phi \tag{3.5}$$

在该集合上的积分来确定，这个微分齐式叫做**直线集合(或线集)的密度**。

除了一个常数因子外，这是在运动下不变的唯一密度。密度(3.5)将总是取绝对值。

我们将给出密度(3.5)的一个直接应用。设D为平面里具有面积F的一个区域，G为和D相交的一条直线。对(3.5)两边乘以弦 $G\cap D$ 的长 σ，并对一切直线G取积分，则因子 σdp 为D的面积元素，对于任意固定的 $\phi(0\leqslant\phi\leqslant2\pi)$，对 dp 的积分是面积 F，故

$$\int_{G\cap D\neq\varnothing}\sigma dG=\pi F. \tag{3.6}$$

dG 的其他形式。 若直线G用不同于 p,ϕ 的其他坐标确定，则 dG 的形式也不同，这些其他形式可以通过简单的坐标变换得

到。

(a) 若确定G时，用的是它和x轴所作的角θ以及它和x轴交点的横坐标x(图3.2)，则

$$p = x\sin\theta, \qquad \phi = \theta - \pi/2,$$

因而

$$dG = \sin\theta dx \wedge d\theta. \tag{3.7}$$

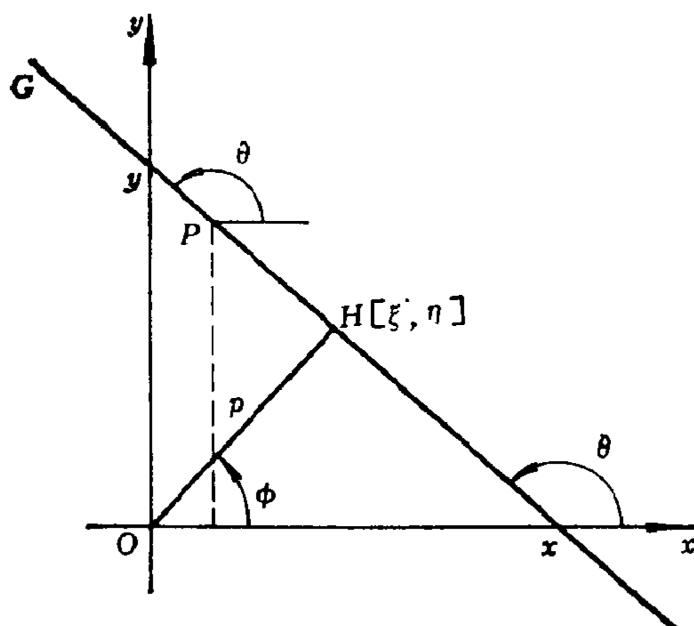


图 3.2

(b) 若G用它在坐标轴上的截距确定，则

$$p = xy(x^2 + y^2)^{-1/2}, \qquad \phi = \text{arc tan}(x/y),$$

因而

$$dG = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx \wedge dy. \tag{3.8}$$

(c) 若G用写成形状$ux + vy + 1 = 0$的方程中的系数u, v确定，则在(3.8)中，有

$$x = 1/u, \qquad y = -1/v,$$

因而

$$dG = \frac{du \wedge dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}. \tag{3.9}$$

(d) 若G用从原点到它的垂足的坐标ξ,η确定，则

$$\xi = p\cos\phi, \qquad \eta = p\sin\phi,$$

因而

$$dG = \frac{d\xi \wedge d\eta}{(\xi^2+\eta^2)^{1/2}}. \tag{3.10}$$

(e) 设$P(x,y)$为G的一点，而θ为G和x轴所作的角。则有

$$p = x\sin\theta - y\cos\theta, \qquad \phi = \theta - \frac{\pi}{2},$$

因而

$$dG = \sin\theta dx \wedge d\theta - \cos\theta dy \wedge d\theta. \tag{3.11}$$

一切这些dG的表达式都必须考虑它的绝对值，因为我们把一切密度看作是正的。

2. 和凸集或曲线相交的直线

我们来求和一个有界凸集K相交的线集的测度。取一点$O \in K$为原点，而设$p = p(\phi)$为K相对于O的撑函数。应用(3.5)和(1.6)，就得

$$m(G; G \cap K \neq \varnothing) = \int_{G \cap K \neq \varnothing} dp \wedge d\phi = \int_0^{2\pi} p d\phi = L, \tag{3.12}$$

其中L为∂K(K的周长)的长。于是有：

和一个有界凸集K相交的线集的测度等于K的周长。

用几何概率的术语表达，我们就有：

设K为有界凸集，K_1为含在K里的凸集。若已知随机直线G和K相交，则它和K_1相交的概率是$p = L_1/L$，其中L, L_1依次为K, K_1的周长。

由(3.12)和(3.6)，还可以推得一条随机直线被一个凸集K所截的弦长的平均值

$$E(\sigma) = \pi F/L, \tag{3.13}$$

其中 F 为 K 的面积，L 为其周长。

设 C 为平面上一条逐段可微分的曲线，具有有限长 L。设 G 用方程

$$x = x(s), \qquad y = y(s) \tag{3.14}$$

确定，其中 s 为弧长。设 G 为和 C 相交的直线，交点为 x, y，G 和曲线在这一点的切线作 θ 角。坐标 s, θ 确定直线 G，我们要用 s, θ 来表达 $\mathrm{d}G$。我们有

$$\phi = \theta + \tau - (\pi/2), \tag{3.15}$$

其中 τ 是 C 的切线和 x 轴所作的角。

由于 x, y 是 G 的点，我们有 $p = x\cos\phi + y\sin\phi$，因而

$$\mathrm{d}p = \cos\phi\,\mathrm{d}x + \sin\phi\,\mathrm{d}y + (-x\sin\phi + y\cos\phi)\mathrm{d}\phi.$$

但

$$\mathrm{d}x = \cos\tau\,\mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}y = \sin\tau\,\mathrm{d}s,$$

故

$$\mathrm{d}p = \cos(\phi - \tau)\mathrm{d}s + (-x\sin\phi + y\cos\phi)\mathrm{d}\phi.$$

取和 $\mathrm{d}\phi$ 的外积，得

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}\phi = \cos(\phi - \tau)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\phi,$$

而根据(3.15)，由于 $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\theta + \tau'\mathrm{d}s$，就得

$$\mathrm{d}G = |\sin\theta|\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\theta, \tag{3.16}$$

其中用了 $|\sin\theta|$，因为一切密度都是正的。

现在对一切和 C 相交的直线取(3.16)两边的积分。在右边我们有

$$\int_0^L \mathrm{d}s \int_0^\pi |\sin\theta|\mathrm{d}\theta = 2L,$$

而在左边，每一条直线和 C 有多少交点就计算多少次。设这个数目为 n，则有

$$\int n\,\mathrm{d}G = 2L, \tag{3.17}$$

其中积分范围是平面上一切直线，对于和C不相交的直线，$n=0$。$n=2$时，我们再次得(3.12)。

我们对于逐段可微分的曲线证明了(3.17)，但它对于任意可求长曲线都成立[377,51]。(3.17)左边可以作为一个点的连续统的长的定义，叫做连续统的 Favard 长[172,604]。把(3.17)的积分作为 Lebesgue 积分而不作为 Riemann 积分的重要性见[171]。

公式(3.17)可以用来度量曲线的长.遵照Steinhaus[625,626]的办法，我们进行如下。在一张透明的材料上，画一族等距离的平行线$G_i(i=1,2,\cdots)$.把它铺在要量长度的曲线弧C上。设C和G_i交于n_i个点，$s_0=\sum n_i$为交点的总数.令透明片作转角$(k/m)\pi$ $(k=0,1,\cdots,m-1)$，就得s_i个交点，而令总和$N=\sum_0^{m-1}s_k$。设a为G_i和G_{i+1}之间的距离，就得

$$\frac{N\pi a}{2m} \tag{3.18}$$

作为C的长的近似值$\left(\text{因为它是}\frac{1}{2}\int n dG\text{的近似值}\right)$。(3.18)的准确度与$a$和$m$有关。当$a\to 0$，$m\to\infty$时，(3.18)趋于$C$的长。Moran 估计了用这个方法产生的误差[427]。

3. 同两个凸集相交或把它们隔开的直线

设K_1,K_2为平面里两个有界凸集，L_1,L_2为它们边界∂K_1，∂K_2的长。

$K_1\cup K_2$的凸包(一个点集的凸包是含该点集在内的一切凸集的交集)的边界称为K_1和K_2的外壳[①] C_e。根据直觉，可以认为，这个外壳用一条围绕K_1和K_2的弹性闭线来表现(图3.3)。设L_e为C_e的长。若$K_1\cap K_2=\varnothing$，象图3.3那样，K_1和K_2还有一个内壳[②] C_i，它用一条围绕K_1和K_2而在K_1,K_2之间的一点O交叉

① Exterior cover.——译者
② Interior cover.——译者

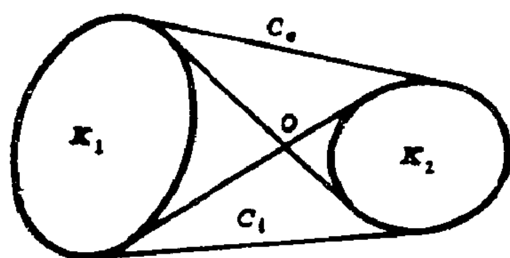


图 3.3

的弹性闭线来表现。设 L_i 为 C_i 的长。

尽管 $\partial K_1, \partial K_2, C_e, C_i$ 有公共弧，我们把它们看成不同的曲线。$\partial K_1, \partial K_2, C_e$ 的撑线属于测度为零的一个点集，除了这些之外，同 K_1 和 K_2 相交的每一条直线都同曲线 $\partial K_1, \partial K_2$ 和 C_e 各有两个交点，而同 C_i 有四个交点；故共有十个交点。设 m_{10} 为这个线集的测度。

和 K_1 或 K_2 相交但和它们不同时相交的直线同曲线 $\partial K_1, \partial K_2, C_i, C_e$ 有六个公共点；设 m_6 为这个线集的测度。把 K_1 和 K_2 隔开的直线同上述曲线有四个公共点(同 C_e, C_i 各有两个公共点)；设 m_4 为这个线集的测度。

由于同一个凸集相交的直线的集合的测度等于它的周长，同 K_1 相交但不同 K_2 相交，或同 K_2 相交但不同 K_1 相交的直线集合的测度 m_6', m_6'' 是

$$m_6' = L_1 - m_{10}, \qquad m_6'' = L_2 - m_{10}, \tag{3.19}$$

因而

$$m_6 = L_1 + L_2 - 2m_{10}. \tag{3.20}$$

由于 C_e 是一个闭凸线，

$$m_4 + m_6 + m_{10} = L_e, \tag{3.21}$$

而把(3.17)应用于四条曲线 $\partial K_1, \partial K_2, C_i, C_e$ 所构成的整体，又得

$$4m_4 + 6m_6 + 10m_{10} = 2(L_1 + L_2 + L_e + L_i). \tag{3.22}$$

由(3.19)—(3.22)，得

$$\begin{aligned} &m_4 = L_i - (L_1 + L_2), \qquad m_6' = L_1 - (L_i - L_e), \\ &m_6'' = L_2 - (L_i - L_e), \qquad m_{10} = L_i - L_e. \end{aligned} \tag{3.23}$$

用文字叙述，就是：

(a) 同 K_1 和 K_2 相交的一切直线的测度是 $L_i - L_e$。

(b) 同 K_1 相交但不同 K_2 相交的直线集合的测度是 $L_1-(L_i-L_e)$，同 K_2 相交但不同 K_1 相交的直线集合的测度是 $L_2-(L_i-L_e)$。

(c) 把 K_1 和 K_2 隔开的直线集合的测度是 $L_i-(L_1+L_2)$。

上面我们假定了 $K_1 \cap K_2 = \varnothing$。若它们有重叠处，只须令 $L_i = L_1 + L_2$，(a)—(c)诸结果仍然正确。

用几何概率的术语，这些结果可以叙述如下，

设 K_1 和 K_2 为两个有界凸集。若 G 为在平面里随意选取，但同 K_1 和 K_2 的凸包相交的直线，则：

(a) G 同 K_1 和 K_2 相交的概率是

$$p(G \cap K_1 \neq \varnothing, G \cap K_2 \neq \varnothing) = (L_i - L_e)/L_e.$$

(b) G 同 K_1 相交，但不同 K_2 相交的概率是

$$p(G \cap K_1 \neq \varnothing, G \cap K_2 = \varnothing) = 1 - \frac{L_i - L_1}{L_e},$$

同样，

$$p(G \cap K_1 = \varnothing, G \cap K_2 \neq \varnothing) = 1 - \frac{L_i - L_2}{L_e}.$$

(c) G 把 K_1 和 K_2 隔开的概率是

$$p(G \cap K_1 = G \cap K_2 = \varnothing, G \cap C_e \neq \varnothing) = \frac{L_i - (L_1 + L_2)}{L_e}.$$

若 $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$，在上面公式中，须令 $L_i = L_1 + L_2$。若只考虑和 K_1 相交的直线，则采取类似论点，我们得下面的结果。

若 K_1 和 K_2 为平面里两个有界凸集(不论它们是否有重叠)，则 K_1 的一条随机弦和 K_2 相交的概率是

$$p = (L_i - L_e)/L_1,$$

其中，当 $K_1 \cap K_2 = \varnothing$ 时，L_i 为内壳长，而当 $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$ 时，L_i

$=L_1+L_2$。

上面的结果是 Sylvester[665a]的工作，他还考虑了多于两个凸集的情况。关于一条可求长曲线 C 和一条随机直线的交点数的分布(即：对于每一个 k，G 和 C 有 k 个交点的概率)，人们所知甚少(见 Sulanke[662]和 Ambercumjan[6])。

4. 几何应用

(1) 设 C 为属于 C^2 类的平面闭曲线，它是有向的，即具有指定了的走向。设 s 为 C 的弧长，$\tau(s)$ 表示 C 的切线和一个固定方向，例如 x 轴，所作的角。C 的曲率是 $k=d\tau/ds$ 而绝对总曲率由率则用积分

$$c_a=\int_C|\kappa|ds=\int_C|d\tau| \tag{3.24}$$

确定。

设 $\nu(\tau)$ 表示 C 的无向切线中平行于方向 τ 的个数(例如在图 3.4 里，$\nu=6$)。由于在(3.24)右边的积分里每一个方向 ν 出现 $\nu(\tau)$ 次，方程(3.24)可以写成

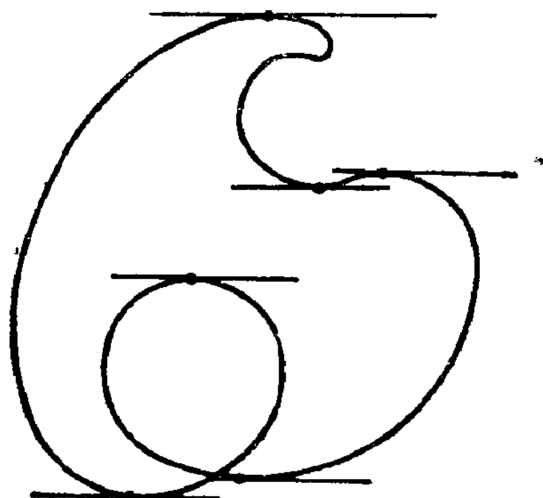


图 3.4

$$c_a=\int_0^\pi\nu(\tau)\,|d\tau|. \tag{3.25}$$

另一方面，若直线 G 平行于方向 ν 而和 C 相交于 n 点 P_i，则 C

至少有 n 条平行于 G 的切线（在每个弧 $P_1P_2, P_2P_3, \cdots, P_{n-1}P_n$, P_nP_1上至少有一条），因而$n(\tau)\leqslant\nu(\tau)$。利用（3.17），有

$$2L=\int_{G\cap C\neq\varnothing} n\mathrm{d}G\leqslant\int_{G\cap C\neq\varnothing}\nu\mathrm{d}G=\int_{G\cap C\neq\varnothing}\nu\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant\Delta_m\int_0^{\pi}\nu|\mathrm{d}\tau|=\Delta_m c_a, \tag{3.26}$$

其中 L 为 C 的长而Δ_m是最大幅度。

特殊地，若 C 在一个半径为 r 的圆内，则 $\Delta_m\leqslant 2r$，因而有下面的 Fáry定理[169]：

若一条长度为 L 全曲率为 c_a 的平面闭曲线可以含在半径为 r 的圆内，则 $L\leqslant rc_a$。

(2) 设 K 为有界凸集，面积为 F，周长为 L．设G，G' 为两条直线，它们和 ∂K 相交的点对应于弧长s,s'。用θ,θ'表示G,G'在它们同边界 ∂K的交点和撑线所作的角，σ,σ' 为G,G'被K 所截的弧长（如图3.5）。考虑积分

$$I=\int(\sigma\sin\theta'-\sigma'\sin\theta)^2\mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}s'\wedge\mathrm{d}\theta', \tag{3.27}$$

积分范围为 $0\leqslant s\leqslant L$, $0\leqslant s'\leqslant L$, $0\leqslant\theta,\theta'\leqslant\pi$。按照（3.16），$\sin\theta\mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}G$, $\sin\theta'\mathrm{d}s'\wedge\mathrm{d}\theta'=\mathrm{d}G'$。现在

$$\int_0^{\pi}\sigma^2\mathrm{d}\theta=2F,\qquad\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi/2, \tag{3.28}$$

其中第一个积分是根据极坐标里的面积公式。关于G'，有类似的公式。故

$$I=2\pi L^2F-2\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma\mathrm{d}G\int_{G'\cap K\neq\varnothing}\sigma'\mathrm{d}'G'=2\pi F(L^2-4\pi F),$$

在这里我们应用了(3.6)，并且注意到在积分(3.27)里，每条线G,G'都计算了两次，对每个和∂K的交点计算一次。

但显然 $I\geqslant 0$，于是已经证明了经典的等周不等式

$$L^2-4\pi F\geqslant 0。 \tag{3.29}$$

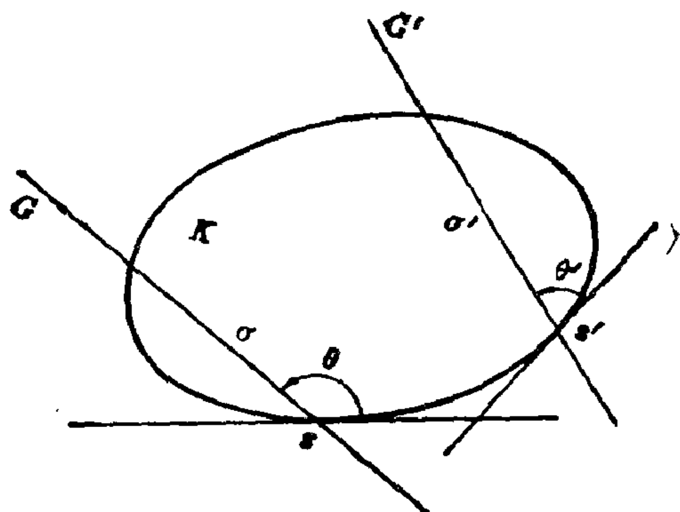


图 3.5

若$I=0$,等号成立.这时$\sigma/\sin\theta=\sigma'/\sin\theta'$,表明$K$为一个圆。这个证明是Blaschke的[38]。

（3）设一条长度为L的曲线含在一条长度为L_1的闭凸线内。若考虑一切和C_1相交的直线G，这些直线和C的交点数的平均值为$E(n)=2L/L_1$。由于必然存在着和C交点数不少于$E(n)$的直线G,就有：若一条长度为L的曲线位于一条长度为L_1的闭凸线内,则存在着和它至少交于$2L/L_1$点的直线。

5. 注记与练习

（1）关于凸线的等周不等式的又一证明．设C为属于C^1类的一条闭凸线．设A_1, A_2为C同直线$G(p,\phi)$的交点，ds_1, ds_2为C在A_1, A_2的弧元，θ_1, θ_2为G同C在A_1, A_2的切线所作的角．容易看出．

$$\sigma dG=\sin\theta_1\sin\theta_2 ds_1\wedge ds_2, \tag{3.30}$$

其中σ为弦A_1A_2的长．对一切和C相交的有向直线取积分，得

$$2\pi F=\int_L ds_1\int_L \sin\theta_1\sin\theta_2 ds_2$$

$$=\frac{1}{2}\int_L ds_1\int_L[\cos(\theta_1-\theta_2)-\cos(\theta_1+\theta_2)]ds_2.$$

积分$\int_L \cos(\theta_1+\theta_2)ds_2$等于$C$在该曲线在$A_1$的切线的射影，因

而等于零。于是有

$$4\pi F = L^2 - 2\int_L ds_1 \int_L \sin^2 \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) ds_2, \qquad (3.31)$$

这包含等周不等式 $L^2 - 4\pi F \geqslant 0$。这个证明是 Pleijel[479]的。

一个更带普遍性的结果可以从公式

$$\int_{G\cap C\neq\varnothing} \sigma^n dG = \frac{n}{2}\int_L\int_L \sigma^{n-1}\cos\theta_1\cos\theta_2 ds_1 \wedge ds_2,$$

$$\int_{G\cap C\neq\varnothing} \sigma^n dG = \frac{1}{2}\int_L\int_L \sigma^{n-1}\sin\theta_1\sin\theta_2 ds_1 \wedge ds_2$$

推得。它们给出下面的 Ambarcumjan 公式[7]（对于任意 $n>0$）：

$$2(n+1)\int_{G\cap C\neq\varnothing} \sigma^n dG$$

$$= n\int_L\int_L \sigma^{n-1} ds_1 \wedge ds_2 - 2n\int_L\int_L \sigma^{n-1}\sin^2\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) ds_1 \wedge ds_2.$$

当$n=1$时，它给出等周不等式。

由此，可以推得

$$\int_{G\cap C\neq\varnothing} \sigma^n dG \leqslant \frac{n}{2(n+1)}\int_L\int_L \sigma^{n-1} ds_1 \wedge ds_2. \qquad (3.32)$$

$n=1$时，由此即得等周不等式。

Banchoff 与 Pohl [20] 把 Pleijel 的证明推广到非简单曲线。那时，曲线把平面分割成若干块，每块面积附加一个权，等于其回转数，这些加权面积和取代了F，即

$$L^2 - 4\pi\int \omega^2 dP \geqslant 0,$$

其中积分范围是整个平面.所谓P点相对于曲线的回转数① $\omega(P)$就是当一点X绕曲线一周时,矢量PX绕P点转动的周数.当曲线为圆或绕几次的圆时，而且只在此时，等式成立。Banchoff 与 Pohl 还把这个等周不等式推广到任意维和任意余维，见第14章第7节注记8。

① Linking number。——译者

（2）两条曲线的距离。设C_1和C_2为平面里两条曲线，令$N_1(G)$，$N_2(G)$表示它们和一条动直线G的交点数。在整个平面上取积分

$$(C_1,C_2)=\frac{1}{2}\int|N_1(G)-N_2(G)|dG, \tag{3.33}$$

并把它叫做C_1，C_2的距离。

若C_1和C_2为可求长曲线，距离(C_1,C_2)是有穷的，因为$(C_1,C_2)\leqslant L_1+L_2$。证明这样确定的距离满足条件：

(a) $(C_1,C_1)=0$；

(b) $(C_1,C_2)=(C_2,C_1)$；

(c) $(C_1,C_2)+(C_2,C_3)\geqslant(C_1,C_3)$。

若C_1，C_2为 Jordan 曲线（即一个线段或圆的同胚象），则由$(C_1,C_2)=0$可得$C_1=C_2$。有了这些定义之后，证明：

(a) 若C_1和C_2是闭凸线，而C_1在C_2内，则$(C_1,C_2)=L_2-L_1$；

(b) 若C_1，C_2为闭曲线，而且C_1在C_2外，则$(C_1,C_2)=L_1+L_2-2(L_i-L_e)$，其中$L_i$，$L_e$为$C_1$，$C_2$的内壳和外壳长（第三节）（见[625]）。

（3）凸线的非对称值。已给具有长度L的曲线C，设C^*为C对于一条直线G_0的反射象，则距离(C,C^*)可以称为C对于G_0的非对称值。使得非对称值(C,C^*)达到最小值的直线G_0叫做C的对称轴，而$1-\min(C,C^*)$则称为C的对称指数。这个 Steinhaus 所给的定义可以和凸线的其他对称定义比较（例如 Grünbaum[246]的定义）。

（4）m阶长度。已给一个点集C，若交集$G\cap C$含有$n\leqslant m$点，令$w_m=n$；若交点数$n>m$，令$w_m=m$。Steinhaus[625]把积分

$$L_m=\frac{1}{2}\int_{G\cdot C\neq\varnothing}w_m dG \tag{3.34}$$

称为C的m阶长度。注意若C为可求长闭曲线，则L_2为它的凸包的边界长，而L_∞为普通长。

（5）**不可分隔的凸集组。**已给平面里 n 个闭凸集$K_i(i=1,2,\cdots,n)$，若有一条直线G不和任何K_i相交，而且把平面分为两个半面，其中每个含有至少一个K_i，则这一组凸集称为**可分隔的。**在相反的情况下，这一组凸集称为**不可分隔的。**可以证明以下定理：设$K_i(i=1,2,\cdots,n)$为一组不可分隔的凸集，而K_0为它们的凸包。用L_i,D_i,R_i依次表示K_i的外接圆的周长，直径和半径，则

$$L_0\leqslant\sum_1^n L_i,\quad D_0\leqslant\sum_1^n D_i,\quad R_0\leqslant\sum_1^n R_i.$$

(见 Hadwiger[266]，A.W.Goodman 与 R.E.Goodman[233].)

（6）**经过反射和折射密度的不变性。**假定直线G是光射线的轨道，它射到一条固定曲线C上而按照反射定律被反射：即反射角等于入射角。这样，若θ为直线G同C的切线所作的角，则切线同反射线G^*所作的角是$\theta^*=-\theta$（图3.6），而利用dG的表达式(3.16)，就有$dG=dG^*$（按绝对值）。因此，经过反射，密度dG不变。

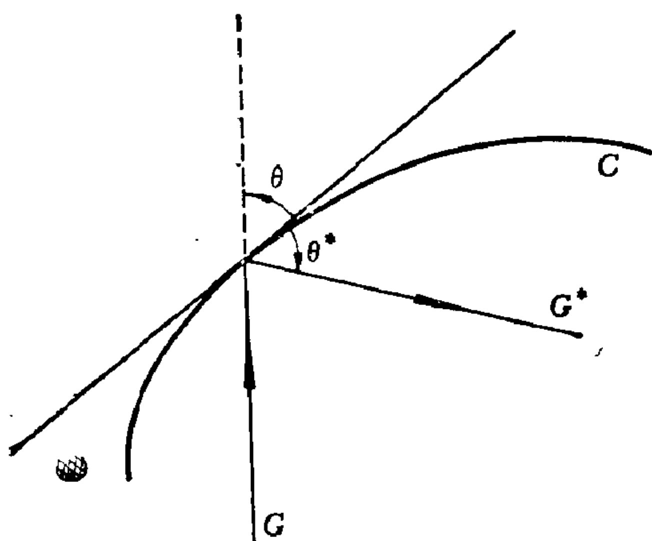


图 3.6

假定曲线C把两个介质隔开，它们的折射指数依次是n_1和n_2（图3.7）。若i_1和i_2依次为入射角和折射角，则光学中经典的Snell定律指出

$$\sin i_1/\sin i_2=n_2/n_1.$$

另一方面，切线和入射线 G_1所作的角是 $\theta_1=\pi/2-i_1$而切线和折射线 G_2所作的角是 $\theta_2=\pi/2-i_2$，因此，利用(3.16)，就得

$$
\begin{aligned}
dG_1 &= -\cos i_1 ds\wedge di_1 = -ds\wedge d(\sin i_1),\\
dG_2 &= -\cos i_2 ds\wedge di_2 = -ds\wedge d(\sin i_2)\\
&= -(n_1/n_2)ds\wedge d(\sin i_1)=(n_1/n_2)dG_1.
\end{aligned}
$$

因此，当光线从折射指数为n_1的介质到折射指数为n_2的介质时，密度 dG乘以常数因子 n_1/n_2。

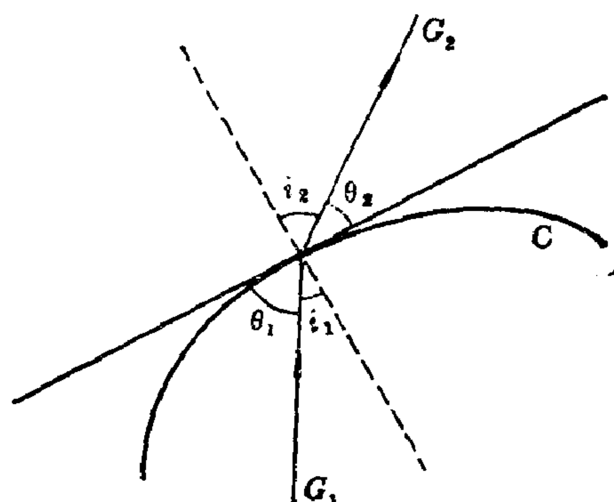


图 3.7

考虑一个含有几种介质的光学装置，这些介质的折射指数是$n_1, n_2, \cdots, n_m$，但光线入射时的第一介质和光线最后出现的介质相同，即 $n_1=n_m$。我们有

$$
\begin{aligned}
dG_m &= (n_{m-1}/n_m)dG_{m-1}\\
&= (n_{m-1}n_{m-2})/(n_m n_{m-1})dG_{m-2}\\
&= \cdots = (n_{m-1}\cdots n_1)/(n_m n_{m-1}\cdots n_2)dG_1 = dG_1.
\end{aligned}
$$

因此，通过光学装置传播时，光线密度不变[40]。

（7）G.D Birkhoff的凸台球桌．设 C 为平面里一条闭凸曲线．假定一点 P 在 C 内部运动而和 C 相撞时，按照“入射角等于反射角”的定律继续运动．P的轨道决定于弧 OA 的长 s（O 是C上任意选定的点）和直 $G\equiv AP$同 C 在 A 的切线所作的角 α($0\leqslant\alpha\leqslant$

π)(图3.8)。按照(3.16)，直线的密度可以写成 $dG = \sin a ds \wedge da$，而由于这个密度经过反射不变，可知微分齐式 $\sin a ds \wedge da$ 在 P 的运动中不变(见Birkhoff的书[31]以及 Arnold与Avez[13])。

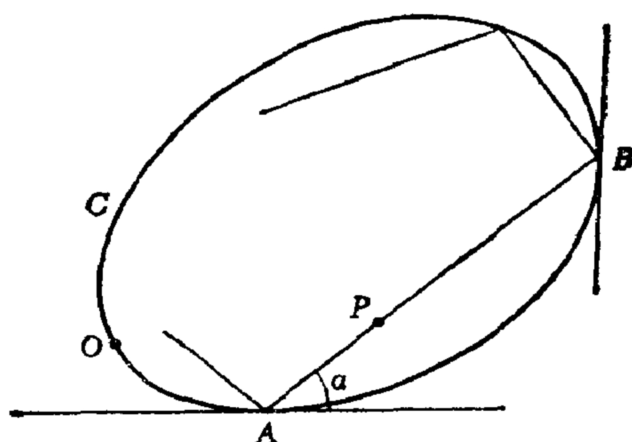


图 3.8

（8） Feller的一个不等式。设 D 为平面里含于幺圆内的区域，其面积等于 F。假定任意直线和 D 的交集的测度不超过一个常数 $a<1$。则必然有 $F<2a$。这在下面意义 F 是可能的最好结果：那就是，已给任意小的 $\varepsilon>0$，存在着一个区域，它和任意直线的交集的总长不超过 a，而它的面积 $F>2a\ (1-\pi^{-2}a^2-\varepsilon)$ (见[184])，其中 ε 的值任意小。Ueno及其合作者[682]和Santalo[563]把这结果推广到球体以及非欧空间。若 D 是凸集，就有 $F\leqslant\pi a^2/4$，其中等号在 D 为圆时成立，而且只是这时才成立[30a]。

（9） 一个积分公式。设 C 由 m 段弧构成的闭凸曲线，它的长是 L，各段弧长分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_m$(图3.9)。设 A_1, A_2 为一条直线 G 同 C 的交点，σ 为弦 A_1A_2 的长，θ_1, θ_2 为 G 同 C 在 A_1, A_2 的撑线所作的角。则有下面公式

$$\int_{G\cap\sigma\neq\varnothing}\frac{\sigma}{\sin\theta_1\sin\theta_2}dG=\frac{1}{2}\left(L^2-\sum_1^m a_i^2\right). \qquad (3.35)$$

（10） 平面线性图。Sulanke[622]考虑了下面一种问题。一个线性图是由有限多个点(顶点)和有限多个曲线段(边，假定是可

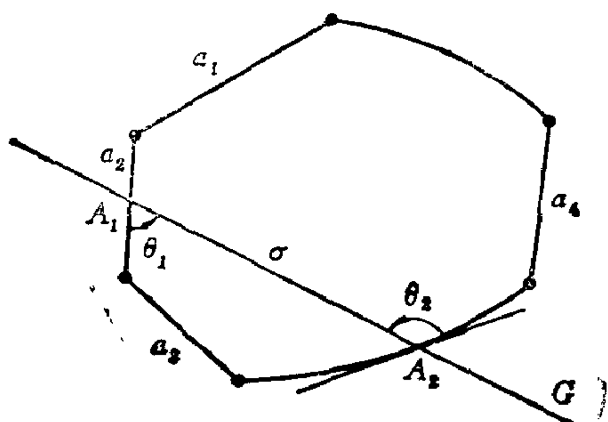


图 3.9

求长的)所构成，每一条边连结两个顶点，任意两边没有公共内点，而每个顶点是至少一条边的端点。对于每一个图Q，规定一组实数$P_i(Q)(i=1,2,\cdots)$，等于一条随机直线和Q相交于恰好i点的概率。

定理 一个直线图是Euler图(这种图的特征是，存在着一条通过每条边恰好一次的运行路线，它过每个顶点，而且始点和终点相同)的一个充要条件是，对于一切奇数i，$p_i=0$。

具有令$p_i>0$的同一组自然数$\{i_1,i_2,\cdots,i_N\}$的图称为同类。提出的问题是，是否对于每一组自然数$i_1<i_2<\cdots<i_N$，总有一个线性图。对于$i_N\leqslant 5$，Sulanke解决了这个问题，但$\{1,2,5\}$和$\{1,4,5\}$是例外。最近Hristov证明$\{1,2,5\}$这一类不存在(M.R.50, #8295)。

设Q为线性图，G的随机直线。在G上取G和Q的交集$G\cap Q$里的第一和最后点的线段s_G,则$Q+s_G$也是线性图.设c为Q分隔平面时所形成的有界区域(图的面)的个数，c_G为对于图$Q+s_G$的相应数。这样，若假定Q是连通的，则c_G的期望值是$c-1+2L(Q)/L(Q^*)$，其中$L(Q)$是Q的总长而$L(Q^*)$为Q的凸包长。

用$N_G(Q)$表示一条直线G和Q的交点数，则$m(G;N_G(Q))\neq N_G(Q')$表示交点数$N_G(Q)$和$N_G(Q')$不相等的直线G的集合的测度。这时，在图空间里，$\rho(Q,Q')=m(G;N_G(Q))\neq N_G(Q')$

确定一个度量。可与注记2的距离相比较。见[662]。

(11) **一种平均自由路**。设平面里分布了薄片，每单位面积里薄片密度是D个，其平均面积为F_0，平均周长为L_0，则通过平面的平均自由路是

$$E(\sigma)=(1-F_0D)/L_0D.$$

若薄片为半径等于r的圆片，则

$$E(\sigma)=(1-\pi r^2D)/2\pi rD,$$

而当r很小时，这个值可以用$1/2\pi rD$迫近。

在空间E_3里，设随机地均匀分布了质点，其密度是每单位体积D个，质点的平均体积是v，平均表面积是f，则对于一个动点，平均自由路是$E(\sigma)=4(1-vD)/fD$。当质点小时，可以取$E(\sigma)=4(fD)^{-1}$.

Polya[486]用下面方式来说明平均自由路。考虑一个树林，其中树木是随机地均匀分布的，密度是每单位面积D棵，树木半径是r，则作为平面平均自由路是从树林中一点平均可见距离。在空间，则平均自由路是在随机地均匀分布的，平均密度为D的，雪花丛中的平均可见距离。Santalo考虑了路线属于一种已知类型的情况。

练习1 设AB为长度等于L的凸弧，L_0为线段AB长，它们构成一个凸集的边界。证明：一条和这个凸集相交的随机直线和弦AB相交的概率是$2L_0/(L+L_0)$。

练习2 若已知一条随机直线和已给正方形的一边相交，证明它也和对边相交的概率是$p=\sqrt{2}-1$。

练习3 若已知一条随机直线和已给正方形的一条对角线相交，证明它和另一条对角线相交的概率是$p=2-\sqrt{2}$。

练习4 在一条长度为L的闭凸线C里，设有m条凸线C_i，其长为$L_i(i=1,2,\cdots,m)$(图3.10)。证明：存在着直线，它们和k条C_i相交，而k等于或大于$(\sum L_i)/L$的整数部分。

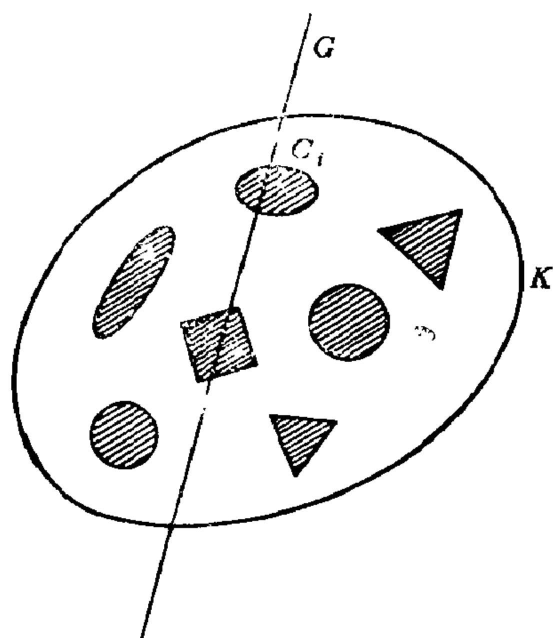


图 3.10

练习5 设K_0，K_1为两个凸集，$K_1 \subset K_0$。和K_0相交的n条随机直线同K_1没有公共点的概率是$(1-L_1/L_0)^n$，其中L_0，L_1为K_0，K_1的周长。较困难是下面的问题：假定n条随机直线和K_0相交，求一个和K_1全等的凸集可以放在K_0内而不和任何所给直线相交的概率。考虑K_1为一条线段或圆的情况。

第四章　点偶和线偶

1.　点偶密度

一对点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 可以用四个坐标 x_1,y_1,x_2,y_2 确定，也可以用它们联线 G 的坐标 p,ϕ 和由 P_1,P_2 到 H 的距离 t_1,t_2 来确定，其中 H 为坐标原点 O 到 G 的垂足(图4.1)。我们要用坐标 p,ϕ,t_1,t_2 来表示外积 $dP_1\wedge dP_2=dx_1\wedge dy_1\wedge dx_2\wedge dy_2$。我们有

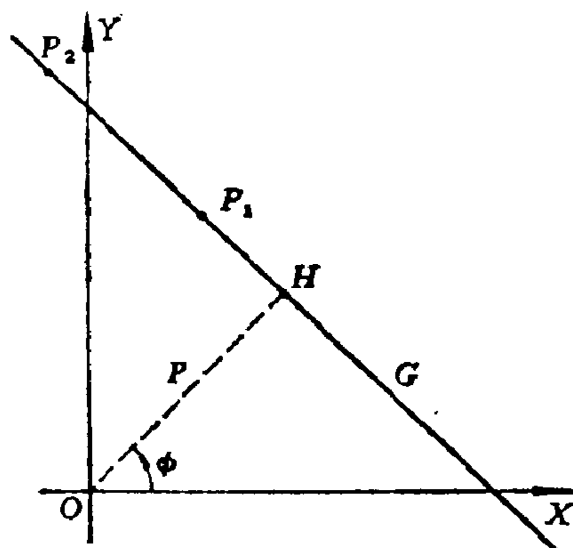


图　4.1

$$x_i=p\cos\phi-t_i\sin\phi,\qquad y_i=p\sin\phi+t_i\cos\phi\quad(i=1,2)\qquad(4.1)$$

故

$$dx_i=\cos\phi dp-(p\sin\phi+t_i\cos\phi)d\phi-\sin\phi dt_i,$$
$$dy_i=\sin\phi dp+(p\cos\phi-t_i\sin\phi)d\phi+\cos\phi dt_i,$$

因而通过取外积，得

$$dP_i=dx_i\wedge dy_i=p dp\wedge d\phi+dp\wedge dt_i-t_i d\phi\wedge dt_i\quad(i=1,2)$$

以及

$$dP_1\wedge dP_2=(t_2-t_1)dp\wedge d\phi\wedge dt_1\wedge dt_2.$$

由于 $dp\wedge d\phi=dG$，这可以写为

$$dP_1 \wedge dP_2 = |t_2 - t_1| dG \wedge dt_1 \wedge dt_2, \tag{4.2}$$

其中我们取了 $t_2 - t_1$ 的绝对值，因为一切密度都假定为正的。

2. 凸集的弦幂积分

设K为平面有界凸集，而σ为直线G上K的弦长。考虑积分

$$I_n = \int_{G \cap K \neq \varnothing} \sigma^n dG, \qquad J_n = \int_{P_1, P_2 \in K} r^n dP_1 \wedge dP_2, \tag{4.3}$$

其中n为整数而r为属于K的点P_1, P_2间的距离。

为了求I_n和J_n的关系，我们利用(4.2)，并注意$|t_1 - t_2| = r$。我们得

$$\begin{aligned} J_n &= \int |t_2 - t_1|^{n+1} dt_1 \wedge dt_2 \wedge dG \\ &= \int dG \wedge dt_1 \left[\int_{t_1}^{b} (t_2 - t_1)^{n+1} dt_2 + \int_{a}^{t_1} (t_1 - t_2)^{n+1} dt_2 \right] \\ &= \frac{1}{n+2} \int dG \int_a^b \left[(b - t_1)^{n+2} + (t_1 - a)^{n+2} \right] dt_1 \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+3)} \int_{G \cap K \neq \varnothing} (b-a)^{n+3} dG, \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中a, b表示对应于σ的端点的t值，因而$b - a = \sigma$。于是有结果

$$J_n = \frac{2}{(n+2)(n+3)} I_{n+3}, \tag{4.5}$$

这公式在$n = -1, 0, 1, 2, \cdots$时成立。公式(4.5)可以写成

$$I_n = \frac{n(n-1)}{2} J_{n-3}, \tag{4.6}$$

这在$n = 2, 3, 4, \cdots$时成立。当$n = 0, 1$时，利用(3.6)和(3.12)，得

$$I_0 = L, \qquad I_1 = \pi F, \tag{4.7}$$

其中L为K的周长，F为其面积。

$n=2$时，(4.3)和(4.6)化为

$$I_2=\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma^n\mathrm{d}G=\int_{P_1,P_2\in K}\frac{\mathrm{d}P_1\wedge\mathrm{d}P_2}{r}. \tag{4.8}$$

$n=3$时，由于$J_0=F^2$，公式(4.6)化为

$$I_3=\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma^3\mathrm{d}G=3F^2, \tag{4.9}$$

这是 Crofton[133]所得到的一个值得注意的公式。

$n=4$时，若用$E(r)$为K中两点的平均距离，即

$$E(r)=\frac{1}{F^2}\int_{P_1,P_2\in K}r\mathrm{d}P_1\wedge\mathrm{d}P_2, \tag{4.10}$$

利用(4.6)，就得

$$I_4=\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma^4\mathrm{d}G=6F^2E(r). \tag{4.11}$$

当K为半径等于R的圆时，通过直接计算，得

$$\begin{aligned}&n\text{ 为偶数时，}I_n=\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot n}{3\cdot5\cdot\cdots\cdot(n+1)}2^{n+1}\pi R^{n+1};\\&n\text{ 为奇数时，}I_n=\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot n}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(n+1)}2^n\pi^2R^{n+1}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

积分I_n不是彼此独立的。它们满足某些不等式。例如$I_0^2-4I_1\geqslant0$就是等周不等式(3.29)。联系到这个问题，Blaschke[51]提出以下命题：求一个实数叙列构成关于一个凸集的叙列I_n的充要条件，而且当这些条件得到满足时，判断那样的凸集是否唯一的。除等周不等式以及(4.9)外，下面的必要条件是已知的[1]：

$$n=4,6,\cdots\text{时，}\quad I_n\geqslant\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot n}{3\cdot5\cdot\cdots\cdot(n+1)}2^{n+1}\pi^{-n}I_1^{(n+1)/2};$$

① 原文公式(4.13)有误，已改正。——译者

$n=5,7,\cdots$时， $I_n \geqslant \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot n}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot (n+1)} 2^n \pi^{-(n+1)} I_1^{(n+1)/2}$；

$$(4.13)$$

$$2^8 I_1^3 \geqslant 3^2 \pi^4 I_2^2, \tag{4.14}$$

对于任意的$n,k=0,1,2,\cdots$，

$$\frac{2^n I_n}{I_0^n} - \binom{k}{1}\frac{2^{n+1} I_{n+1}}{I_0^{n+1}} + \binom{k}{2}\frac{2^{n+2} I_{n+2}}{I_0^{n+2}}$$

$$+\cdots+(-1)^k \frac{2^{n+k} I_{n+k}}{I_0^{n+k}} > 0; \tag{4.15}$$

对于任意满足$0\leqslant m\leqslant n\leqslant p$的整数$m,n,p$，

$$I_{2m} I_{2n} \geqslant I_{m+n}^2, \qquad I_m^{p-n} I_p^{n-m} \geqslant I_n^{p-m}. \tag{4.16}$$

不等式(4.13)是Blaschke［35］得到的，(4.14)是Carleman［81］得到的；那里面的等式都只对于圆成立。不等式(4.15)与Hausdorff的矩问题(见Shohat与Tamarkin的书［605］)有关，并为Sulanke［659］所指出；参看［339］。不等式(4.16)容易从Schwarz与Holder的经典不等式导出。关于$G\cap K$的弦长的分布函数，即一条随机直线G和一个固定凸集K所定弦长$\leqslant x$的概率，参看Sulanke［659］和Geciauskas［217，218］。Mallows与Clark［388］证明了，这个分布函数不能确定凸集K。他们给出一例，其中两个不全等的凸集有相同的分布函数。这就部分地解答了上述Blaschke命题。这个问题与模式辨认的某些方法有关(见［443a，457，627］)。

平均距离的例. 从定义(4.10)，利用(4.11)，通过直接计算，可得一个凸集中两点的平均距离。

对于半径为R的圆：$E(r)=(128/45\pi)R$。

对于边长为a的等边三角形：

$$E(r)=\frac{3a}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\log 3\right). \tag{4.17}$$

对于一个边长为 a,b 的长方形($a\geqslant b$)：

$$E(r)=\frac{1}{15}\left[\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}+d\left(3-\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{5}{2}\left(\frac{b^2}{a}\log\frac{a+d}{b}+\frac{a^2}{b}\log\frac{b+d}{a}\right)\right], \qquad (4.18)$$

其中 d 为长方形的对角线。特殊地，对于边长为 a 的正方形，我们有

$$E(r)=(a/15)[\sqrt{2}+2+5\log(1+\sqrt{2})]=0.521a.$$

Ghosh[225]探讨了，在一个长方形内的以及两个长方形间的随机距离的分布。Fairthone[167]得到了一些其它结果。

3. 线偶密度

设 $G_i(p_i,\phi_i), i=1,2$ 为两条相交于 $P(x,y)$ 的直线，它们和 x 轴作 α_1,α_2 角。作为第一节讨论问题的"对偶"，我们将把外积 $dG_1\wedge dG_2$ 用坐标 x,y,α_1,α_2 表示。

我们有(图4.2) $\phi_i=\alpha_i-(\pi/2)$，因而

$$p_i=x\cos\phi_i+y\sin\phi_i=x\sin\alpha_i-y\cos\alpha_i \quad (i=1,2).$$

于是

$$d\phi_i=d\alpha_i,$$

$$dp_i=\sin\alpha_i dx-\cos\alpha_i dy+(x\cos\alpha_i+y\sin\alpha_i)=d\alpha_i,$$

而通过取外积，就得

$$dG_i=dp_i\wedge d\phi_i=\sin\alpha_i dx\wedge d\alpha_i-\cos\alpha_i dy\wedge d\alpha_i.$$

由此，得

$$dG_1\wedge dG_2=|\sin(\alpha_2-\alpha_1)|dp\wedge d\alpha_1\wedge d\alpha_2, \qquad (4.19)$$

这就是(4.2)的对偶公式。

作为第一个应用，我们对一切和一个有界凸集 K 相交的线偶计算(4.19)两边的积分。根据(3.12)，左边等于 L^2，其中 L 是 K 的周长。右边可以先对 K 内的点 P 积分然后对 K 外的点积分。对于 $P\in K$，我们有

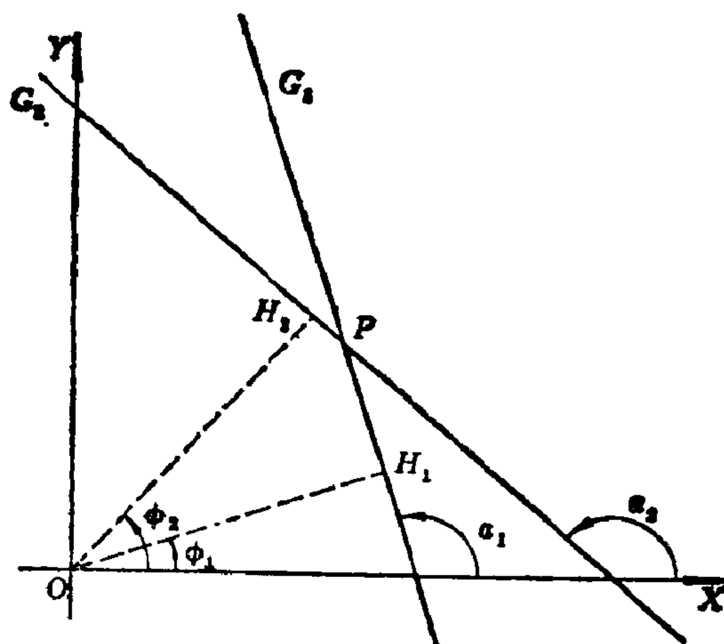


图 4.2

$$\int_{P\in K}\mathrm{d}P\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}|\sin(\alpha_2-\alpha_1)|\,\mathrm{d}\alpha_1\wedge\mathrm{d}\alpha_2=2\pi F. \tag{4.20}$$

而对于K外的点，若α和β为K经过P的撑线同x轴所作的角，则

$$\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta|\sin(\alpha_2-\alpha_1)|\,\mathrm{d}\alpha_2\wedge\mathrm{d}\alpha_1$$

$$=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\alpha_1\left(\int_\alpha^{\alpha_1}\sin(\alpha_1-\alpha_2)\mathrm{d}\alpha_2+\int_{\alpha_1}^\beta\sin(\alpha_2-\alpha_1)\mathrm{d}\alpha_2\right)$$

$$=\int_\alpha^\beta[2-\cos(\alpha_1-\alpha)-\cos(\beta-\alpha_1)]\mathrm{d}\alpha_1$$

$$=2(\beta-\alpha)-2\sin(\beta-\alpha). \tag{4.21}$$

若令 $\omega=\beta-\alpha$为K经过P的两条撑线之间的角，则

$$\int_{P\notin K}\mathrm{d}P\int_\alpha^\beta\int_\alpha^\beta|\sin(\alpha_2-\alpha_1)|\,\mathrm{d}\alpha_1\wedge\mathrm{d}\alpha_2=2\int_{P\notin K}(\omega-\sin\omega)\mathrm{d}P, \tag{4.22}$$

而由于(4.20)和(4.22)之和必等于 L^2，我们得下面的 Crofton 公式

$$\int_{P \notin K} (\omega - \sin\omega)\mathrm{d}P = \frac{1}{2}L^2 - \pi F, \tag{4.23}$$

它对于任意有界凸集 K 成立(图4.3)。参看[133,144,335]。

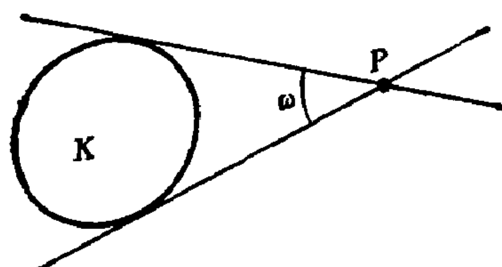


图 4.3

注意当我们试求 K 内点偶时就得(4.9)，而当我们试求和 K 相交的线偶时就得(4.23)。所以这两个公式可以看成是在平面里某种“对偶”原则下的对应公式。当我们在球面上处理相同问题时，这个事实表现得更为清楚[539]。

4. 随机直线对平面的分割

设 K 为平面里含有内点的有界凸集。设 F 为它的面积而 L 为

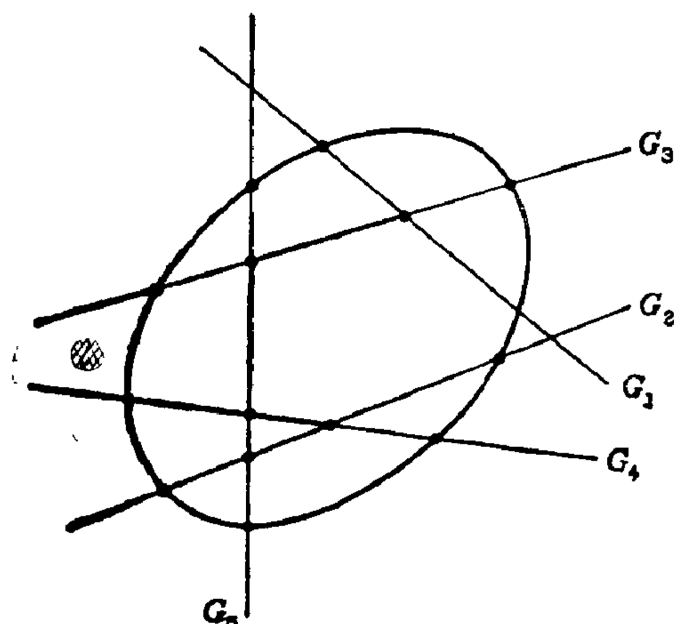


图 4.4

周长．假定有 n 条和 K 相交的直线 $G_i(p_i,\phi_i)$（图4.4）。这些直线把 K 分成一定数目 c 的区域，确定一定数目 v 的顶点（线偶在 K 内的交点），和一定数目 e 的棱．在图4.4里，

$$n=5,\quad c=11,\quad v=5,\quad e=25.$$

我们将求 c,v,e 的中值．

先求顶点 v 的平均值。根据定义

$$E(v)=\frac{1}{L^n}\int_{G_i\cap K\neq\varnothing}v\mathrm{d}G_1\wedge\mathrm{d}G_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}G_n. \tag{4.24}$$

设 $v_{hk}(h\neq k)$ 表示 G_h,G_k 的一个函数：当 $G_h\cap G_k\in K$ 时，它等于 1；否则等于 0（为完备起见，令 $v_{ii}=0$）。我们有 $v=\sum v_{hk}$，其中的总和含有 $n(n-1)/2$ 项。令 σ 为弦 $G_h\cap K$ 的长，则

$$\int v_{hk}\mathrm{d}G_h\wedge\mathrm{d}G_k=2\int\sigma_h\mathrm{d}G_h=2\pi F, \tag{4.25}$$

其中积分是对于一切和 K 相交的线 G_h,G_k 所取的。因此，

$$\begin{aligned}&\int_{G_i\cap K\neq\phi}v\mathrm{d}G_1\wedge\mathrm{d}G_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}G_n\\&=\frac{n(n-1)}{2}\int_{G_i\cap K\neq\varnothing}v_{hk}\mathrm{d}G_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}G_n\\&=n(n-1)\pi FL^{n-2}.\end{aligned} \tag{4.26}$$

因此，

已给 n 条和有界凸集相交的直线，在 K 内交点的平均值是

$$E(v)=\frac{n(n-1)\pi F}{L^2}. \tag{4.27}$$

我们还可以求 $E(v^2)$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}L^nE(v^2)&=\int_{G_i\cap K\neq\varnothing}(v_{12}+v_{13}+\cdots+v_{n-1,n})^2\mathrm{d}G_1\wedge\mathrm{d}G_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}G_n\\&=\int_{G_i\cap K\neq\varnothing}\Big(\sum_{i<j}v_{ij}^2\Big)\mathrm{d}G_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}G_n\end{aligned}$$

$$+2\int_{G_i\cap K\neq\varnothing}\sum_{(i,j)\neq(k,h)} v_{ij}v_{kh}\mathrm{d}G_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}G_n$$

$$=2\pi\binom{n}{2}FL^{n-2}$$

$$+2L^{n-4}\binom{n}{4}3\int_{\mathrm{I}} v_{ij}v_{kh}\mathrm{d}G_i\wedge\mathrm{d}G_j\wedge\mathrm{d}G_k\wedge\mathrm{d}G_h$$

$$+2L^{n-3}\binom{n}{3}3\int_{\mathrm{II}} v_{ij}v_{ih}\mathrm{d}G_i\wedge\mathrm{d}G_j\wedge\mathrm{d}G_h. \qquad (4.28)$$

在这里的积分 I，我们假设 $i<j<k<h$，而因子 3 的出现是根据可能性 $v_{ij}v_{kh}, v_{jk}v_{jh}, v_{jh}v_{jk}$；在积分 II，我们假设 $i<j<h$，而因子 3 的出现则根据可能性 $v_{ij}v_{ih}, v_{ij}v_{jh}, v_{jh}v_{ih}$。因此，我们有

$$L^nE(v^2)=2\pi\binom{n}{2}FL^{n-2}+24L^{n-4}\binom{n}{4}\pi^2F^2$$

$$+24L^{n-3}\binom{n}{3}\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma^2\mathrm{d}G. \qquad (4.29)$$

像(4.8)那样，令 $I_2=\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma^2\mathrm{d}G$，就得下面结果。

$$E(v^2)=2\pi\binom{n}{2}\frac{F}{L^2}+24\pi^2\binom{n}{4}\frac{F^2}{L^4}+24\binom{n}{3}\frac{I_2}{L^3}. \qquad (4.30)$$

例如若 K 是半径为 R 的圆，则 $I_2=(16/3)\pi R^3$，故

$$E(v^2)=\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{3}{2}\binom{n}{4}+16\pi^{-2}\binom{n}{3}. \qquad (4.31)$$

考虑 n 条随机直线把 K 分成区域的个数 c。$G_i\cap K$ 的诸弦以及边界 ∂K 构成一个图，它有 c 个区域与 $v+2n$ 个顶点（v 个在 K 内，$2n$ 个在边界上）。经过内部的每个顶点有四条棱，而经过边界上的每个顶点有三条棱。因此，由于每条棱联结两个顶点，棱的个数是 $e=\frac{1}{2}(4v+6n)=2v+3n$，于是应用Euler公式 $v-e+c$

$=1$，得

$$c=v+n+1. \tag{4.32}$$

注意我们没有考虑多于两条直线经过同一点的情况，也没有考虑两条直线交于边界上的情况，因为这两种情况下的测度等于零，因而不影响结果。于是由等式(4.32)和(4.27)，就得

$$E(c)=n(n-1)(\pi F/L^2)+n+1. \tag{4.33}$$

即：

设 n 条随机直线和一个有界凸域 K 相交，它们把 K 分成平均 $E(c)$ 个区域，$E(c)$ 的值如(4.33)所示。

现在考虑每个区域的边数。设 e_i 为区域 c_i 的边数($i=1,2,\cdots,c$)。棱的总数是 $e=2v+3n$，其中的 $2n$ 属于 K 的边界，故内(部)棱数是 $2v+n$。由于每条内棱是两个区域的边，而边界上的每条棱则只是一个区域的边，故

$$e^*=\sum_{i=1}^{c} e_i=2(2v+n)+2n=4v+4n, \tag{4.34}$$

因而

$$E(e^*)=E\left(\sum e_i\right)=4E(v)+4n$$

$$=\frac{4n(n-1)\pi F}{L^2}+4n. \tag{4.35}$$

同样，所有区域周长的总和是

$$s=\sum_{i=1}^{c} s_i=2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i+L, \tag{4.36}$$

因此，由于 $E(\sigma)=\pi F/L$(3.13)，得

$$E(s)=2nE(\sigma)+L=2n\pi F/L+L, \tag{4.37}$$

若 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 为任意 n 条与 K 相交的直线，它把 K 分成 c 个区域，这些区域的边的平均数是 $N=e^*/c$。这个商值 N 是一个随机变数，它的平均值的表达式可能很繁。我们代之以下面平均值之商

$$E^*(N)=\frac{E(e^*)}{E(c)}=1-\frac{4L^2}{n(n-1)\pi F+(n+1)L^2}. \quad (4.38)$$

同样，我们不计算随机变数$S=s/c$的平均值(难于计算)，而写出下面平均值之商

$$E^*(S)=\frac{E(s)}{E(c)}=\frac{2\pi nFL+L^3}{n(n-1)\pi F+(n+1)L^2}, \quad (4.39)$$

也不计算区域面积的平均值 $A=F/c$ 而写出下面平均值之商

$$E^*(A)=\frac{F}{E(c)}=\frac{FL^2}{n(n-1)\pi F+(n+1)L^2}. \quad (4.40)$$

练习 证明$n=2$时，

$$E\left(\frac{F}{c}\right)=\frac{(2L^2-\pi F)F}{6L^2},$$

故 $$E^*(A)/E(A)=6L^4/(6L^4+\pi FL^2-2\pi^2F^2).$$

例如，若K是圆，则 $E^*(A)/E(A)=48/49$。计算关于N和S相应的比值。

极限款：关于随机直线构成的多边形的平均值。 设$K(t)$为一族凸域，t是参数，而$F(t)$为$K(t)$的面积，$L(t)$为其周长。假定对于平面上任意点P，有一个t值t_P，使得当$t>t_P$时，$P\in K(t)$。这表示当$t\to\infty$时，$K(t)$充满整个平面。

引理 我们有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{F(t)}{L(t)}=0 \quad (4.41)$$

与$K(t)$的形状无关。

证明 设$C(t)$为含在$K(t)$内的最大圆，$R(t)$是它的半径。设O为$C(t)$的中心，$h_t=h_t(\phi)$表示$K(t)$相对于O的撑函数。我们有

$$F(t)=\frac{1}{2}\int h_t(\phi)ds_t,$$

其中 ds_t 表示 ∂K 垂直于方向 ϕ 的撑线上切点处的弧素，而积分则是在 ∂K 上取的。由 $h_t(\phi)\geqslant R(t)$，可知

$$F(t)\geqslant\frac{1}{2}R(t)L(t).$$

又因 $t\to\infty$ 时，$R(t)\to\infty$，就得(4.41)。

考虑含于 $K(t)$ 内的一个线段 K_0，其长为 b。若假定有 n 条随机直线和 $K(t)$ 相交，则其中恰好有 m 条和 K_0 相交的概率(二项分布)是

$$p_m=\binom{n}{m}\left(\frac{2b}{L}\right)^m\left(1-\frac{2b}{L}\right)^{n-m}. \tag{4.42}$$

在这里我们应用了以下事实：一条和 $K(t)$ 相交的随机直线也和 K_0 相交的概率是 $2b/L$(第 3 章第 2 节)。假定 $K(t)$ 扩大到整个平面而且当 $n=n(t)\to\infty$ 时，下面条件得到满足：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n(t)}{L(t)}=\frac{\lambda}{2},\quad \lambda=\text{正常数}. \tag{4.43}$$

在此情况下，我们说在平面上产生了一个 Poisson 线族，或者，我们有一个齐性平面 Poisson 线过程[414]。这时 p_m 的极限是

$$p_m^*=\lim_{t\to\infty}p_m=\frac{(b\lambda)^m}{m!}e^{-b\lambda}, \tag{4.44}$$

而 m 的中值是 $E(m)=\sum_0^\infty mp_m^*=b\lambda$；即常数 λ 等于与任意单位长线段相交的直线数的中值，而 λ^{-1} 则是与该线段无公共点的直线段之长的中值。

由(4.27)和(4.30)，我们有

$$\lim_{t\to\infty}E(v/F)=(\pi\lambda^2)/4,\quad \lim_{t\to\infty}E(v^2/F^2)=(\pi^2/\lambda^4)/16, \tag{4.45}$$

因此，方差

$$\mathrm{var}(v/F)=E(v^2/F^2)-(E(v/F))^2\to 0.$$

按概率论，从这个结果我们推得，在概率 1 的情况下，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{v}{F}=\frac{\pi\lambda^2}{4}. \qquad (4.46)$$

这是每单位面积内顶点数的中值。

按照(4.43)和(4.41)，可知当 $t\to\infty$ 时，$n/F=(n/L)(L/F)\to 0$，而利用(4.32)，就得随机直线把平面分为区域的面积中值

$$E(A)=\lim_{t\to\infty}\frac{F}{c}=\lim_{t\to\infty}(v/F+n/F+1/F)^{-1}=\frac{4}{\pi\lambda^2}. \qquad (4.47)$$

关于每个区域的平均边数，从(4.34)和(4.32)，我们得

$$E(N)=\lim_{t\to\infty}\frac{e^*}{c}=\lim_{t\to\infty}\frac{4v+4n}{v+n+1}=4. \qquad (4.48)$$

而关于平均周长，则根据(4.36)，得

$$E(S)=\lim_{t\to\infty}\frac{s}{c}=\lim_{t\to\infty}\frac{2(\sum\sigma_i/n)+L/n}{v/n+1+1/n}=\frac{4}{\lambda}, \qquad (4.49)$$

其中我们利用了关系

$$(\sum\sigma_i/n)\to E(\sigma)=\pi F/L \text{ 和 } v/n=(v/F)(F/L)(L/n).$$

所有这些等式都是在概率 1 (几乎必然)的情况下的结果。于是我们有：

若用一个以λ为参数的齐性Poisson 线过程把平面分为无数多个凸多边形，则每个区域的平均面积A，平均周长S以及平均边数N依次为

$$E(A)=4/\pi\lambda^2,\ E(S)=4/\lambda,\ E(N)=4. \qquad (4.50)$$

注意这些平均值和 $t\to\infty$ 时(4.38)—(4.40)里的比值的极限一致。参数 λ 是和一条任意单位长线段相交的直线数的中值。

Richards[510]和Miles[407,418]利用概率方法获得关于这些随机多边形的其他几种量的中值。我们叙述 Miles 的下列结果，而不加证明：

$$E(N^2)=(\pi^2+24)/2, \qquad E(SN)=(\pi^2+8)\lambda,$$

$$E(AN)=2\pi/\lambda^2,\qquad E(S^2)=[2(\pi^2+4)]/\lambda^2,$$
$$E(AS)=4\pi/\lambda^3,\qquad E(A^2)=8/\lambda^4,$$
$$E(NA^2)=\frac{(8\pi^2-21)16}{21\lambda^4},\quad E(SA^2)=\frac{256\pi^2}{21\lambda^5},$$
$$E(A^3)=\frac{256\pi}{7\lambda^6}.$$

在 Richards[510]的结果中，含有

$$E\left(\int f(r)\mathrm{d}P_1\wedge\mathrm{d}P_2\right)=(8/\lambda^2)\int_0^\infty rf(r)e^{-\lambda r}\mathrm{d}r,$$
$$E\left(\int f(p)\mathrm{d}P_1\wedge\mathrm{d}P_2\wedge\mathrm{d}P_3\right)$$
$$=(8/21\lambda^2)\int_0^\infty r^3f(r)\exp(-\lambda r/2)\mathrm{d}r,$$

其中 p 表示三角形$P_1P_2P_3$的周长，而左边的积分是在一个有代表性的多边形上取的(若令$f=1$就得 $E(A^3)$)。又

$$E\left(\int f(r)\mathrm{d}s_1\wedge\mathrm{d}s_2\right)=(2/\lambda)\int_0^\infty(4+\pi^2\lambda r)f(r)e^{-r}\mathrm{d}r,$$

其中$\mathrm{d}s_1,\mathrm{d}s_2$是一个有代表性的多边形边界上的弧素，而 r 为它们之间的距离。

这些结果的严格证明是不容易的，它们可以在 Miles[414,415,418]和 Matheron[399]这一系列的论文中找到。这个问题起源于Goudsmidt[234]的较早的结果。Santaló和 Yañez[592]把它们推广到双曲平面。关于用随机平面分割E_3的问题，见第16章第4节注记8。

在平面上可以有不同的直线过程，Poisson过程只是其中的一例，而由于它的简单性，也许是最有兴味的一例。对这些线过程以及关于用这种直线把平面分成区域的探讨看来是一个有前途的领域。请读者参阅Davidson[140]和 Krickeberg[345,346]的论文以及 E.F.Harding 与 D.G.Kendall 所编的《随机几何学》[294](参看第5节注记8)。

5. 注记

(1) **关于凸集的积分公式。** Crofton 公式(4.9)和(4.23)是关于平面凸集的一类公式中的有代表性者，这类公式是通过用不同方法计算与凸集有关的点集和线集的测度来求得的。下面我们给出其他一些例。

(a) 设K为有界凸集，边界是∂K，属于C^1类。设P为不在K内的一点，t_1,t_2为由P到K的切线段长，ω为这两条切线的夹角。这时，若f为∂K上的可积函数，而f_1,f_2为f在切点的值，则

$$\int_{P\notin K}\left(\frac{f_1}{t_1}+\frac{f_2}{t_2}\right)\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)dP=\frac{1}{2}L\int_0^{2\pi}f d\phi, \qquad (4.51)$$

其中ϕ表示切线的方向，令f有不同值($f=$常数，$f=\rho^2$，$f=p$，…)①，我们就获得若干积分公式作为特款(见 Lebesgue[357]，Masotti-Biggiogero[396]，和Stoka[647]的结果)。

若A_1,A_2为由P到K的切线上的切点而D为A_1,A_2,P所确定的圆的直径，Masotti-Biggiogero[392]证明了

$$\int\frac{\rho_1\rho_2}{D^3}dP=L, \qquad \int\rho_1\rho_2\sin^3\omega dP=3F^2,$$

$$\int\frac{\rho_1\rho_2}{\sigma^2}\sin^3\omega dP=\pi F, \qquad \int\frac{\rho_1+\rho_2}{D^3}dP=4\pi,$$

其中ω为角A_1PA_2，σ为弦A_1A_2，而ρ_i为∂K在A_1,A_2的曲率半径($i=1,2$)。积分域是平面在K外的部分。

利用函数$p(\phi)$和$\rho(\phi)$的 Fourier 展开式可以像 Hurwitz[319]所做的那样，获得类似的积分公式。例如，若用τ表示∂K的切线

① ρ^2,p原文未说明。从下文看，ρ应是∂K的曲率半径，p是∂K的撑函数。——译者

和一个固定方向所作的角($0\leqslant\tau\leqslant2\pi$)，令

$$a_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\rho\cos2\tau d\tau,\qquad a_2'=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\rho\sin2\tau d\tau,$$

就有

$$\int_{P\notin K}\sin^3\omega dP=(3/4)L^2+(\pi^2/4)(a_2^2+a_2'^2).$$

对于任意凸集K，可以证明

$$(16-\pi^2)F\leqslant\int_{P\notin K}(\omega^2-\sin^2\omega)dP\leqslant(4/\pi)L^2-\pi^2F,$$

其中在左边，等号对于圆成立，而在右边，等号对于常幅集成立[270,396]。

设 $x=x(s)$，$y=y(s)$ 是一条周长为2π的闭凸曲线∂K的参数方程而a_n,b_n与c_n,d_n依次是$x(s)$和$y(s)$的Fourier展开式的系数，则泛函 $\phi_n(\partial K)=a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2$ ($n\geqslant1$)满足一些值得注意的不等式，例如 $\phi_1(\partial K)\geqslant(336/27\pi)-3/2=1.282\cdots$ 而 $\phi_n(\partial K)\leqslant 8/\pi n^4$ ($n\geqslant2$)(见[145a])。

(b) 设直线G_1,G_2,G_3构成以P_1,P_2,P_3为顶点的三角形，D为这三点所定的圆的直径，则(根据 Blaschke[51])

$$dP_1\wedge dP_2\wedge dP_3=D^3dG_1\wedge dG_2\wedge dG_3.\qquad(4.52)$$

更一般地，考虑有序的 n 点P_i ($i=1,2,\cdots,n$)，并令G_i表示直线P_iP_{i+1} ($i=1,2,\cdots,n$)，$G_n=P_nP_1$。令L_i表示P_iP_{i+1}的长，而α_i表示G_{i-1}和G_i的角，可以证明[418]

$$\bigwedge L_i\wedge dP_i\wedge d\phi_i=\bigwedge|\sin\alpha_i|dP_i.\qquad(4.53)$$

(c) 设D为具有光滑边界∂D的平面域。设ds_1和ds_2为∂D在其上两点P_1,P_2的弧元素，而σ为P_1,P_2间的距离，则D的面积可由下式计算：

$$F^2=-\frac{1}{4}\int_{\partial D\times\partial D}\sigma^2\cos\psi ds_1\wedge ds_2,\qquad(4.54)$$

其中ψ是∂D在P_1，P_2的向外法线之间的角。这公式是Redei和Nagy[497]的成果，Hadwiger[267]与Ruben[518]把它推广到n维欧氏空间。

(2) **直线上的函数及其积分**.注意：若当$x^2+y^2<1$时，$f(x,y)=1/(1-x^2-y^2)^{1/2}$，则$\int f(x,y)\mathrm{d}s=\pi$，其中积分域是幺圆的任意弦。Rényi 提出这样的问题：是否存在一个异于幺圆的凸线∂K以及一个在∂K的内部有确定值而且不恒等于零的函数f，使得在K的一切弦上，$\int f\mathrm{d}s=$常数?

J. W. Green[235]给出这问题的答案，他证明了：

设∂K为凸线，f为它内部的一个可积函数，而且在K的一切弦上，$\int f\mathrm{d}s=k$。则或者几乎处处$f=0$，或者K是圆，而且$f=k\pi^{-1}(1-x^2-y^2)^{1/2}$.

若$k=0$，我们有定理：

若$f(x,y)$是平面上连续而可积的函数而且在任意(两端无限延伸的)直线上，积分$\int f\mathrm{d}s=0$，则$f\equiv 0$。

Darling[139]研究了到高维空间的推广。

(3) **互相接合的点和线的密度**。设$P(x,y)$为直线$G(p,\phi)$上的点。若H为从原点到G的垂足，t表示线段HP的长，而θ表示G和x轴所作的角，则$t=x\cos\theta+y\sin\theta$。于是

$$\mathrm{d}t=\cos\theta\mathrm{d}x+\sin\theta\mathrm{d}y+(-x\sin\theta+y\cos\theta)\mathrm{d}\theta。$$

取两边和(3.11)中的$\mathrm{d}G$的外积，若不计算符号，就得$\mathrm{d}G\wedge\mathrm{d}t=\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}\theta$，其中$\mathrm{d}P=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$。在这公式里，假定了$0\leqslant\theta\leqslant\pi$。若$G^*$为有向直线，可以令

$$\mathrm{d}G^*\wedge\mathrm{d}t=\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}\theta, \tag{4.55}$$

于是θ在节$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$中变化。公式(4.55)给出点$P$和与之相接合的有向直线$G^*$所构成的元素偶$(P,G^*)$的密度。

(4) **关于凸集的弦的平均长度**。有不同的方法来给出一个有界凸集K的随机弦的平均长度定义。这些方法决定于如何理解随机弦。下面给出一些例子。

例1 若假定含有那根弦的直线G是按照积分几何的意义随机地选取的，则我们知道，弦长的平均值是$E(\sigma)=\pi F/L$(3.13)。

例2 假设∂K是一道完善的反射墙，并设一个粒子从K的一点P沿方向θ发射(图4.5)。当粒子到达∂K上一点A_1时，它受到

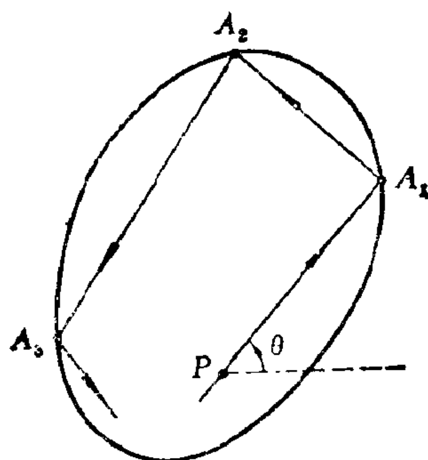


图 4.5

反射，沿一条弦A_1A_2进行，然后又受到反射，逐次沿弦$A_1A_2,\cdots$前进。设P是在K内随机选取，而θ是在0与2π之间随机选取的，我们求弦$A_1A_2,A_2A_3,\cdots$的平均长。用σ表示含PA_1的弦的长，我们用下式来确定上述平均长：

$$E_1(\sigma)=\frac{\int\sigma\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}\theta}{\int\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{2\pi F}\int\sigma\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}\theta, \tag{4.56}$$

其中两个积分的积分范围是一切$P\in K$和$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。根据(4.55)，

$$\int \sigma \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}\theta = \int \sigma \mathrm{d}G^* \wedge \mathrm{d}t = 2\int \sigma^2 \mathrm{d}G = 2I_2,$$

其中I_2的定义是(4.8)。因此,

$$E_1(\sigma) = I_2/2\pi F。 \tag{4.57}$$

不变量I_2依赖于K的形状,一般地缺乏简单的表达式。为了比较$E(\sigma)$和$E_1(\sigma)$,令$E(\sigma - E(\sigma))^2 = E(\sigma^2) - (E(\sigma))^2$,因而若令 $\mathrm{var}(\sigma) = E(\sigma - E(\sigma))^2$,就有 $E(\sigma^2) = (E(\sigma))^2 + \mathrm{var}(\sigma)$。但$I_2 = E(\sigma^2)L$,故

$$E_1(\sigma) = E(\sigma) + \frac{L}{\pi F}\mathrm{var}(\sigma) = \frac{\pi F}{L} + \frac{L}{\pi F}\mathrm{var}(\sigma)。$$

因此,$E(\sigma) \leqslant E_1(\sigma)$。

例如对于半径为R的圆,

$$E(\sigma) = (\pi/2)R, \quad E_1(\sigma) = (16/3\pi)R。 \tag{4.58}$$

对于边长为1的正方形,

$$\begin{aligned} &E(\sigma) = \pi/4 = 0.785\cdots, \\ &E_1(\sigma) = (4/3\pi)(3\log(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1) = 0.546。 \end{aligned} \tag{4.59}$$

这个问题在建筑声学有应用见[22,335,336]。

例 3 下面是凸域内随机弦平均长的另一种可能定义。假定在K的边界上取随机点P并自P出发取随机方向PP_1。设σ为弦PP_1的长。这时σ的平均值是

$$E_2(\sigma) = \frac{1}{\pi L}\int_0^L \int_0^\pi \sigma \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\theta, \tag{4.60}$$

其中s为K在P的弧长。

例如对于半径为R的圆,其结果(Horowitz[315])是$E_2(\sigma) = 4R/\pi$,而对于边长为a,b的长方形,

$$E_2(\sigma) = \frac{a}{a+b}f(a,b) + \frac{b}{a+b}f(b,a),$$

其中[①]

---

① 式中第一括弧里的a^2+b^2疑误,似应为$(a^2+b^2)^{1/2}$。——译者

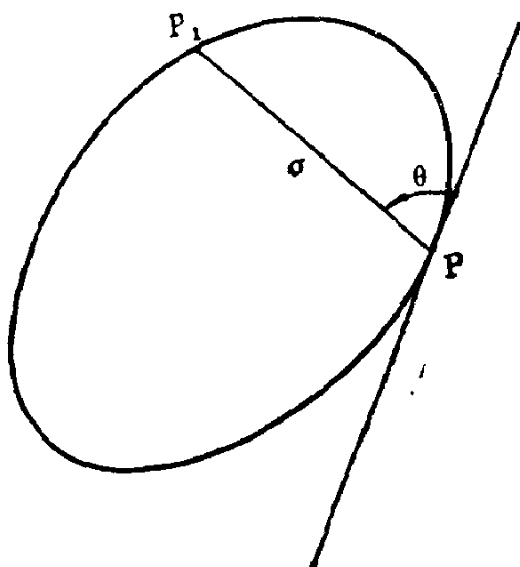


图 4.6

$$f(a,b)=\frac{a}{\pi}\log\left(\frac{a^2+b^2}{a}+\frac{b}{a}\right)+\frac{2b}{\pi}\log\left[\frac{a+(a^2+b^2)^{1/2}}{b}\right]$$

$$-\frac{b^2}{\pi a}\left[\frac{(a^2+b^2)^{1/2}}{b}-1\right].$$

例 4 设P,Q为∂K上两个随机点。距离$\sigma=|PQ|$的平均值是

$$E_3(\sigma)=L^{-2}\int_{\partial K\times\partial K}\sigma \mathrm{d}s_1\wedge \mathrm{d}s_2, \tag{4.61}$$

其中$\mathrm{d}s_1$与$\mathrm{d}s_2$是∂K在P与Q的弧元素。已给长度L，只有当∂K是圆时，平均值$E_3(\sigma)$才达到最大值。更一般地，在L固定后，若$g(\sigma)$是增凸函数，则

$$E_3(g)=L^{-2}\int_{\partial K\times\partial K}g(\sigma)\mathrm{d}s_1\wedge \mathrm{d}s_2$$

只有当∂K是圆时才达到最大值[375]。特殊地，选择$g(\sigma)=\sigma$，就可知：一条周长为L的闭曲线的弦的平均长不超过$2L/\pi^2$.

例 5 最后，若随机线是由两个在Λ内随机选择的点P_1,P_2所决定，我们令

$$E_4(\sigma) = F^{-2}\int_{K\times K} \sigma \mathrm{d}P_1 \wedge \mathrm{d}P_2. \qquad (4.62)$$

利用(4.2)，(4.4)和(4.11)，可得$E_4(\sigma) = 2E(r)$，其中$E(r)$表示K中两点间的平均距离。

Coleman[119]给出了关于以上结果的细节及其到三维空间的推广；参看Geciauskas文章[217，218]。

(5) Sylvester 问题。积分几何中关于几何概率的一个有兴趣的经典问题是Sylvester问题：

在一个凸集K内随机选四点P_0, P_1, P_2, P_3，求它们构成凸四边形（即它们每一点不含在其余三点所决定的三角形内）的概率。

考虑与此互相补充的问题，即四边形不凸的概率。这时，每一点P_i都可以含于其余三点所决定的三角形之内，故共有四种不同情况。取四点组P_0, P_1, P_2, P_3，其中P_3位于三角形$P_0P_1P_2$里面，这样的四点组的度量是

$$T_2 = \int_{P_i \in K} T_{012} \mathrm{d}P_0 \wedge \mathrm{d}P_1 \wedge \mathrm{d}P_2,$$

其中T_{012}表示以P_0, P_1, P_2为顶点的三角形面积。其它三种情况下，测度相同，故四边形不凸的总测度是$4T_2$。其对应的概率是$4T_2/F^4$（其中F是K的面积），因而四点构成凸四边形的概率是

$$p = 1 - (4T_2/F^4).$$

由于T_2只含面积与面积元素，因而在幺模仿射变换下不变，为了计算概率p，只须取一个与K仿射等价的较简单的图形。例如p对于一切椭圆有相同的值，对于一切三角形有相同的值，对于一切平行四边形有相同的值。直接计算给出以下结果：

椭 圆	$T_2 = 35F^4(48\pi^2)^{-1}$；
三角形	$T_2 = F^4/12$，
平行四边形	$T_2 = 11F^4/144$；

正 n 边形　　$T_2=\dfrac{9\cos^2\alpha+52\cos\alpha+44}{36n^2\sin^2\alpha}F^4$,

其中$\alpha=2\pi/n$。最后一个结果是Alikoski 的[3]。从这些结果可以写出其对应的概率。

Blaschke[33]证明了不等式

$$\frac{35}{48\pi^2}\leqslant\frac{T_2}{F^4}\leqslant\frac{1}{12}, \tag{4.63}$$

由此可知，Sylvester 问题中的概率对于椭圆有最大值，对于三角形有最小值。

在n维欧氏空间里，Sylvester问题引出积分

$$T_n=\int T_{012\cdots n}\mathrm{d}P_0\wedge\mathrm{d}P_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}P_n,$$

其中$T_{012\cdots n}$ 表示以$P_0,P_1,\cdots,P_n$ 为顶点的单纯形，而积分范围则是一个凸体K的$n+1$点组。对于n维幺球体，直接计算给出，除一个因子F^{n+2}外，

$$T_n(\text{幺球体})=\binom{n+1}{\frac{1}{2}(n+1)}^{n+1}\binom{(n+1)^2}{\frac{1}{2}(n+1)^2}^{-1}2^{-n}, \tag{4.64}$$

其中，当$n+1$为奇数时，我们令

$$\binom{n+1}{\frac{1}{2}(n+1)}=\frac{2^{2n+4}}{(n+2)\pi}\binom{n+2}{\frac{1}{2}(n+2)}^{-1}.$$

例如

$$T_1=\frac{1}{3},\qquad T_2=\frac{35}{48\pi^2},\qquad T_3=\frac{9}{715}.$$

上述关于T_n(幺球体)的值是J.F.C. Kingman[337]给出的。Blaschke 的前一个不等式可以推广到n维欧氏空间，即对于椭圆体，Sylvester 问题中的概率有最大值。这个结果是Groemer的

[244,245]。关于这个问题的历史事实可参考[338]；还有[498]。Miles [420]在以下意义下推广了 Sylvester 问题：求 n 维幺球体内 $n+3$ 个随机点的多面体凸包有 m 个顶点的概率 $p(n,m)$。特别有意义的几个值是

$$p(2,3)=15/16\pi^2=0.0949\cdots,$$

$$p(2,4)=65/12\pi^2=0.5488\cdots,$$

$$p(2,5)=1-305/48\pi^2=0.35619\cdots,$$

$$p(3,4)=9/200\pi^2=0.004559\cdots,$$

$$p(3,5)=\left(\frac{27}{143}\right)-\left(\frac{9}{100\pi^2}\right)=0.17969\cdots,$$

$$p(3,6)=\left(\frac{116}{143}\right)+\left(\frac{9}{200\pi^2}\right)=0.81575\cdots。$$

Miles[420]计算了其他情况下$p(n,m)$的一些值，但$p(n,m)$的一般值尚属未知。

(6) **和一个凸集相交的直线。** 设 G_i，$i=1,2,\cdots,n$ 为和一个凸集 K 相交的 n 条随机直线。我们知道，直线G_i在 K 内的交点平均数是$E(v)=n(n-1)\pi F/L^2$ (4.27)。较困难的是求恰好 h 个交点位于 K 内的概率 p_h，$h=0,1,2,\cdots,n(n-1)/2$。为了表达这些概率，除需要关于 K 的面积 F，周长 L 和第二节的不变量 I_m 外，还需要一些其他关于 K 的不变量。例如，当$n=3$时，就出现积分

$$U=\int_{G_1\cap G_2\in K}u(G_1,G_2)\mathrm{d}G_1\wedge\mathrm{d}G_2,$$

其中$u(G_1,G_2)$表示以G_1,G_2和∂K的交点的凸四边形的长。利用第 3 章第 3 节的结果，可以证明，$n=3$时，

$$p_0=\frac{1}{L^3}(U+I_2+L^3-6\pi FL),\qquad p_1=\frac{3}{L^3}(2\pi FL-U),$$

$$p_2=\frac{3}{L^3}(U-I_2),\qquad p_3=\frac{1}{L^3}(2I_2-U)。$$

若∂K属于C^2类，一切交点在K内的概率$p_{n(n-1)/2}$满足不等式

$$p_{n(n-1)/2}<\frac{n!}{(2n)!}\left(\frac{bL}{2}\right)^n,$$

其中b是∂K的曲率的极大值。这些结果是Sulanke的[660]。

(7) **一个环形区里的随机多边形。** 设K_0为平面上一个有界凸域，它的内部有另一个凸域K_1。设G_i $(i=1,2,\cdots,n)$为n条随机直线，它们和K_0相交，但不同K_1相交。设H_i为以G_i为界而含K_1在内的闭半平面。设K_n为所有H_i的交集。Rényi 与Sulanke[505]证明了：

(a) 当$n\to\infty$时，K_n为开集的概率的阶是γ^n，其中γ是决定于K_0和K_1的常数，$0<\gamma<1$。可以把这个结果写作$p(K_n开)=O(\gamma^n)$。特殊地，若K_0和K_1为平行凸域，则$p(K_n开)=n/2^{n-1}$。

(b) 若K_1缩成一点，K_n的顶点数V_n的期望值是

$$E(V_n)=\pi^2/2+O(\gamma^n)\quad(0<\gamma<1)。$$

因此，当$n\to\infty$时，$E(V_n)\to\pi^2/2$。

(c) 若∂K_1有连续有界曲率$\kappa>0$，则

$$E(V_n)=\left[\left(\frac{2}{3(L_0-L_1)}\right)^{1/3}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\int_0^{L_1}\kappa^{2/3}ds\right]n^{1/3}+O(1),$$

其中L_0和L_1依次是K_0和K_1的周长。

(d) 若K_1为凸r边形，则$E(V_n)=\frac{2}{3}r\log n+O(1)$.

关于这个问题向高维空间的部分推广，可参阅W.M.Schmidt[598]和Sulanke 与Wintgen[665]的工作。Ziezold[736]考虑了平面上直线的一般分布函数，并处理了相应的问题.他通过“对偶原则”把这个问题同以下问题相联系：求一个凸域中n随机点的凸包的期望顶点数(参看第2章第5节注记3)。

(8) **直线的随机过程。** 平面E_2上一条有向直线G可以看作圆柱面$C(p,\phi;\ -\infty<p<\infty,\ 0<\phi<2\pi)$上的一点$(p,\phi)$。$E_2$上的

运动(平移与转动)群引导出C上的一个运动群，用$\mathfrak{M}$表示．设B_q为球$B_q=\{(p,\phi);|p|<q\}$。E_2上的一个直线过程可以看作C上的一个点过程，即C上的一个非负整数值的随机Borel测度Z，它具有以下两个性质：(a) 对于一切$q\geq 0$，$Z(B_q)$几乎肯定有限；(b) Z几乎肯定不含有质量大于1的原子。Davidson考虑了再满足以下两条件的一类线过程$LP4$；(c) 对于一切$q\geq 0$，$E(Z^2(B_q))<\infty$,而对于一切$T\in\mathfrak{M}$,$E(Z(A))=E(Z(TA))$(一级平稳性)，而且,若有一个q，使得$A_1\cup A_2\subset B_q$，则$E(Z(TA_1),Z(TA_2))=E(Z(A_1)Z(A_2))$(二级平稳性)；(d) Z几乎肯定没有平行(或逆平行)线。线过程$LP4$中，又满足以下条件的，构成线过程$LP5$：(e) Z的有限维分布在$\mathfrak{M}$下是平稳的，即对于一切$k,n_1,n_2,\cdots,n_k,A_1,\cdots,A_k$以及一切$T\in\mathfrak{M}$，

$$\mathrm{Prob}\left(\bigcap_{i}^{k}(Z(A_i)=n_i)\right)=\mathrm{Prob}\left(\bigcap_{i}^{k}(Z(TA_i)=n_i)\right).$$

Davidson[140]与Krickeberg[345]证明了，每一个$Z\in LP4$在E_2的反射下(等价于在C的平移下)是二级平稳的。对于满足(a)(b),(c)的Z，把Z在任意测度为1的集合内的平均点数λ叫做Z的强度。Davidson证明了，已给$Z\in LP4$，可以构成另一个过程$Z^*\in LP4$，这个Z^*是一个双随机Poisson过程(dsP)，它和Z有相同的强度与协变测度。Davidson获得了一个属于$LP4$而不是dsP的线过程，但他所作的满足$LP5$的一切过程都是dsP，于是他猜想，$LP5$中只含有dsP。果然如此，Miles[407, 410, 414]所得的，联系着Poisson过程时关于分布的成果，就可以用来获得这些分布联系着任意$Z\in PL5$时的表达式。

Davidson[140]研究了线过程对于纸张结构以及道路网络的应用。纸张可以看作(压紧了的)长纤维的随机过程。纸张强度必然决定于它的纤维的编织密度，因此，就要找出什么线过程具有每单位面积最大的交点密度比。交点密度比的定义是平均每单位交点的个数和平均每单位相交的直线偶的个数之比，它与纸张

的厚度无关。Davidson证明了，产生最大强度纸张的是所谓混合Poisson过程，这就是具有随机变化的整体密度的普通均匀Poisson过程。关于随机纤维网的一些其他结果为Dodson[147, 148]和Corte[124]所得到。

关于道路网络，问题是在平面上放一个用(设想上)无限长直路构成的网络，使得沿道路行进的平均旅程尽可能地短。设A为网络内一个随机点，考虑网络上一切与A距离为d的点B。设$r(d,A)$表示从A沿网络道路行进到B的平均距离。对于固定的A点，$r(d,A)$的平均值除以d，得到的值叫做网络的无效系数$m(d)$。对于长方网络，可以证明$m(d)\geqslant(2+\pi)/4$，并且当$d\to\infty$时，$m(d)$趋于这个极限。在一个Poisson过程里，对于一切d，$m(d)$是有限的，而且当$d\to\infty$时，$m(d)\to 1$。在这个意义下，对于长途旅行，Poisson过程是最有效的。

两组随机平行线之间，每单位面积交点的期望数在道路交通理论中有应用[213]。关于点和直线过程的其他结果可以在Papangelou[[illegible]]和Daley[136]中找到。一般理论可参阅G.Matheron的书[401a]。

第五章　平面上的带集

1. 带集密度

若平面上两条平行直线之间的距离为 a，则它们之间以及它们上面的点所构成的闭集叫做一个宽度为 a 的带。

我们用字母 B 代表带。一个带的位置可以用它的平行中线①来确定。设 p,ϕ 为这样的线的坐标，则具有固定宽度的带(的)集(合)(图5.1)的密度是

$$dB = dp \wedge d\phi. \tag{5.1}$$

若要求密度在平面运动群下不变，则除一个常数因子外，这个密度是唯一的。

设K为有界凸集。若 $B \cap K \neq \varnothing$，而 $K_{a/2}$ 为距K为 $a/2$ 的

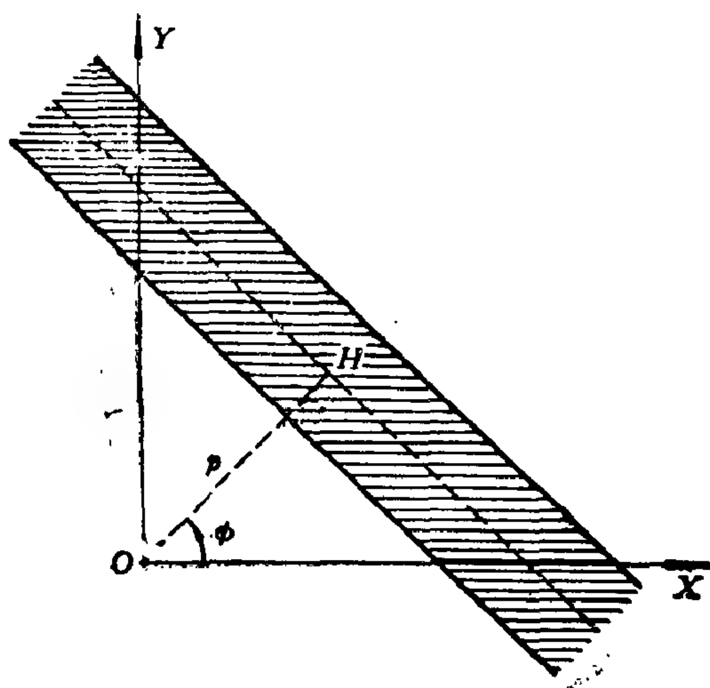


图　5.1

① 即同带的两界线平行而距离相等的直线。——译者

平行集，则B的平行中线同$K_{a/2}$相交。反过来，若B的平行中线和$K_{a/2}$相交，则B和K相交。因此，利用(1.18)和(3.12)，就得：

同一个凸集K相交而宽度为a的带集的测度是

$$m(B;\ B\cap K\neq\varnothing)=\int_{B\cap K\neq\varnothing}\mathrm{d}B=L+\pi a, \qquad (5.2)$$

其中L为K的周长。特殊地，有以下结果：

(a) 含一个固定点P在内宽度为a的一切带的测度是

$$m(B;\ P\in B)=\pi a. \qquad (5.3)$$

(b) 同一条长度为s的线段相交而宽度为a的一切带的测度是

$$m(B;\ B\cap S\neq\varnothing)=2s+\pi a. \qquad (5.4)$$

(c) 同一个连通但不一定凸的域相交而宽度为a的一切带的测度也用公式(5.2)确定，但这时L表示域的凸包的周长。

含一个已给点集在内的带的集合测度比较复杂，但若所给集K的直径$D\leqslant a$，结果是简单的。在此情况下，所求测度等于(5.2)中的测度减去一切其边界同K相交的带的测度，而后一测度则是$2L$。故

$$m(B;\ K\subset B)=\pi a-L. \qquad (5.5)$$

注意由于$L\leqslant\pi D$而$D\leqslant a$，这个测度是非负的。

以上结果可用于几何概率如下：

(a) 设K_1为含于凸集K内的凸集。一个宽度为a而同K相交的随机带也同K_1相交的概率是

$$p=\frac{L_1+\pi a}{L+\pi a}, \qquad (5.6)$$

其中L_1和L依次为K_1和K的周长。

若K_1的直径不超过K的直径，则带B含K_1在内的概率是

$$p=\frac{\pi a-L_1}{\pi a+L}. \qquad (5.7)$$

若 K_1 缩成一点，则只须在(5.7)中令 $L_1=0$，该式就适用。

(b) 考虑在有界凸集 K 内 N 个凸集 $K_i(i=1,2,\cdots,N)$（图5.2）。设 L 为 K 的周长，L_i 为 K_i 的周长。若 n 为和带 B 相交

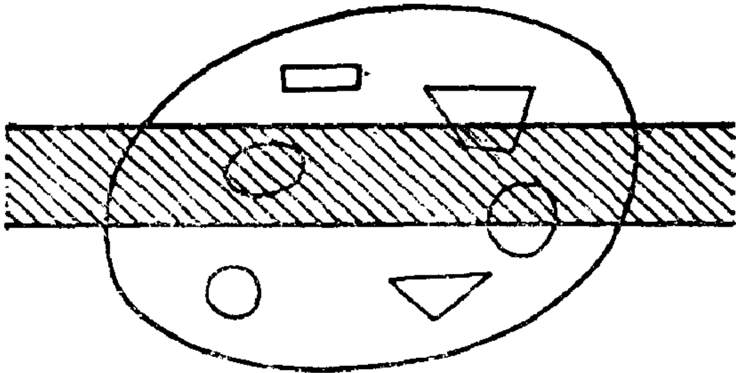


图 5.2

的集 K_i 的个数（在图5.2里，$n=3$），则

$$\int_{B\cap K\neq\varnothing} n\,dB=\sum_1^N m(B;\ B\cap K_i\neq\varnothing)=\sum_1^N L_i+\pi Na. \quad (5.8)$$

若一切 K_i 的周长都不超过 a，而 n_i 为含于带 B 内的 K_i 的个数，则从(5.5)可得

$$\int_{B\cap K\neq\varnothing} n_i\,dB=\pi Na-\sum_1^N L_i. \quad (5.9)$$

由(5.5)，(5.8)和(5.9)，得：

设 $K_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为含于有界凸集 K 内的 N 个凸集，而 B 为一个随机地同 K 相交而宽度为 a 的带。则同 B 相交的 K_i 的个数的平均值是

$$E(n)=\frac{\sum_1^N L_i+\pi Na}{L+\pi a}. \quad (5.10)$$

若一切 K_i 的直径都不超过 a，则含于带内的 K_i 的个数的平均值是

$$E(n_i)=\frac{\pi Na-\sum_1^N L_i}{\pi a+L}. \quad (5.11)$$

2. Buffon 投针问题

让我们回到上节的问题(a)。假设K为幅度等于D的凸集而K_1为含于K内的任意凸集。我们曾经指出，幅度$D_1 \leqslant D$的任意凸集都可以含在K内(第一章第4节)。一个和K相交而宽度为a的带B同时和K_1相交的概率为(5.6)所确定。我们原来假定K固

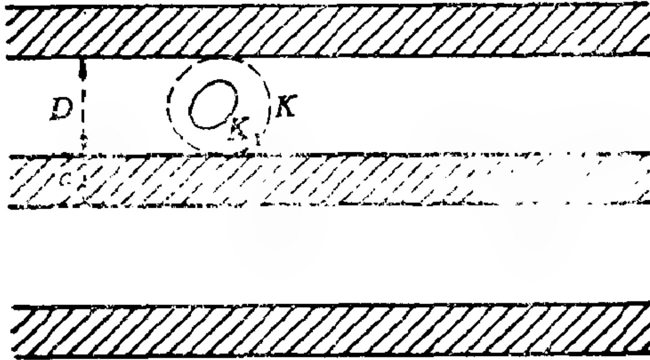


图 5.3

定而带B则是随机位置的，现在反过来，设想在整个平面上画上平行的带B，其间的间隔是D，然后把K和K_1一起随机地放上去(图5.3)。这样K肯定要和唯一的一个带相交(除非K同带相切，但这样位置的K测度是零)而K_1和一个带相交的概率为(5.6)所确定；即，若令$L=\pi D$，就有

$$p=\frac{L_1+\pi a}{\pi(a+D)}. \tag{5.12}$$

显然，不必要假定K集存在，因此，可以说，若一个幅度为$D_1 \leqslant D$，周长等于L_1的凸域K_1随机地放在平面上，则它和一个带相交的概率为(5.12)所确定。

若$a=0$，而K_1缩成一个长度为l的线段，则$L_1=2L$，这时(5.12)给出经典的Buffon投针问题：

若在整个平面上画上平行直线，其行距是$D \geqslant l$，而把一根长度为l的针随机地放上去，则这根针和这些线之一相交的概率

是 $p=2l/\pi D$。

注记 Buffon 在他的 Essai d'Arilhmetique Morale (1777) 里提出并解答了 Buffon 问题，这是几何概率论中最早命题之一。若在画上平行线的平面上把一根针随机地丢上去 N 次，公式 $p=2L/\pi D$ 给出估计 π 的值的可能性。若其中有 n 次那根针和一条直线相交，则 $p^*=n/N$ 是 p 的一个估计值，而 $\pi^*\sim 2l/p^*D$ 是对 π 的对应的估计值。由概率论，我们知道，N 次试投中，p 的标准误差是 $[p(1-p)/N]^{1/2}$①，由于 $\delta\pi^*=(2l/p^2D)\delta p$，可见对于大的 N 值，π^* 的标准误差是 $\pi[(\pi D-2l)/2lN]^{1/2}$，而这个公式表示，最大可能的 l 值，即 $l=D$，对应于较准确的 π 的估计值。

试验进行了多次，其结果见于文献(例如 Kendall 与 Moran [335])。但是，如 Gridgeman [238] 所指出，所有已发表的结果都比预期好。这个作者指出，若概率是95%，要准确到恰好 d 位小数的 π 值，必须取 $N\sim 90.10^{24}$(假定 $D=l$)②，而这比已公布的试验的数值大很多(参看 Mantel [390]的结果)。关于针问题以及其他积分几何结果在设计模式辨认部件中的应用，参考 Novikoff 的工作[457]。关于对曲线长的估计中的应用，参看[205]。Kac，Van Kampen，与 Wintner[328]对处理 Buffon 问题中所包含的假设进行了分析，参看[318]和[601]。

3. 点，线与带构成的集合

设 D 为平面上一个域，它不一定是凸的(图 5.4)，它的面积是 F。若假定点 P 与带 B 是独立的，则元素偶(P,B)所构成的集的密度是 $dP\wedge dB$。于是满足 $P\in B\cap D$ 的(P,B)的测度是

$$m(P,B;P\in B\cap D)=\int_{P\in B\cap D} dP\wedge dB. \qquad (5.13)$$

---

① 原文误作$[p/(1-p)/N]^{1/2}$。——译者

② 原文作 $D=1$，疑误。——译者

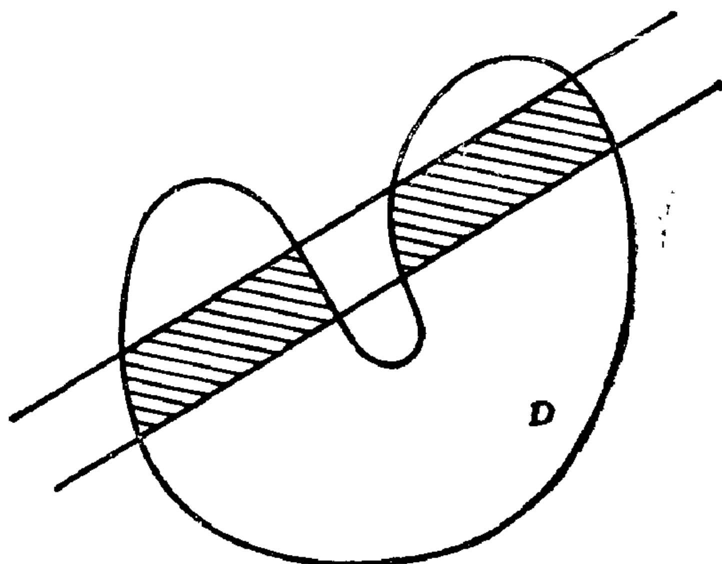


图 5.4

为了计算这个积分，先固定P然后利用(5.3)。其结果是

$$m(P,B;\ P\in B\cap D)=\pi a\int_{P\in D}\mathrm{d}P=\pi aF, \tag{5.14}$$

其中a是B的宽。另一方面，若先固定B而令f为$B\cap D$的面积，则

$$m(P,B;\ P\in B\cap D)=\int_{B\cap D\neq\varnothing}f\mathrm{d}B. \tag{5.15}$$

于是

$$\int_{B\cap D\neq\varnothing}f\mathrm{d}B=\pi aF. \tag{5.16}$$

设L为D的凸包的周长。则$m(P;\ P\in D)=F$而$m(B;\ B\cap D\neq\varnothing)=L+\pi a$，故得：

若P与B是随机选取但满足条件$P\in D$，$B\cap D\neq\varnothing$的，则P属于$B\cap D$的概率是

$$p=\frac{\pi a}{L+\pi a} \tag{5.17}$$

而交集$B\cap D$的面积f的中值是

$$E(f)=\frac{\pi aF}{L+\pi a}. \tag{5.18}$$

设K为凸集并考虑元素偶G, B（直线与带），其中$G\cap B\cap K\neq\varnothing$。这个集合的测度是在条件$G\cap B\cap K\neq\varnothing$下$dG\wedge dB$的积分。计算这个积分可以先固定$G$然后对带$B$求积，也可以先固定$B$然后对直线$G$求积。利用(5.4)，第一种方法给出

$$m(G, B;\ G\cap B\cap K\neq\varnothing)=\int_{G\cap K\neq\varnothing}(2\sigma+\pi a)dG$$

$$=2\pi F+\pi aL, \qquad (5.19)$$

其中σ是弦$G\cap K$的长。第二种方法给出

$$m(G, B;\ G\cap B\cap K\neq\varnothing)=\int_{B\cap K\neq\varnothing}u\,dB, \qquad (5.20)$$

其中u表示$B\cap K$的周长(图5.5)。由(5.19)和(5.20)得

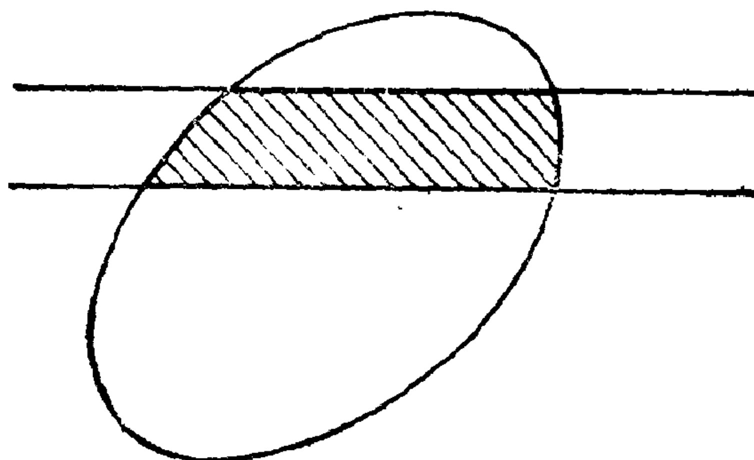


图 5.5

$$\int_{B\cap K\neq\varnothing}u\,dB=2\pi F+\pi aL. \qquad (5.21)$$

这些结果可以叙述如下：

设G是直线，B是宽度为a的带，它们是随机选取的，但满足$G\cap K\neq\varnothing$。则$G\cap B\cap K\neq\varnothing$的概率是

$$p=\frac{2\pi F+\pi aL}{L(L+\pi a)}. \qquad (5.22)$$

若 $a=0$，就得：K 的两个随机弦相交于 K 内的概率是 $p=2\pi F/L^2$。

$B\cap K$ 的边界周长中值是

$$E(u)=\frac{2\pi F+\pi aL}{L+\pi a}. \tag{5.23}$$

两个独立的带 B_1,B_2 所构成的带偶的密度是 $\mathrm{d}B_1\wedge\mathrm{d}B_2$，故满足 $B_1\cap B_2\cap K\neq\varnothing$ 的带偶 B_1,B_2 的测度是

$m(B_1,B_2;\ B_1\cap B_2\cap K\neq\varnothing)$

$$\int_{B_1\cap B_2\cap K\neq\varnothing}\mathrm{d}B_1\wedge\mathrm{p}B_2=\int_{B_1\cap K\neq\varnothing}(u_1+\pi a_2)\mathrm{d}B_1$$

$$=2\pi F+\pi a_1L+\pi a_2(L+\pi a_1), \tag{5.24}$$

其中我们利用了(5.2)和(5.21)，而 a_1,a_2 则依次是 B_1,B_2 的宽。于是有：

若 B_1,B_2 为和凸集 K 相交的两个随机带，则 $B_1\cap B_2\cap K\neq\varnothing$ 的概率是

$$p=\frac{2\pi F+\pi L(a_1+a_2)+\pi^2a_1a_2}{(L+\pi a_1)(L+\pi a_2)}. \tag{5.25}$$

关于具有随机宽度的带，见[216]。

4. 一些中值

设 $B_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个同一个凸集 K 相交的宽度等于 a 的随机带。设 f_r 为 K 内被恰好 r 个带覆盖部分的面积，我们试求 f_r 的平均值。考虑积分

$$i_r=\int\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}B_1\wedge\mathrm{d}B_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}B_n, \tag{5.26}$$

其积分范围是：对于一切和 K 相交的带 B_i 和对于一切被恰好 r

个带覆盖的 P。我们有

$$I_r=\binom{n}{r}\int_{P\in B_i} dP\wedge dB_1\wedge\cdots\wedge dB_r\int_{P\in B_h} dB_{r+1}\wedge\cdots\wedge dB_n, \tag{5.27}$$

其中 $i=1,2,\cdots,r$；$h=r+1,\cdots,n$。由于含 P 在内的带的测度是 πa，而不含 P 的带的测度是 $(L+\pi a)-\pi a=L$，我们就有

$$I_r=\binom{n}{r}(\pi a)^r L^{n-r}F. \tag{5.28}$$

另一方面，若在计算 I_r 时，先固定诸带 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，则有

$$I_r=\int f_r dB_1\wedge dB_2\wedge\cdots\wedge dB_n, \tag{5.29}$$

积分范围是一切和 K 相交的 B_r。由(5.28)与(5.29)，就得

$$\int f_r dB_1\wedge dB_2\wedge\cdots\wedge dB_n=\binom{n}{r}(\pi a)^r L^{n-r}F. \tag{5.30}$$

由于和 K 相交的 n 带组的集合的测度是 $(L+\pi a)^n$，我们得

已给 n 个和凸集 K 相交而宽度为 a 的带，则 K 内恰好被 r 个带覆盖的部分平均面积是

$$E(f_r)=\frac{\binom{n}{r}(\pi a)^r L^{n-r}F}{(L+\pi a)^n},\quad r=0,1,2,\cdots,n. \tag{5.31}$$

若按照 $na=a=$ 常数(即 n 个带的宽度总和等于常数 a)的规律令 $n\to\infty$，同时 $a\to 0$，就得

$$E(f_r)\to\frac{1}{r!}\binom{\pi a}{r}^r F\exp\left(-\frac{\pi a}{L}\right). \tag{5.32}$$

例如 K 内不被任何带覆盖的平均面积，其极限是

$$E(f_0)=F\exp(-\pi a/L).$$

换句话说，这些结果可以写成下面形式：

若假定n个宽度为a的带随机地和一个凸集K相交，则K的一点恰好属于r个带的概率是

$$p_r=\binom{n}{r}\frac{(\pi a)^r L^{n-r}}{(L+\pi a)^n},\quad r=0,1,2,\cdots,n. \qquad (5.33)$$

若$n\to\infty$，$a\to 0$而$na=\alpha$(常数)，则

$$p_r\to\frac{1}{r!}\left(\frac{\pi\alpha}{L}\right)^r\exp\left(-\frac{\pi\alpha}{L}\right).$$

5. **注记**

(1) Buffon **问题的推广**。假定针长L超过平行线之间的距离D。这时它同至少一条平行线相交的概率是

$$p=\frac{2}{\pi}\mathrm{arc}\ \cos\frac{D}{L}+\frac{2}{\pi D}[L-(L^2-D^2)^{1/2}]. \qquad (5.34)$$

更具体些，若假定$D=1$而$L=n+L'(0\leqslant L'\leqslant 1)$，则那根针同恰好$h$条平行线$(1\leqslant h\leqslant n+1)$相交的概率是

$$p_h=\frac{2}{\pi}[(h+1)\alpha_{h+1}-2h\alpha_h+(h-1)\alpha_{h-1}]$$

$$+\frac{2L}{\pi}(\cos\alpha_{h+1}-2\cos\alpha_h+\cos\alpha_{h-1}), \qquad (5.35)$$

其中对于$i=1,2,\cdots,n$，α_i是$L\sin\alpha_i=i$所确定的角，而$\alpha_{n+1}=\pi/2$。当$h=n+1$时，$p_{n+1}=2L\pi^{-1}\cos\alpha_n+2n\pi^{-1}(\alpha_n-\pi/2)$。见[335]。

(2) **关于折线的** Buffon **问题**。假定平面上画有平行直线，行距是D。把一根折线$\gamma=BAC$随机地放上去，折线两边AB，AC的长是$|AB|=a$，$|AC|=b$。假定三角形ABC最长的一边小于D。作为练习，证明γ同平行线有零个，一个或两个交点的概率依次是

$$p_0 = 1 - \frac{a+b+c}{\pi D}, \quad p_1 = \frac{2c}{\pi D}, \quad p_2 = \frac{a+b-c}{\pi D},$$

其中 $c=|BC|$（图5.6）。

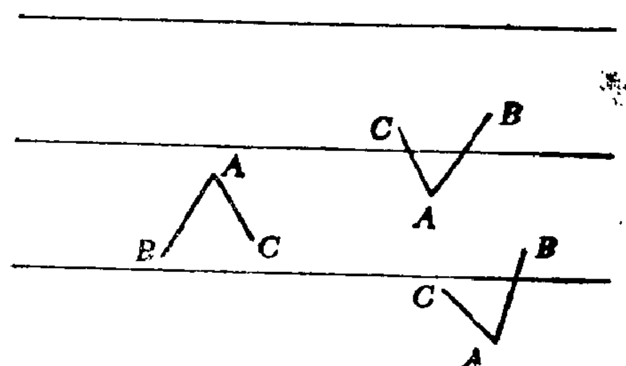


图 5.6

（3）**黑白随机带**。设 K 为凸集，面积是 F，周长是 L，而且假定是白色的。假定用一个宽度为 a 的黑色带 B_1 随机地跨过 K 那以后，用一个宽度同样为 a 的白色带 B_2 随机地跨过 K，而且把它和 B_1 相交部分的黑色抹掉。继续这个过程，随机而交替地画上黑带和白带（图5.7）。在画了 $n+1$ 个黑带和 n 个白带后，K 内黑色面积的平均值是

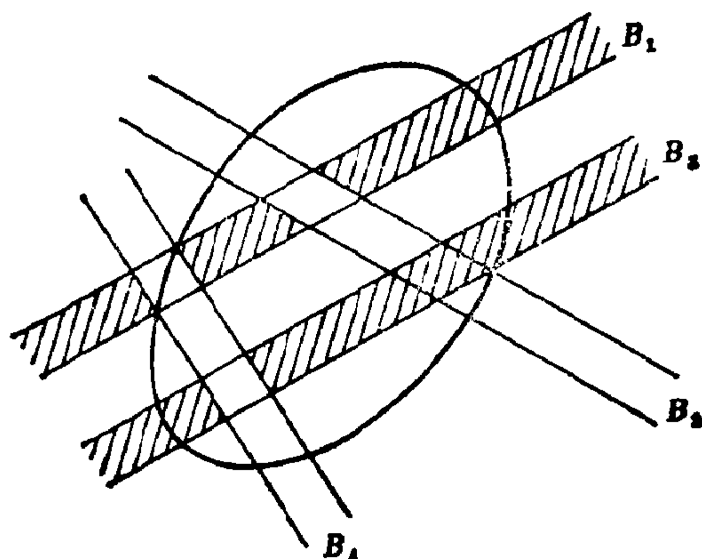


图 5.7

$$E(f_{2n+1}) = \frac{\pi aF}{L+\pi a}\left[1 + \left(\frac{L}{L+\pi a}\right)^2 + \left(\frac{L}{L+\pi a}\right)^4 + \cdots\right.$$

$$+\left(\frac{L}{L+\pi a}\right)^{2n}\Bigg]. \tag{5.36}$$

而在画了 $n+1$ 个黑带和 $n+1$ 个白带后，平均值变成

$$E(f_{2n+2})=\frac{\pi a F L}{(L+\pi a)^2}\left[1+\left(\frac{L}{L+\pi a}\right)^2+\left(\frac{L}{L+\pi a}\right)^4+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{L}{L+\pi a}\right)^{2n}\right]. \tag{5.37}$$

当 $n\to\infty$ 时，得

$$E(f_{2n+1})\to\frac{F(L+\pi a)}{2L+\pi a},\quad E(f_{2n+2})\to\frac{FL}{2L+\pi a}. \tag{5.38}$$

（见[534]。）

第六章　平面上的运动群：运动密度

1．平面上的运动群

我们曾经要求平面上的点密度和线密度在运动群下不变。这个运动群以后用 $\mathfrak{M}$ 表示。现在，我们要具体地讨论这个群 $\mathfrak{M}$，以便在此基础上进行第九章关于方阵群的一般探讨。

设在欧氏平面上建立了直角坐标系。一个运动是一个变换 u：$P(x,y)\rightarrow P'(x',y')$，它用方程

$$x'=x\cos\phi-y\sin\phi+a,\quad y'=x\sin\phi+y\cos\phi+b \quad (6.1)$$

表示，其中 a,b,ϕ 是参数，它们的范围依次是

$$-\infty<a<\infty,\quad -\infty<b<\infty,\quad 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi. \quad (6.2)$$

若 K 为一个点集而 $K'=uK$ 为在 u 下 K 的象，我们就说，K 和 K' 全等①。

容易给出参数 a,b,ϕ 的几何意义。设 $(O;\ x,y)$ 表示原点 O 和 x,y 轴所构成的直角标架(图6.1)。假定经过运动 u，标架 $(O;\ x,y)$ 的象是标架 $(O';\ x',y')$，则 a,b 为 O' 在 $(O;\ x,y)$ 里的坐标，而 ϕ 为从 x 轴到 x' 轴的角。

群的幺元是恒等变换 $a=0,b=0,\phi=0$。有时利用方阵

$$u=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & a\\ \sin\phi & \cos\phi & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad (6.3)$$

来表示运动 u 以代替方程组(6.1)。

这样，运动 u_2u_1 就用方阵积 u_2u_1 表示。而逆运动 u^{-1} 则用逆方阵

---

① 在这里，运动不包括对于平面上一条直线的反射，因而全等不包括一般“对称”。——译者

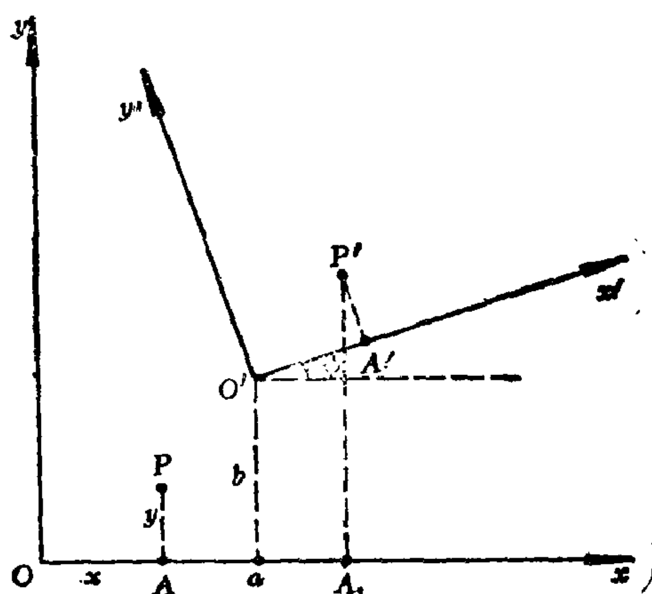


图 6.1

$$u^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & -a\cos\phi-b\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi & a\sin\phi-b\cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.4)$$

表示。

因此，运动群 $\mathfrak{M}$ 可以看作具有形状(6.3)的方阵群，其元素的合成规律是普通的方阵积。我们将用同一个记号来表示一个运动和其对应方阵。

每一个运动可以用三维空间一点(a,b,ϕ)来确定。这个空间，附上等价关系$(a,b,\phi)\sim(a,b,\phi+2k\pi)$（$k$ 为任意整数），是群 $\mathfrak{M}$ 的空间，也用同一个字母 $\mathfrak{M}$ 表示。

每一个运动 $s\in\mathfrak{M}$ 确定 $\mathfrak{M}$ 的两个自同态：

左移

$$L_s:\ u\to su \qquad (6.5)$$

与右移

$$R_s:\ u\to us. \qquad (6.6)$$

例如，若

$$
s=\begin{pmatrix} \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 & a_0 \\ \sin\phi_0 & \cos\phi_0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.7}
$$

则

$$
L_s:\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a \\ \sin\phi & \cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow\begin{pmatrix} \cos(\phi+\phi_0) & -\sin(\phi+\phi_0) & a\cos\phi_0-b\sin\phi_0+a_0 \\ \sin(\phi+\phi_0) & \cos(\phi+\phi_0) & a\sin\phi_0+b\cos\phi_0+b_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.8}
$$

而这可以写成

$$
L_s\begin{cases} a\rightarrow a\cos\phi_0-b\sin\phi_0+a_0, \\ b\rightarrow a\sin\phi_0+b\cos\phi_0+b_0 \\ \phi\rightarrow\phi+\phi_0. \end{cases} \tag{6.9}
$$

同样，

$$
R_s\begin{cases} a\rightarrow a_0\cos\phi-b_0\sin\phi+a, \\ b\rightarrow a_0\sin\phi+b_0\cos\phi+b, \\ \phi\rightarrow\phi_0+\phi. \end{cases} \tag{6.10}
$$

2. $\mathfrak{M}$ 上的微分齐式

$\mathfrak{M}$ 上一个一次微分齐式或一次式(或 Pfaffian 齐式)是任意一个具有形状

$$
\omega(u)=\alpha(u)\mathrm{d}a+\beta(u)\mathrm{d}b+\gamma(u)\mathrm{d}\phi \tag{6.11}
$$

的式，其中 $\alpha(u),\beta(u),\gamma(u)$ 是在空间 $\mathfrak{M}$ 内确定的，属于 C^∞ 类的函数，即含 $\mathfrak{M}$ 内 u 点的坐标 a,b,ϕ 的无限次可微的函数。

在 $\mathfrak{M}$ 上，一切在 u 点的一次微分齐式，附以自然确定的加法和同纯量的乘法

$$
(\omega_1(u)+\omega_2(u)=(\alpha_1+\alpha_2)\mathrm{d}a+(\beta_1+\beta_2)\mathrm{d}b+(\gamma_1+\gamma_2)\mathrm{d}\phi,
$$

$$\lambda\omega = \lambda\alpha\mathrm{d}a + \lambda\beta\mathrm{d}b + \lambda\gamma\mathrm{d}\phi)$$

构成一个三维矢空间，称为在 u 的一次式矢空间（或 $\mathfrak{M}$ 在 u 点的余切空间），并用 T_u^* 表示。一次齐式 $\mathrm{d}a,\mathrm{d}b,\mathrm{d}\phi$ 或者它们的任意一组三个独立的线性组合构成 T_u^* 的一个底。左移 L_s 和右移 R_s 在 T_u^* 上导出映象

$$L_s^*:\ \omega(u)\to\omega(su),\quad R_s^*:\ \omega(u)\to\omega(us). \tag{6.12}$$

利用(6.9)和(6.10)，可以写出 $\omega(su)$ 和 $\omega(us)$ 的显式，其结果是变换方程

$$L_s^*\begin{cases} \mathrm{d}a\to\cos\phi_0\mathrm{d}a-\sin\phi_0\mathrm{d}b,\\ \mathrm{d}b\to\sin\phi_0\mathrm{d}a+\cos\phi_0\mathrm{d}b,\\ \mathrm{d}\phi\to\mathrm{d}\phi;\end{cases} \tag{6.13}$$

$$R_s^*\begin{cases} \mathrm{d}a\to-(a_0\sin\phi+b_0\cos\phi)\mathrm{d}\phi+\mathrm{d}a,\\ \mathrm{d}b\to(a_0\cos\phi-b_0\sin\phi)\mathrm{d}\phi+\mathrm{d}b,\\ \mathrm{d}\phi\to\mathrm{d}\phi.\end{cases} \tag{6.14}$$

一个重要的命题是求 $\mathfrak{M}$ 上一切分别在 L_s^* 下和在 R_s^* 下不变的一次式，它们依次称为左不变一次式和右不变一次式。为此，我们注意方阵

$$\Omega_L = u^{-1}\mathrm{d}u \tag{6.15}$$

在左移下是不变的，这是因为

$$L_s^*\Omega_L = (su)^{-1}d(su) = u^{-1}s^{-1}s\mathrm{d}u = u^{-1}\mathrm{d}u = \Omega_L. \tag{6.16}$$

故 Ω_L 的元素是左不变一次式。由(6.3)和(6.4)，得

$$\Omega_L = u^{-1}\mathrm{d}u = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{d}\phi & \cos\phi\mathrm{d}a+\sin\phi\mathrm{d}b\\ \mathrm{d}\phi & 0 & -\sin\phi\mathrm{d}a+\cos\phi\,\mathrm{d}b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

故一次齐式

$$\begin{cases} \omega_1=\cos\phi\mathrm{d}a+\sin\phi\mathrm{d}b,\\ \omega_2=-\sin\phi\mathrm{d}a+\cos\phi\mathrm{d}b,\\ \omega_3=\mathrm{d}\phi\end{cases} \tag{6.18}$$

是左不变一次式。

显然，$\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 的任意一个常系数线性组合在 L_s^* 下也是不变一次式[①]。我们将要证明：逆命题也是正确的，即$\mathfrak{M}$的任意一个左不变式是一次式(6.18)的常系数线性组合。

为了证明这个事实，我们指出：$\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 是独立的(因为作为 $\mathrm{d}a,\mathrm{d}b,\mathrm{d}\phi$ 的线性组合，它们的系数行列式不等于零)，因此，它们构成 T_s^* 的底，而每一个一次式 $\omega(u)$ 可以写成

$$\omega(u)=\alpha(u)\omega_1+\beta(u)\omega_2+\gamma(u)\omega_3.$$

若 ω 在 L_s^* 下不变，则

$$\omega(su)=\alpha(su)\omega_1(su)+\beta(su)\omega_2(su)+\gamma(su)\omega_3(su).$$

但 $\omega_i(su)=\omega_i(u)\,(i=1,2,3)$，故

$$(\alpha(su)-\alpha(u))\omega_1(u)+(\beta(su)-\beta(u))\omega_2(u)$$
$$+(\gamma(su)-\gamma(u))\omega_3(u)=0.$$

根据 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 的独立性，由此可知

$$\alpha(su)=\alpha(u),\quad \beta(su)=\beta(u),\quad \gamma(su)=\gamma(u),$$

这表明(因为 s 是$\mathfrak{M}$的任意点)，α,β,γ 是常数。这样，我们就解决了求$\mathfrak{M}$的一切左不变一次式问题.

为了求右不变一次式，我们取方阵

$$\Omega_R=\mathrm{d}uu^{-1}, \tag{6.19}$$

它是在 R_s^* 下不变的，因为

$$R_s^*\Omega_R=\mathrm{d}(us)(us)^{-1}=\mathrm{d}uss^{-1}u^{-1}=\mathrm{d}uu^{-1}=\Omega_R.$$

根据(6.3)和(6.4)，可得

$$\Omega_R=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{d}\phi & b\mathrm{d}\phi+\mathrm{d}a\\ \mathrm{d}\phi & 0 & -a\mathrm{d}\phi+\mathrm{d}b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{6.20}$$

---

① 原文作："另一方面，$\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 是独立齐式（因为 $\mathrm{d}a,\mathrm{d}b,\mathrm{d}\phi$ 的系数行列式不等于零），因此它们的每一个常系数线性组合在 L_s^* 下也是不变一次式。"由于$\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 的独立并不是这里结论的必要条件，故这里的译文作了删节，而把 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 独立性的根据移注于下面的证明中。——译者

故有下列右不变一次式：

$$\omega^1 = b\mathrm{d}\phi + \mathrm{d}a, \quad \omega^2 = -a\mathrm{d}\phi + \mathrm{d}b, \quad \omega^3 = \mathrm{d}\phi. \tag{6.21}$$

$\omega^1, \omega^2, \omega^3$ 的任意一个常系数线性组合是右不变一次式．而通过和上面相同的证明，可以看出，倒转来，$\mathfrak{M}$ 的任意一个右不变一次式是一次式(6.21)的常系数线性组合。

最后，把恒等式 $uu^{-1} = e =$ 幺方阵微导，我们得 $\mathrm{d}uu^{-1} + u\mathrm{d}u^{-1} = 0$，因此

$$\mathrm{d}u^{-1} = -u^{-1}\mathrm{d}uu^{-1}. \tag{6.22}$$

由这个等式以及(6.15)，(6.19)，得

$$\Omega_L(u^{-1}) = -\Omega_R(u). \tag{6.23}$$

这是一个以后有用的一个重要关系。

3. 运动密度

由于 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 是左不变一次式，外积

$$\mathrm{d}K = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}\phi \tag{6.24}$$

是左不变三次式．不但如此，除一个常数因子外，$\mathrm{d}K$ 还是 $\mathfrak{M}$ 上唯一的左不变三次式．证明如下．

若

$$\psi = f(a, b, \phi)\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}\phi = f(u)\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

是一个左不变三次式，则

$$f(su)\omega_1(su) \wedge \omega_2(su) \wedge \omega_3(su) = f(u)\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3.$$

而由于 $\omega_i(su) = \omega_i(u)\ (i = 1, 2, 3)$，可知 $f(su) = f(u)$。由于任意的 u 可以通过一个适当的左移 s 变成任意的 su[1]，函数 f 在 $\mathfrak{M}$ 的一切点有相同的值：即它是常数。

由(6.21)可知

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}\phi = \mathrm{d}K, \tag{6.25}$$

即微分齐式 $\mathrm{d}K$ 也是右不变式。根据与上面相同的论证可知，除

---

[1] 这句话的意思也就是：若 u, v 为 m 的任意两点，令 $s = vu^{-1}$ 就得 $su = v$。——译者

一个常数因子外，它是在右移下唯一的不变三次式。最后，由(6.23)[①]，可知

$$dK(u^{-1}) = -dK(u); \tag{6.26}$$

即：除一个符号外，在运动逆转(即取运动 u 的逆运动 u^{-1})中，dK 也是不变式。由于我们对于密度总是取绝对值，(6.26)里的变号是不起作用的，于是可以断言：三次式(6.24)在左移和右移下，以及在运动逆转中，都是不变的。它叫做平面上运动群的运动密度。

运动密度 dK 是运动群$\mathfrak{M}$的空间的不变体积元素。在$\mathfrak{M}$上一个域内取 dK 的积分，就得其对应的运动集合的测度（运动测度）。现在我们举几个例来说明运动测度的几何意义及其不变性。

取一个长方形 $K = OABC$ 和一个固定的域 K_0 如图6.2 所示。设运动 u 令 $uK \cap K_0 \neq \varnothing$，试考虑一切这样的运动 u 所构成的集合的测度。上述集合也就是把K移动到和 K_0 相交的位置的运动

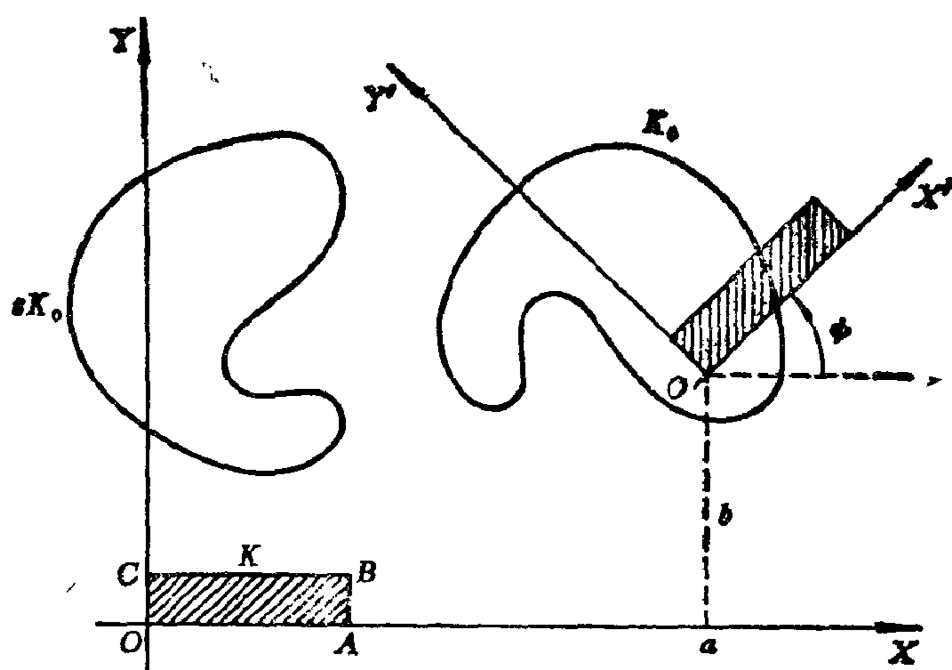


图 6.2

① 原文作(6.22)，疑误。由(6.23)以及(6.17)，(6.18)和(6.20)，(6.21)可知，$\Omega_L(u^{-1})$的元素$\omega_1(u^{-1})$，$\omega_2(u^{-1})$，$\omega_3(u^{-1})$依次等于$-\Omega_R(u)$的对应元素$-\omega^1(u)$、$-\omega^2(u)$，$-\omega^3(u)$，故由(6.24)和(6.25)得(6.26)。——译者

的集合．所考虑的测度等于 $dK=da\wedge db\wedge d\phi$ 的一个积分，积分范围是使 $uK\cap K_0\neq\varnothing$ 的点 $O'(a,b)$ 和角 ϕ。这个测度的左不变性表示，我们可以用 K_0 在运动 s 下的象 sK_0 来代替 K_0，因为这样做并不影响测度。换句话说，对于任意固定的 s，令 $uK\cap K_0\neq\varnothing$ 的运动的测度等于令 $uK\cap sK_0\neq\varnothing$ 的测度。

测度的右不变性表示，我们可以取 sK 来代替 K，而令 $u(sK)\cap K_0\neq\varnothing$ 的运动测度与前相同。由此可见，运动测度与 K 或 K_0 的初始位置无关，因而求上述运动集合的测度问题可代以求"同域 K_0 有公共点，而和 K 全等的长方形的测度"问题。这种以"全等图形集合"为基础的提法比以"运动集合"为基础的提法，显然是等价的，有时却更直观。

取运动的逆而 dK 不变，这表明令 $uK\cap K_0\neq\varnothing$ 的运动 u 的集合的测度等于令 $K\cap u'K_0\neq\varnothing$ 的运动 $u'=u^{-1}$ 的测度。例如，若 K 缩成一点 $P_0(0,0)$，而令 $uP_0=P(a,b)$，则

$$m(u;uP_0\in K_0)=\int_{uP_0\in K_0}da\wedge db\wedge d\phi$$

$$=2\pi\int_{uP_0\in K_0}da\wedge db=2\pi F_0, \qquad (6.27)$$

其中 F_0 是 K_0 的面积。若考虑令 $P_0\in u'K_0$ 的逆运动 u'，其结果应相同，故

$$m(u';P_0\in u'K_0)=\int_{P_0\in u'K_0}dK_0=2\pi F_0, \qquad (6.28)$$

其中我们用 dK_0 表示现在运动中的图形是 K_0。方程(6.28)是一个简单而有用的公式.

注记。根据上面的分析，可见在计算一个图形 K 的全等图形位置的集合测度时，必须选取一个固定在 K 内的标架 $(O';x',y')$（动标），然后在那个集合范围内积分 $dK=da\wedge db\wedge d\varphi$，其中 a，b 是 O' 在固定标架 $(O;x,y)$（定标）里的坐标，而 ϕ 则由 x 轴到 x' 轴的角(图6.3)。

动标的选择是任意的。事实上，若选取动标，$(O_1;x_1,y_1)$ 来

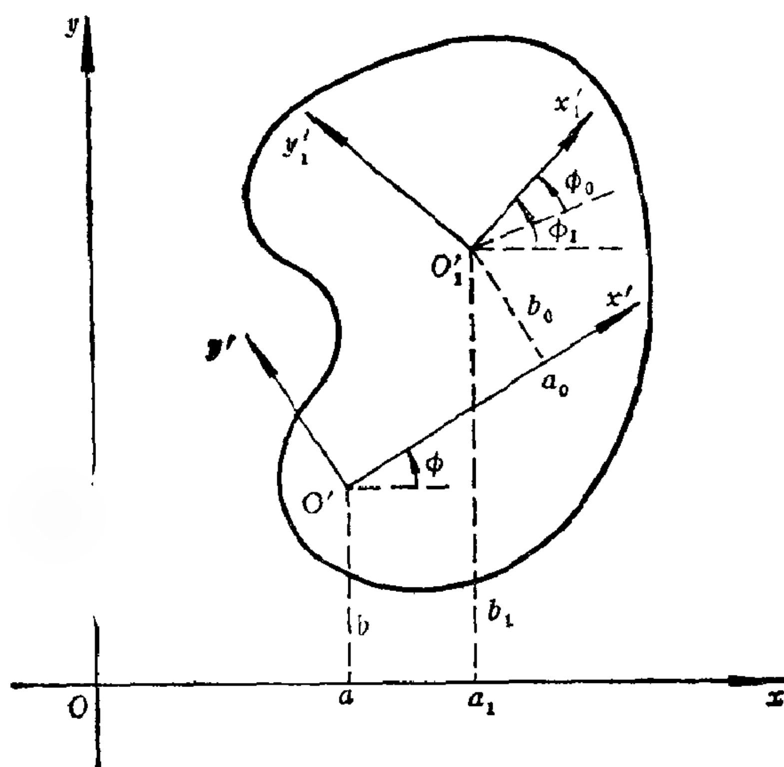


图 6.3

代替$(O';x',y')$，并设a_0,b_0为O_1'在标架$(O';x',y')$里的坐标，而ϕ_0为$O'x'$到$O_1'x_1'$的角，则

$$\begin{cases} a_1 = a + a_0\cos\phi - b_0\sin\phi, \\ b_1 = b + a_0\sin\phi + b_0\cos\phi, \\ \phi_1 = \phi + \phi_0, \end{cases} \tag{6.29}$$

而这正是右移(6.10)的变换方程，因此运动密度不变。换句话说，$\mathrm{d}K$的右不变性等价于在动标变更下的不变性。这个性质使我们可以在每一个具体实例中选取较适当的动标。

运动密度的其他表达形式。设$(P;x',y')$为动标，其原点在$P(a,b)$，而由x轴到Px'轴的角是ϕ(图6.4)。若用新的坐标来确定这个动标，就会获得$\mathrm{d}K$新的表达式。例如，设用$G(p,\theta)$表示直线Px'，而用H表示从O到G的垂足，并令$t=PH$，就可以用G和t确定$(P;x',y')$。变换公式是

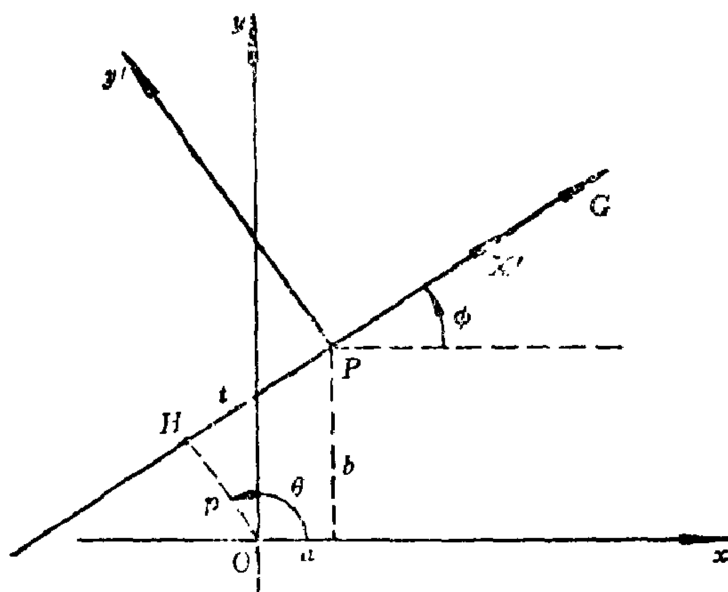


图 6.4

$$a = p\cos\theta + t\sin\theta, \quad b = p\sin\theta - t\cos\theta, \quad \phi = \theta - \pi/2.$$

故 $dK = da \wedge db \wedge d\phi = dp \wedge d\theta \wedge dt$，或者

$$dK = dG^* \wedge dt, \tag{6.30}$$

其中我们用 G^* 来标明 G 必须看作有向直线，因为动标$(P;x',y')$随着 G 的方向改变而改变。每一条无向直线对应于两条有向直线。

若令 $dP = da \wedge db$，则(6.30)可以写成

$$dP \wedge d\phi = dG^* \wedge dt. \tag{6.31}$$

下面是 dK 的另一种表达式。平面上平移决定于两个参数 a，b，因而在运动群中，平移的集合的测度是零。因此在讨论运动集合的测度时，可以把平移排除在外。除平移外，每一个运动 u 是绕一个定点 Q 的转动，Q 称为 u 的转动中心。设 ξ,η 为 Q 的坐标，ϕ 为转动角，并设转动 u 把标架$(O;x,y)$变成$(O';x',y')$。则坐标 a,b,ϕ 和 ξ,η,ϕ 之间的关系是

$$a = (1-\cos\phi)\xi - \sin(\phi)\eta, \quad b = -\sin(\phi)\xi + (1-\cos\phi)\eta.$$

这可以在方程(6.1)中令 $x = x' = \xi$，$y = y' = \eta$ 得到。由上面的变

换公式，容易算出

$$dK = 4\sin^2(\phi/2)d\xi\wedge d\eta\wedge d\phi. \tag{6.32}$$

这个表达式不能用于平移，因为对于平移，Q是一个无穷远点。

4. 线段集合

设K_0为固定凸集，面积是F_0，周长是L_0。设K为长度等于l的有向线段。我们要计算同K_0相交而和K全等的线段集合的测度（图6.5）。选取运动密度的表达式(6.30)，令G为含线段K在内的直线，σ为弦$G\cap K_0$之长，则（利用(3.6)和(3.12)），

$$m(K;K\cap K_0\neq\varnothing)=\int_{K\cap K_0\neq\varnothing}dG^*\wedge dt=\int_{G\cap K_0\neq\varnothing}(\sigma+l)dG^*$$
$$=2\pi F_0+2lL_0. \tag{6.33}$$



图 6.5

因此，若一个凸集的面积为F_0，周长为L_0，则一切长度等于l而和该凸集有公共点的有向线段的测度为$2\pi F_0+2lL_0$。

关于求含于K_0内的定长线段的测度问题，没有简单答案，其结果同K_0的形状密切相关。对于直径等于$D\geq l$的圆C，通

过直接计算可得

$$m(K;K\subset C)=(\pi/2)[\pi D^2-2D^2\arcsin(l/D)-2l(D^2-l^2)^{1/2}],\tag{6.34}$$

而对于边长等于$a,b(l\leqslant a,l\leqslant b)$的长方形$R$，则有

$$m(K;K\subset R)=2(\pi ab-2(a+b)l+l^2)。\tag{6.35}$$

在l满足某些条件下，对于一个凸多边形，其相应测度将在下面(6.44)给出。

若K_0缩成长度为l_0的线段，测度(6.33)化为$4ll_0$。若K_0为总长等于L_0的折线，则对于K_0每边计算这个测度，然后对一切边相加，就得

$$\int_{K\cap K_0\neq\varnothing}n\mathrm{d}K=4lL_0,\tag{6.36}$$

其中n表示在线段K各个位置上，K_0同K有公共点的边数(图6.6)。

现在，我们计算同一个角A的两边都相交而长度为l的有向线段K的测度。我们用A同时表示角的顶点与角的大小。用σ表示角A从K所在的直线G截下的弦(图6.7)，则

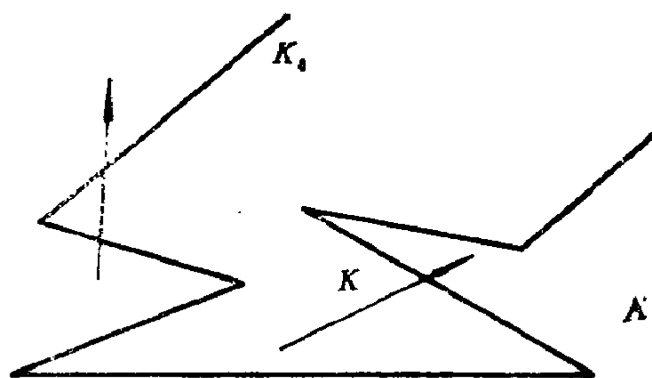


图 6.6

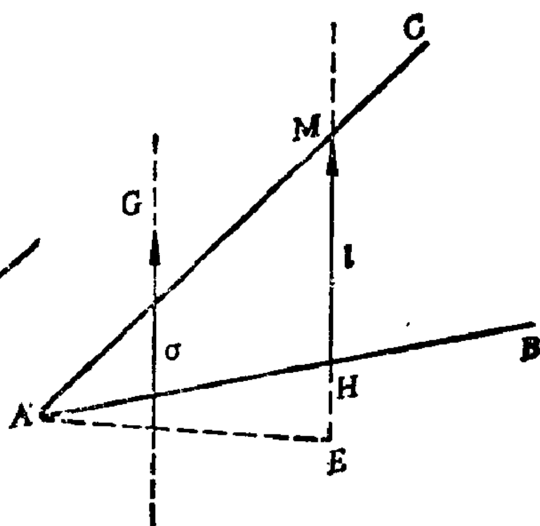


图 6.7

$$m(K;K\cap AB\neq\varnothing,K\cap AC\neq\varnothing)=\int dG^*\wedge dt=2\int_{\sigma\leqslant l}(l-\sigma)dG. \tag{6.37}$$

又

$$\int_{\sigma<l}l dG=l\int_{\sigma<l}dp\lambda d\phi=l\int|AE|d\phi=2\int_0^{\pi-A}Td\phi, \tag{6.38}$$

其中T是垂直于方向ϕ而具有长度l的弦HM所确定的三角形AHM的面积。

另一方面，

$$\int_{\sigma\leqslant l}\sigma dG=\int_{\sigma\leqslant l}\sigma dp\wedge d\phi=\int_0^{\pi-A}Td\phi. \tag{6.39}$$

因此，

$$m(K;K\cap AB\neq\varnothing,K\cap AC\neq\varnothing)=2\int_0^{\pi-A}Td\phi. \tag{6.40}$$

为了计算这个积分，注意

$$2T=(l^2/\sin A)\sin\phi\sin(A+\phi), \tag{6.41}$$

故

$$m=\frac{l^2}{\sin A}\int_0^{\pi-A}\sin\phi\sin(A+\phi)d\phi=\frac{l^2}{2}[1+(\pi-A)\cot A]. \tag{6.42}$$

于是，一切同一个角A两边都相交而长度为l的有向线段的测度如(6.42)所示。

在一个已给凸多边形内部的线段集合。 设K_0为一个凸多边形而K为一个有向线段，假定K的长l限定它不能同两条不相邻的边都相交。

设$m_i(i=0,1,2)$为同K_0的边界恰好有i个公共点的一切K的位置的测度(m_0是在K_0内部的一切线段K的测度)。公式(6.33)，(6.36)和(6.42)依次可以写作[1]

$$m_0+m_1+m_2=2\pi F_0+2lL_0,$$

$$m_1+2m_2=4lF_0,$$

[1] 公式里的A_i指K_0边界上的角，其下标与m_i的下标无涉。——译者

$$m_2 = (l^2/2)\sum_{A_i}[1 + (\pi - A_i)\cot A_i], \qquad (6.43)$$

因而

$$m_0 = 2\pi F_0 - 2lL_0 + \frac{l^2}{2}\sum_{A_i}[1 + (\pi - A_i)\cot A_i],$$

$$m_1 = 4lL_0 - l^2\sum_{A_i}[1 + (\pi - A_i)\cot A_i],$$

$$m_2 = \frac{l^2}{2}\sum_{A_i}[1 + (\pi - A_i)\cot A_i]. \qquad (6.44)$$

对于无向线段，这些结果都应除以 2。

. 同一个已给凸集相交的凸集

设 K_0 为具有面积 F_0 和周长 L_0 的凸集，而 K_1 为具有面积 F_1 和周长 L_1 的凸集。我们将计算同 K_0 有公共点的一切与 K_1 全等的凸集的测度，也就是同 K_0 相交的一切 K_1 的位置的测度。K_1 的位置决定于 K_1 中一点 P_1 的坐标 x_1, y_1 以及固定在 K_1 内的一个方向 P_1A 同固定在平面上的一个方向 P_0x 所作的角(图6.8)。

运动测度 $dK_1 = dx_1 \wedge dy_1 \wedge d\phi$，其中我们用 dK_1(代替 dK)

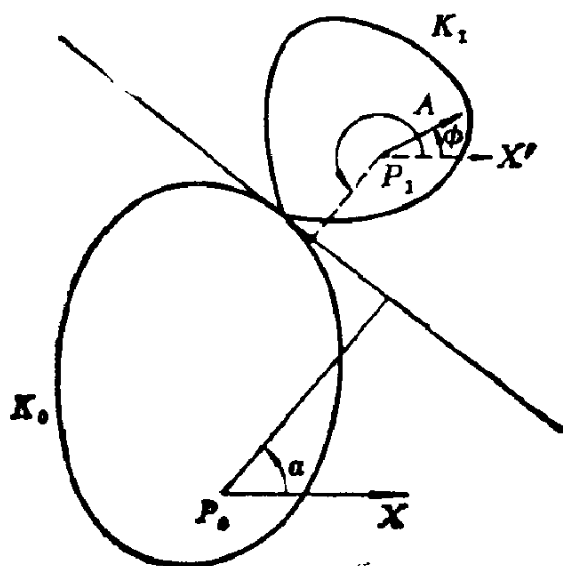


图 6.8

来表示它属于运动中的 K_1。我们要计算

$$m(K_1;K_1\cap K_0\neq\varnothing)=\int_{K_1\cap K_0\neq\varnothing}dK_1=\int_{K_1\cap K_0\neq\varnothing}dP_1\wedge d\phi. \tag{6.45}$$

设 $p_0(\alpha)$和 $p_1(\alpha)$依次为 K_0 和 K_1 的撑函数，依次相对于原点 $P_0(x_0,y_0)\in K_0$，$P_1(x_1,y_1)\in K_1$ 和平行的轴 P_0x,P_1x'。若固定ϕ而将 K_1 平移，使它和 K_0 外切(图6.8)，则 P_1 在平移中描出一条新的曲线，它是撑函数

$$p(\alpha)=p_0(\alpha)+p_1(\alpha+\pi) \tag{6.46}$$

所确定的凸集的边界。

按照第一章第三节，$p_1(\alpha+\pi)$是把 K_1 对 P_1 点作反射所得的凸集 K_1^* 的撑函数，因此，以 $p(\alpha)$为撑函数的凸集的面积是 $F_0+F_1+2F_{01}^*$，其中 F_{01}^* 是 K_0 和 K_1^* 的混合面积。所以，使 $K_0\cap K_1\neq\varnothing$ 的一切 K_1 的平移的测度是 $F_0+F_1+2F_{01}^*$。这是把(6.45)对 dP_1 积分的结果。

再对 $d\phi$ 积分，得

$$\begin{aligned}m(K_1;K_1\cap K_0\neq\varnothing)&=\int_0^{2\pi}(F_0+F_1+2F_{01}^*)d\phi\\&=2\pi(F_0+F_1)+L_0L_1,\end{aligned} \tag{6.47}$$

其中我们利用了(1.13)。注意 K_1 和 K_1^* 有相同的周长。于是证明了

一个凸集 K_1 同一个已给凸集 K_0 相交的一切位置的测度是

$$m(K_1;K_1\cap K_0\neq\varnothing)=\int_{K_1\cap K_0\neq\varnothing}dK_1=2\pi(F_0+F_1)+L_0L_1\ . \tag{6.48}$$

特款1. 若 K_1 为长度等于 l 的线段，则 $F_1=0,L_1=2l$，而(6.48)化为(6.33)。

特款2. 若 K_1 为半径等于R的圆，可以选取K_1的中心为 P_1。于是 $\int dK_1=2\pi\int dP_1$。公式(6.48)化为

$$\int_{K_0 \cap K_1 \neq \varnothing} \mathrm{d}P_1 = F_0 + L_0 R + \pi R^2. \qquad (6.49)$$

这是(1.18)中的第二公式，而这是当然的。

含在一个已给凸集内的凸集。 一个凸集 K_1 含在一个固定凸集 K_0 的位置的测度，一般地没有简单的表达式。但是，在 ∂K_1 和 ∂K_0 有连续的曲率半径，而且 ∂K_1 的最大曲率半径不大于 ∂K_0 的最小曲率半径的假设下，其答案是简单的。事实上，沿用上面记号，若把 K_1 平移，使它总是含在 K_0 内，则这样所得到的 P_1 的位置的集合是一个凸集，其撑函数是

$$p(\alpha) = p_0(\alpha) - p_1(\alpha). \qquad (6.50)$$

注意由于 $p + p'' = (p_0 + p_0'') - (p_1' + p_1'') > 0$(见第一章,第2节)，$p(\alpha)$的确是一个凸集的撑函数。根据(1.8)，这个凸集的面积是

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2 - p'^2)\mathrm{d}\phi = F_0 + F_1 - 2F_{01}. \qquad (6.51)$$

在 K_1 的一切转动范围内积分，并利用(1.13)，就得

$$m(K_1; K_1 \subset K_0) = 2\pi(F_0 + F_1) - L_0 L_1. \qquad (6.52)$$

于是得：

若 K_0 和 K_1 为有界凸集，其边界 ∂K_0 和 ∂K_1 有连续曲率半径，而且 ∂K_1 的最大曲率半径不大于 ∂K_0 的最小曲率半径，则含在 K_0 而和 K_1 全等的一切凸集的测度由(6.52)决定。若只考虑 K_1 的平移，则其相应测度由(6.51)决定。

若 ρ_m 是 ∂K_0 的最小曲率半径而 K_1 是半径为 $R(R \leqslant \rho_m)$ 的圆，并取 K_1 的中心为 P_1，则由(6.52)可知，含在 K_0 内的 K_1 的中心所构成的区域的面积，即距 K_0 为 R 的内平行凸集的面积是(参考第一章,第4节)

$$(2\pi)^{-1}m(K_1; K_1 \subset K_0) = F - LR + \pi R^2. \qquad (6.53)$$

若 ρ_M 为 ∂K_0 的最大曲率半径而 K_1 为半径等于 $R(R \geqslant \rho_M)$ 的圆，则(6.53)给出含整个 K_0 在内的圆 K_1 的中心所构成的区

域的面积。

6. 一些积分公式

(1) 设 K_0, K_1 为两个平面域，它们不一定是凸的，其面积依次为 F_0, F_1。假定 K_0 固定而 K_1 在运动。设 dK_1 为 K_1 的密度，设 $P(x,y)$ 为平面上一点而 $dP = dx \wedge dy$ 为其密度。考虑积分

$$I = m(P, K_1; P \in K_0 \cap K_1) = \int_{P \in K_0 \cap K_1} dP \wedge dK_1. \qquad (6.54)$$

其积分范围是满足 $P \in K_0 \cap K_1$ 的 P，和 K_1 的一切位置。若先令 P 固定并利用(6.28)，就得

$$I = \int_{P \in K_0} dP \int_{P \in K_1} dK_1 = 2\pi F_1 \int_{P \in K_0} dP = 2\pi F_0 F_1; \qquad (6.55)$$

若先令 K_1 固定，就得

$$I = \int_{K_1 \cap K_0 \neq \varnothing} dK_1 \int_{P \in K_1 \cap K_0} dP = \int_{K_1 \cap K_0 \neq \varnothing} f_{01} dK_1, \qquad (6.56)$$

其中 f_{01} 表示 $K_1 \cap K_0$ 的面积(图6.9)。由(6.55)和(6.56)得

$$\int_{K_1 \cap K_0 \neq \varnothing} f_{01} dK_1 = 2\pi F_0 F_1. \qquad (6.57)$$

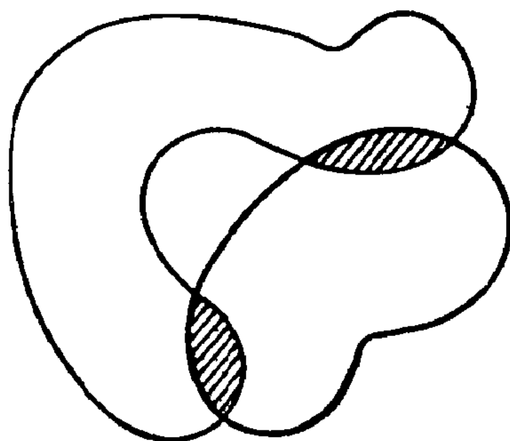


图 6.9

(2) 设 K_0, K_1 为平面区域，其面积依次为 F_0, F_1，而且它们的边界为可求长曲线，其长为 L_0, L_1。设 $A(s_0)$ 为 ∂K_0 上一点(s_0 表示弧长)，并考虑

$$J_1 = \int_{A \in K_1} \mathrm{d}s_0 \wedge \mathrm{d}K_1.$$

若先令 A 固定，就得

$$J_1 = \int_{\partial K_0} \mathrm{d}s_0 \int_{A \in K_1} \mathrm{d}K_1 = 2\pi F_1 L_0. \tag{6.58}$$

若先令 K_1 固定而用 l_{01} 表示 ∂K_0 在 K_1 内部分的弧长，则得

$$J_1 = \int_{K_1 \cap K_0 \neq \varnothing} \mathrm{d}K_1 \int_{A \in K_1} \mathrm{d}s_0 = \int_{K_1 \cap K_0 \neq \varnothing} l_{01} \mathrm{d}K_1. \tag{6.59}$$

由(6.58)和(6.59)，就得(图6.10)

$$\int_{K_0 \cap K_1 \neq \varnothing} l_{01} \mathrm{d}K_1 = 2\pi F_1 L_0. \tag{6.60}$$

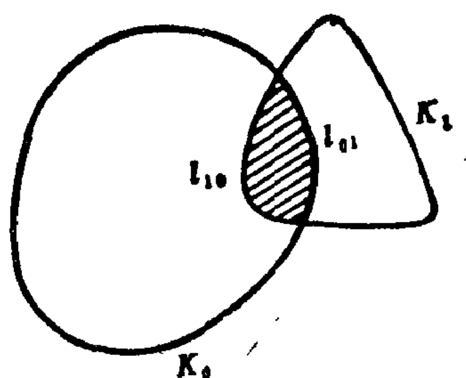


图 6.10

若 l_{10} 表示 ∂K_1 在 K_0 内部分的弧长，则根据运动测度在运动逆转中的不变性，与(6.60)类似，得

$$\int_{K_0 \cap K_1 \neq \varnothing} l_{10} \mathrm{d}K_1 = 2\pi F_0 L_1. \tag{6.61}$$

把(6.60)和(6.61)相加，得

$$\int_{K_0\cap K_1\neq\varnothing} L_{01}\mathrm{d}K_1 = 2\pi(F_1L_0 + F_0L_1), \qquad (6.62)$$

其中 L_{01}是 $K_0\cap K_1$的边界长。

(3) 设 K_0, K_1, K_2 为平面上三个有界凸集。假定 K_0 固定而 K_1,K_2 在运动，其运动密度依次为 $\mathrm{d}K_1$,$\mathrm{d}K_2$。连接应用(6.48)，得

$$m(K_1,K_2;K_0\cap K_1\cap K_2\neq\varnothing) = \int_{K_0\cap K_1\cap K_2\neq\varnothing} \mathrm{d}K_1\wedge \mathrm{d}K_2$$

$$= \int_{K_0\cap K_1\neq\varnothing}[2(F_2+f_{01}) + L_2L_{01}]\mathrm{d}K_1$$

$$= (2\pi)^2(F_1F_2 + F_0F_1 + F_0F_2) + 2\pi(F_0L_1L_2 + F_1L_0L_2 + F_2L_0L_1), \qquad (6.63)$$

在这里，我们利用了(6.56)和(6.62)。把(6.63)扩充到 n 个凸集是直接了当的[523]. Stoka [648,650,651]和 Filipercu[190] 获得了一些与此有关的结果，关于把(6.57)推广到 E_n 以及 Lebesque 可测集的问题，可参看[17,18]。

7. 一项中值；覆盖问题

设 K_0为面积等于 F_0，周长等于 L_0 的凸集，$K_1,K_2,\cdots,K_n$为互相全等，面积等于F，周长等于 L 的凸集。假定让 K_i 随机地落在平面上，使它们都和 K_0相交。我们求 K_0内被恰好 r 个 K_i覆盖的面积的中值($r=0,1,2,\cdots,n$)。在图 6.11 里，$n=4$，有阴影的面积对应于 $r=2$。为了上述目的，考虑积分

$$I_r = \int \mathrm{d}P\wedge \mathrm{d}K_1\wedge \mathrm{d}K_2\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}K_n, \qquad (6.64)$$

其积分范围是一切 K_0 内被恰好 r 个 K_i 覆盖的点 P，和一切满足 $K_i\cap K_0\neq\varnothing$的 K_i 的位置。若先令 P 固定，就有

$$I_r = \binom{n}{r}\int_{P\in K_0}(2\pi F)^r(2\pi F_0 + L_0L)^{n-r}\mathrm{d}P$$

$$=\binom{n}{r}(2\pi F)^r(2\pi F_0+L_0L)^{n-r}F_0. \tag{6.65}$$

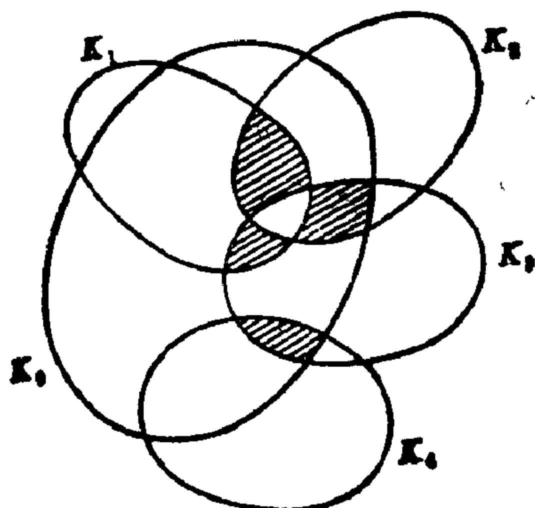


图 6.11

另一方面，若先令 $K_1, K_2, \cdots, K_n$固定，就有

$$I_r=\int_{K_i\cap K_0\neq\varnothing} f_r \mathrm{d}K_1\wedge \mathrm{d}K_2\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}K_n, \tag{6.66}$$

其中 f_r表示 K_0被恰好 r 个 K_i 覆盖的面积。于是所求中值是

$$E(f_r)=\frac{\binom{n}{r}(2\pi F)^r(2\pi F_0+L_0L)^{n-r}F_0}{[2\pi(F+F_0)+LL_0]^n}. \tag{6.67}$$

令 $n\to\infty$，同时 K_i 的面积和不变，即 $nF=a=$常数，考虑这时上述中值的极限。在(6.67)中，令 $F=a/n$，并取 $n\to\infty$时的极限，就得：

(a) 若 K_i趋于长度为 s 的线段，则 $L\to 2s$，

$$E(f_r)\to\frac{F_0}{r!}\left(\frac{\pi a}{\pi a+sL_0}\right)^r\exp\left(-\frac{\pi a}{\pi F_0+sL_0}\right). \tag{6.68}$$

(b) 若当 $F\to 0$ 时，K_i 的周长 $L\to 0$，则

$$E(f_r)\to\frac{F_0}{r!}\left(\frac{a}{F_0}\right)^r\exp\left(-\frac{a}{F_0}\right). \tag{6.69}$$

令 $r=0$，这些公式就给出 K_0内不被任何 K_i 覆盖的面积的中值。

由(6.65)可知，若随机地取凸集 K_0 内一点 P 和 n 个同 K_0相交而互相全等的凸集 K_i，则 P 点被恰好 r 个 K_i覆盖的概率是

$$p_r = \frac{\binom{n}{r}(2\pi F)^r(2\pi F_0 + L_0 L)^{n-r}}{[2\pi(F+F_0)+LL_0]^n}. \tag{6.70}$$

较困难而尚未解决的问题是求 K_0内每一点被恰好 r 个 K_i 覆盖的概率。所谓覆盖问题是指下述形式的问题，设 S 为固定点集而 A_i为含 S 在内的那个空间里一个叙列的随机集。这时，对于固定的 N，我们要求 $S\subset\bigcup_{i=1}^{N}A_i$的概率(覆盖概率).Cooke[122,123]给出了这些覆盖概率的一般上界和下界。这些概率一般地难以准确地计算，于是我们就寻求渐近的结果。下面我们举一个例。

设D是凸集 K_0的一个域。D 内一点被恰好 r 个凸集 K_i 覆盖的概率如(6.70)所示，假定 K_0 膨胀成整个平面，但同时 $n/F_0\to\rho$(正常数)。这时，不管 K_0的形状如何，$L_0/F_0\to 0$(第四章，第 4 节)，而(6.70)化为

$$\lim p_r = \frac{(\rho F)^r}{r!}e^{-\rho F}. \tag{6.71}$$

这个过程所产生的面积为F的凸集 K_i的无尽叙列，构成一个密度为 ρ 的凸集场。按照(6.71)，它们覆盖平面上一点的个数是一个参数为 ρF 的 Poisson 随机变量。同前面的情况一样，D 的每一点都被恰好 r 个 K_i 覆盖的概率还是不知道。对于D的面积 $F^*\to\infty$的款，Miles[412]给出了下面的渐近结果。

D的每一点被至少 r 块 K_i覆盖的概率是

$$\sim\exp\{-r\rho F^*\exp(-\rho F)[1+\cdots+(\rho F)^r/r!]\}, \tag{6.72}$$
$$r=0,1,2,\cdots,$$

而D的每一点被至多 r 块 K_i覆盖的概率($F^*\to\infty$的渐近值)是

$$\sim \exp\left[-(r+1)\rho F^{*}\exp(-\rho F)\left(\frac{(\rho F)^{r}}{r!}+\frac{(\rho F)^{r+1}}{(r+1)!}+\cdots\right]\right.,$$

(6.73)

$$r=0,1,2,\cdots,$$

其中 F^*是 D 的面积。

关于一类覆盖问题的文献评介，可参考 W.C.Guenther 与 P.T.Terragno[251]。关于球面上的覆盖问题，参看第十八章第 6 节注记4。

8. 注记与练习

(1) 两个中值．设 K_0 为面积等于 F_0，周长等于 L_0的固定凸集；$K_1,K_2,\cdots,K_n$为 n 个面积等于 F，周长等于 L 的互相全等凸集。假定让 K_i 随机地落在平面上，但都和 K_0 相交。设 u_r 为 K_0 被恰好 r 个 K_i覆盖部分的边界长，这个边界可能为若干个闭曲线所构成。这样，u_r的中值是以下两积分值之比：

$$\int_{K_i\cap K_0\neq\varnothing}u_r\mathrm{d}K_1\wedge\mathrm{d}K_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}K_n$$

$$=\binom{n}{r}(2\pi F)^r(2\pi F_0+LL_0)^{n-r}L_0$$

$$+n\left[\binom{n-1}{r-1}(2\pi F)^{r-1}(2\pi F_0+LL_0)^{n-r}2\pi F_0L\right.$$

$$\left.+\binom{n-1}{r}(2\pi F)^r(2\pi F_0+LL_0)^{n-r-1}2\pi F_0L\right]$$

(6.74)

和

$$\int_{K_i\cap K_0\neq\varnothing}\mathrm{d}K_1\wedge\mathrm{d}K_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}K_n=[2\pi(F+F_0)+LL_0]^n.$$

(6.75)

恰好被 r 个 K_i覆盖的区域数 N_r的中值(在图6.11里，$N_0=2$，$N_1=4$，$N_2=4$，$N_3=1$)是下面积分值和(6.75)之比：

$$
\begin{aligned}
&\int_{K_i \cap K_0 \neq \varnothing} N_r \mathrm{d}K_1 \wedge \mathrm{d}K_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}K_n \\
&\quad = n(2\pi F)^{r-1}(2\pi F_0 + LL_0)^{n-r-1} 2\pi F_0 \\
&\quad\quad \times \left[\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}(2\pi F_0 + LL_0)\right] \\
&\quad\quad + \binom{n}{r}(2\pi F)^r (2\pi F_0 + LL_0)^{n-r} \\
&\quad\quad + \binom{n}{2} 2\pi L \cdot F_0 (2\pi F)^{r-2}(2\pi F_0 + LL_0)^{n-r-2} \\
&\quad\quad \times \left[\binom{n-2}{r-2}(2\pi F_0 + LL_0)^2 + \binom{n-1}{r-1} 4\pi F (2\pi F_0 + LL_0)\right. \\
&\quad\quad \left. + \binom{n-2}{r}(2\pi F)^2\right] + LL_0 n (2\pi F)^{r-1}(2\pi F_0 \\
&\quad\quad + LL_0)^{n-r-1} \times \left[\binom{n-1}{r-1}(2\pi F_0 + LL_0)\right. \\
&\quad\quad \left. + \binom{n-1}{r} 2\pi F\right]. \qquad (6.76)
\end{aligned}
$$

在（6.74）和（6.76）里，当二项式系数没有意义时，就用零代入[560]。其他有关的中值以及到三维空间的推广见[658]。

（2）凸集的一个随机分布中的团数。设在一个面积 A 上随机地放上 N 个小薄凸片。若有一组的薄片，其中每一片搭上组中另一片，我们就说，这一组薄片构成一团①。为方便起见，若一个薄片不和别的相搭，它本身也算是一个团。Armitage[12]和Mack[385]考虑了下述问题：求表达团的期望数的近似公式。当人们需要在样品盘上数一数有多少个粒子，而粒子又太小，单个粒子和互相搭上的粒子不易区分时，上述问题就有重要意义。我们将考

① Clumps.——译者

虑一种简单的情况：所有N个薄片都是全等的，其面积是f，周长是u。

设确定K_i的位置的点和方向是P_i，ϕ_i，则K_i的运动密度是$dK_i = dP_i \wedge d\phi_i$。设$a$为面积$A$内一个域，它具有这样的性质：对于每一个和$a$相交的$K_i$，对应的$P_i$含在$A$内。随机给定一个薄片$K_r$，点$P_r \in a$的概率是$a/A$，因此，具有这个性质的$K_i$的平均个数是$Na/A$。另一方面，若$K_r$固定，对于一个随机$K_i$，它满足$K_i \cap K_r \neq \varnothing$的概率是$1-(4\pi f+u^2)/2\pi A$（利用(6.48)），一切$K_i$都满足$K_i \cap K_r = \varnothing$的概率是

$$[1-(4\pi f+u^2)/2\pi A]^{N-1}.$$

因此，不相搭的薄片的平均个数（只含一个薄片的团的个数c_1的中值）是

$$E(c_1) = \frac{Na}{A}\left[1-\frac{4\pi f+u^2}{2\pi A}\right]^{N-1}. \qquad (6.77)$$

为了求团的平均个数，我们先指出，在每一个团内，总有一个K_r，其对应点P_r有最大的横坐标x_r，因此，这个团就可以用该K_r来确定。这样，固定了K_r，另一个K_i和K_r相交的概率是$(4\pi f+u^2)/2\pi A$，因而由对称可知，K_i和K_r相交而且P_i的横坐标$x_i \geqslant x_r$的概率是$(4\pi f+u^2)/4\pi A$，而一切K_i都不具有上述性质的概率是

$$[1-(4\pi f+u^2)/4\pi A]^{N-1}.$$

于是具有这样性质的K_r的平均数（即团的个数c的平均值，这些团中，可能有只含一个薄片的）是

$$E(c) = \frac{Na}{A}\left[1-\frac{4\pi f+u^2}{4\pi A}\right]^{N-1}. \qquad (6.78)$$

假定$N \to \infty$，$A \to \infty$而且$N/A \to \lambda$（单位面积内平均薄片数），则

$$E(c_1) \to \lambda a \exp[-\lambda(2f+u^2/2\pi)], \qquad (6.79)$$

$$E(c) \to \lambda a \exp[-\lambda(f + u^2/4\pi)]。 \quad (6.80)$$

这些公式是 Mack[385]得到的，他还考虑了薄片不全等的情况。细节以及随机结团的理论见 Roach 的书[511]。

(3) 一个随机的点分布中，k-组的期望数。 假定有 n 点独立而均匀地分布在平面上一个区域里。已给一个域D，若上述 n 个点中恰好有 k 个含在D内，则这 k 个点构成一个 k-组。一个有趣的问题是，对于不同大小和形状的域 D，求这种 k-组的个数的中值。这问题曾被 Mach 所探究[382,383]。

Ambarcumjan [10] 把上述 n 个点所构成的有限集合叫做"撮①"，并假设它含在一个以原点O为中心半径等于R的基圆内。他考虑一个随机圆，半径为常数 r，中心在基圆中均匀分布，并求撮中有 k 个点含在该圆内的概率 $P_k(r)$. 若撮M是中心对称的，对称中心为O，而令 n 变成无穷大，则在撮中随机选取的 m-组的凸包的周长平均值 h_m满足不等式 $h_{m+2} \geqslant 4\rho(1-2^{-m-1})$，其中 ρ 表示从O到M里的点的平均距离. Ambarcujan 给出的另一个渐近结果是 $\rho^*/H \leqslant 1/4$，其中 ρ^*表示M里的点偶的平均距离，而H表示M的凸包的周长。

(4) 用直探针探到一个凸域的概率. 设 K_0 为凸域，在它里面有另一个凸域 K。在 K_0内随机地取一个长度为 s 的线段，这样的线段叫做探针。问题是要探出K，即求探针和K相交的概率(图6.12)。我们假定长度为 s 而和K相交的探针都含在 K_0内。根据(6.33)，探到K的概率是

$$p = \frac{m(S; S \cap K \neq \varnothing)}{m(S \subset K_0)} = \frac{2\pi F + 2sL}{m(S \subset K_0)}, \quad (6.81)$$

其中F和L依次是K的面积和周长. 若 K_0是一个半径 $R > 2s$ 的圆，则按(6.34)，得

① Clusters——译者

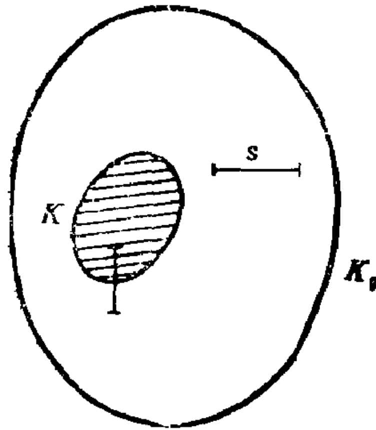


图 6.12

$\therefore \quad p(S\cap K\neq\varnothing)$

$$=\frac{4\pi F+4sL}{\pi[4\pi R^2-8R^2\arcsin(s/2R)-2s(4R^2-s^2)^{1/2}]}.$$

(6.82)

若 K_0是一个边长为 $a,b(a>s,b>s)$ 的长方形，则按(6.35)，得

$$p(S\cap K\neq\varnothing)=\frac{\pi F+sL}{\pi ab-2(a+b)s+s^2}. \qquad (6.83)$$

(参看[260]). Vinogradov 与 Zaregradsi [703] 讨论了下面的探测问题：所探测的是在一个凸域 K_0内均匀分布的随机对象，探测的方法是以固定速度在 K_0内描绘一条定长曲线.还可以参阅[468]. 关于网络的探测，参看[80]. 关于对生态学的应用，见[404].其他结果见[219].

(5) **连续随机步行中的自交.** 设平面上有 $n(n\geqslant3)$ 个线段，每段长为1，第一段始点是原点，以后每段始点是前一段的终点，而每一段的方向是具有均匀分布角度的随机方向，则这一叙列的线段构成一个 n 步步行，每一线段叫做一步，若把概率为零的事件略去不算，则步行中的一个自交指这样的事件：对于某个 i 和某个 j，其中 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 而且 $j-1>1$，第 i 步和第 j 步恰好有一个公共点作为两步的内点.

设 $E(n)$为自交数的期望值. 则对于大数 n，已知有渐近值

$$E(n)\sim(2\pi^2)n\log n.$$

参看 Melzak 的论文[406]，其中也给出了 $E(n)$ 的准确值（较复杂）。

(6) **等周不等式的又一个证明。** 假定 K_0 和 K_1 是两个全等凸集。这时(6.47)化为

$$m(K_1; K_1 \cap K_0 \neq \varnothing) = 4\pi F_0 + L_0^2$$

利用关于 dK_1 的表达式(6.32)，容易得到

$$m(K_1; K_1 \cap K_0 \neq \varnothing) = 4\pi F_0 + 4\int_{P \in K_0} \left(\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\right) dP,$$

其中 ϕ 是当我们以 $P(P \in K_0)$ 为中心把 K_0 转动时，不至使它同它的初始位置完全脱离的最大转角。于是得

$$\int_{P \in K_0} \left(\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\right) dP = \frac{L_0^2}{4}.$$

和 Crofton 公式(4.23)比较，就得等周不等式 $L_0^2 - 4\pi F_0 \geqslant 0$[531]。

(7) **定向**[①] **不均匀分布的随机图形。** 运动测度对于一切点 P 和关于几何图形的一切方向 ϕ，赋予了相等的"权"。这是因为我们假定了它在平移和转动下的不变性。若只假定它在平移下的不变性，我们就得到像 $dK^* = F(\phi)dP \wedge d\phi$ 那样的密度，并对其定向不均匀分布的图形，推得一些积分公式和概率。这个各向异性款曾为 S.W.Dufour 所探讨[155]。

练习1 关于相交凸集的一些积分公式。 设 K_0 和 K_1 为平面上两个有界点集，它们的面积和周长依次是 F_0, F_1 和 L_0, L_1。用 F_i 表示 $K_0 \cap K_1$ 的面积；F_{0e} 表示 $K_0 - K_0 \cap K_1$ 的面积；F_{1e} 表示 $K_1 - K_0 \cap K_1$ 的面积；L_{1i} 表示 ∂K_1 含在 K_0 内部分的弧长；L_{0i} 表示 ∂K_0 含在 K_1 内部分的弧长；L_{1e} 表示 ∂K_1 在 K_0 外部分的弧长；L_{0e} 表示 ∂K_0 在 K_1 外部分的弧长。作为练习，试证下列积分公式：

$$\int L_{0i} dK_1 = 2\pi F_1 L_0, \quad \int L_{1i} dK_1 = 2\pi F_0 L_1,$$

---

① 即确定图形位置的方向。——译者

$$\int L_{1e}\mathrm{d}K_1 = 2\pi L_1F_1 + L_0L_1^2, \qquad \int L_{0e}\mathrm{d}K_1 = 2\pi L_0F_0 + L_1L_0^2,$$

$$\int (L_{1e}L_{0e} - L_{1i}L_{0i})\mathrm{d}K_1 = L_0^2L_1^2,$$

$$\int (F_{1e}F_{0e} - F_i^2)\mathrm{d}K_1 = F_0F_1L_0L_1,$$

其中积分范围是满足 $K_1 \cap K_0 \neq \varnothing$ 的一切 K_1 位置。

练习2　几何概率中的问题。我们将给出几何概率中的问题的一些例子，这些问题都可以利用本节结果求解。在这些问题中，我们始终用 F_i，L_i 依次表示有界凸集 K_i 的面积和周长。

(a) 设 K_0，K_1 为平面上凸集，$K_1 \subset K_0$。把凸集 K_1 随机地放在平面上，使它和 K_0 相交。求它和 K_1 相交的概率。

解　由(6.48)，可得

$$p = \frac{2\pi(F_1 + F_2) + L_1L_2}{2\pi(F_0 + F_2) + L_0L_2}.$$

(b) 随机地取 P 点和凸集 K_1，使 $P \in K_0$，$K_0 \cap K_1 \neq \varnothing$。求 $P \in K_1 \cap K_0$ 的概率。

解

$$p = \frac{2\pi F_1}{2\pi(F_0 + F_1) + L_0L_1}.$$

(c) 把直线 G 和凸集 K_1 随机地放在平面上，使它们都和 K_0 相交。求 $G \cap K_1 \cap K_0 \neq \varnothing$ 的概率。

解

$$p = \frac{2\pi(F_0L_1 + F_1L_0)}{L_0[2\pi(F_0 + F_1) + L_0L_1]}.$$

特殊地，若 K_1 是长度为 s 的线段，则 $F_1 = 0$，$L_1 = 2s$，而所求概率化为

$$p = \frac{2\pi F_0 s}{L_0(\pi F_0 + L_0 s)}.$$

令 $s \to \infty$，就得到：一个凸集 K_0 的两条随机弦在 K_0 内相交的

概率是 $p=2\pi F_0/L_0^2$。

(d) 设 K_1和 K_2 为两个和固定凸集 K_0 的随机凸集。求 $K_0\cap K_1\cap K_2$的概率。

解 解答是(6.63)和

$$[2\pi(F_1+F_0)+L_1L_0][2\pi(F_2+F_0)+L_2L_0]$$

之比。特殊地，若 K_1和 K_2 为线段，其长依次为 s_1,s_2，就得

$$p=\frac{2\pi s_1s_2F_0}{(\pi F_0+L_0s_1)(\pi F_0+L_0s_2)}.$$

(e) 设有 n 个和固定凸集相交的随机凸集 K_i。证明在 K_0内所有 K_i 有公共点的概率是

$$p=\frac{(2\pi)^n(F^n+nF_0F^{n-1})}{[2\pi(F+F_0)+LL_0]^2}+\frac{(2\pi)^{n-1}\left(nLL_0F^{n-1}+\binom{n}{2}F_0LF^{n-2}\right)}{[2\pi(F+F_0)+LL_0]^2},\qquad(6.84)$$

其中 F 和 L 依次表示互相全等的 K_i的面积和周长。从命题(d)，经过归纳法，就可以直接了当地得到公式的证明。

(f) 假定在一个半径等于 R 的圆 K 内随机地取 n 点。求它们可以用一个含在 K 内而半径为 $r(r\leqslant R)$ 的圆包围的概率。

解 这等价于下面问题：取一个和 K 同心，半径为 $R-r$ 的圆，求 n 个中心在 K 内，半径等于 r 的圆同该圆有交点的概率。于是其解答可在(6.84)内令 $F=\pi r^2$，$F_0=\pi(R-r)^2$，$L_0=2\pi(R-r)$得到。结果是

$$p=\frac{r^{2n-3}}{\pi R^{2n}}\left[\pi r^3+n\pi r(R-r)^2+2\pi nR^3(R-r)+\binom{n}{2}(R-r)^2\right].$$

(g) 设 K_0为固定凸多边形。把一个不能和 K_0 两条不相邻边相交的有向线段 S^* 随机地放在平面上，使它和 K_0相交。求：(i)

S^*在K_0内的概率p_0；(ii) S^*和∂K_0恰好有一个公共点的概率；(iii) S^*和K_0恰好有两个公共点的概率。

解答是$p_i = m_i/2(\pi F_0 + L_0 s)$，其中$s$为$S^*$的长，而$m_i$为(6.44)中的测度。

我们将给出这结果的一个应用。假设R是边长为a，νb的长方形，用平行于底边a而相距为b的直线把R分成较小的长方形R_i(图6.13)。按照(6.35)，含在R内而长度为$s(s\leqslant b)$的一切线段S^*的测度是

$$m(S^*;S^*\subset R) = 2\pi\nu ab - 4s(a+\nu b) + 2s^2, \qquad (6.85)$$

而含在长方形$R_i(i=1,2,\cdots)$内的线段S^*的测度之和是

$$\nu m(S^*;S^*\subset R_i) = [2\pi ab - 4s(a+b) + 2s^2]\nu. \qquad (6.86)$$

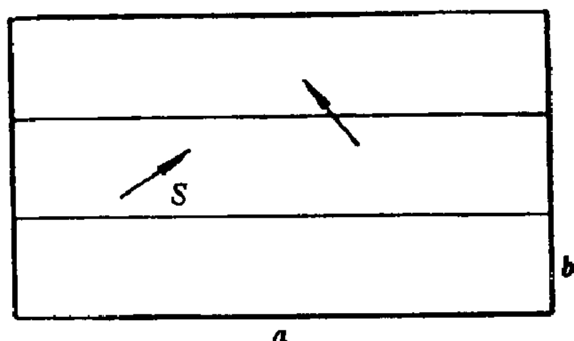


图 6.13

由此可知：若在一个边长为$a,\nu b(a>b)$的长方形R内画上平行于底边a而距离为b的直线，并在R的内部随机地取一长度为$s(s<b)$的针，则这针不和任何平行线相交的概率是

$$p = \frac{(\pi ab - 2s(a+b) + s^2)\nu}{\pi\nu ab - 2s(a+\nu b) + s^2}. \qquad (6.87)$$

若$a\to\infty,\nu\to\infty$，则整个平面上画上了距离为b的平行直线，我们就得到Buffon针问题(第五章，第2节)的结果。

(h) 设K_0为凸多边形，并设不能和K_0两条相邻的边相交的线段的最长度是h。设P_1,P_2为K_0内两个随机点。求距离$|P_1P_2|$

不超过 h 的概率。

解　设 $|P_1P_2|=r$。由极坐标中的面积元素表达式，可知

$$dP_1\wedge dP_2=r\,dP_1\wedge dr\wedge d\phi,$$

其中 ϕ 是由平面上一个参考方向到直线P_1P_2的角。若令 r 固定，则$dP_1\wedge d\phi$是长度为 r 的线段的运动密度，于是利用(6.44)，就得

$$m(P_1,P_2;|P_1P_2|<h)$$
$$=\int_{r\leqslant h}dP_1\wedge dP_2=\int_0^h m_0 r\,dr$$
$$=\pi F_0h^2-\frac{2}{3}L_0h^3+\frac{1}{8}h^4\sum_{A_i}[1+(\pi-A_i)\cot A_i],$$

而所求概率是

$$p(r\leqslant h)=\frac{1}{F_0^2}\left\{\pi F_0h^2-\frac{2}{3}L_0h^3+\frac{1}{8}h^4\sum_{A_i}[1+(\pi-A_i)\cot+A_i]\right\}.$$

(i) 设 P_1,P_2 为直径等于D的一个圆内的两个随机点，求距离$|P_1P_2|$不超过 $h(h\leqslant D)$ 的概率。

解

$$p(|P_1P_2|\leqslant h)=\frac{4}{\pi D^2}[\pi h^2+\alpha(D^2/4-h^2)-(D^2/4+h^2/2)\sin\alpha],$$

其中 $\alpha=2\arcsin(h/D)$。

E. Borel[64]计算了，当 P_1,P_2 是三角形，正方形和一般多边形内的随机点时的相应结果。

一般地，若 r 为一个凸集K内两点之间的距离，则分布函数 $prob(r\leqslant x)$是 $rm(r)/F^2$ 对于 r 的积分，积分范围从 0 到 x，其中 F 是K的面积，而 $m(r)$表示含于K内而长度为 r 的一切有向线段的测度。这从等式 $dP_1\wedge dP_2=r\,dr\wedge d\phi\wedge dP_1$ 可以立刻得到。关于到E_n的推广，见[217]。

第七章　Poincaré 和 Blaschke 的基本公式

1. 关于运动密度的又一个表达式

设$(O;x,y)$为固定标架，Γ_0表示一条固定的可求长曲线，Γ_0由有限多个弧所构成，而每个弧在它各点都有连续转动的切线(如图7.1)。设

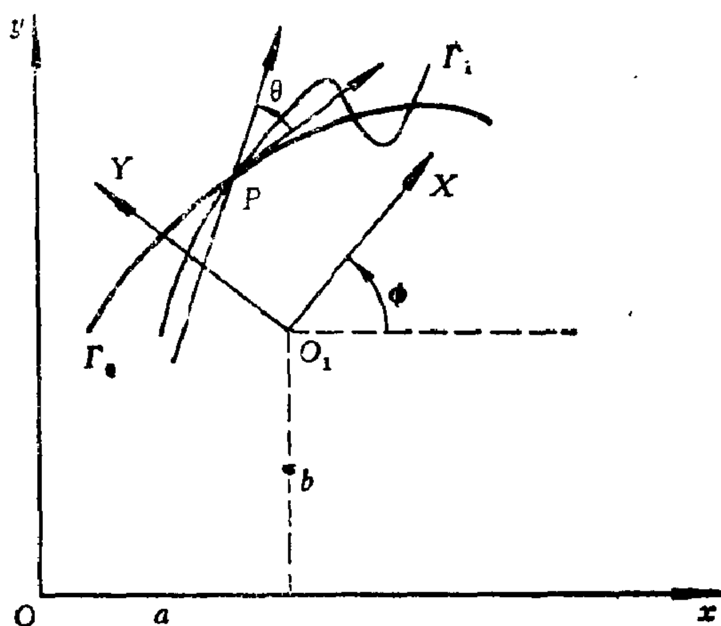


图 7.1

$$x=x(s_0),\quad y=y(s_0) \tag{7.1}$$

为Γ_0在坐标系$(O;x,y)$下的方程，参数s_0是弧长。

设$(O_1;X,Y)$为动标，Γ_1为和这个动标一起运动的曲线，Γ_1也是逐段光滑的，它在标架$(O_1;X,Y)$下的方程是

$$X=X(s_1),\quad Y=Y(s_1), \tag{7.2}$$

其中s_1表示Γ_1的弧长。在坐标系$(O;x,y)$下，Γ_1的方程变成

$$x=a+X\cos\phi-Y\sin\phi,\quad y=b+X\sin\phi+Y\cos\phi, \tag{7.3}$$

其中 a,b 是 O_1 的坐标，而 ϕ 是从 Ox 到 O_1X 的角。

确定 Γ_0 和 Γ_1 交点的是方程组

$$
\begin{aligned}
x(s_0) &= a + X(s_1)\cos\phi - Y(s_1)\sin\phi, \\
y(s_0) &= b + X(s_1)\sin\phi + Y(s_1)\cos\phi,
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

其中 s_0, s_1 是未知数。由(7.4)可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}a &= X'\mathrm{d}s_0 - (X'\cos\phi - Y'\sin\phi)\mathrm{d}s_1 + (X\sin\phi + Y\cos\phi)\mathrm{d}\phi, \\
\mathrm{d}b &= Y'\mathrm{d}s_0 - (X'\sin\phi + Y'\cos\phi)\mathrm{d}s_1 - (X\cos\phi - Y\sin)\mathrm{d}\phi,
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

其中撇号表示导数。通过取外积得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}b\wedge\mathrm{d}\phi = &[(X'y' - x'Y')\cos\phi - (Y'y' + X'x')\sin\phi] \\
&\times \mathrm{d}s_0\wedge\mathrm{d}s_1\wedge\mathrm{d}\phi.
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

若 a_0 表示从 x 轴到 Γ_0 在 $P(P\in\Gamma_0\cap\Gamma_1)$ 点的切线的角，而 a_1 表示从 X 轴到 Γ_1 在同一点的切线的角，则

$$
x' = \cos a_0, \quad y' = \sin a_0, \quad X' = \cos a_1, \quad Y' = \sin a_1. \tag{7.7}
$$

因而运动密度可以写成

$$
\mathrm{d}K_1 = \mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}b\wedge\mathrm{d}\phi = \sin(a_0 - a_1 - \phi)\mathrm{d}s_0\wedge\mathrm{d}s_1\wedge\mathrm{d}\phi.
$$

若 θ 是在 P 点，Γ_0 和 Γ_1 的夹角，则 $|\theta| = |a_0 - a_1 - \phi|$，又由于 a_0 和 a_1 只是 s_0 和 s_1 的函数，所以

$$
\mathrm{d}K_1 = |\sin\theta|\mathrm{d}s_0\wedge\mathrm{d}s_1\wedge\mathrm{d}\theta. \tag{7.8}
$$

这是非常有用的关于 $\mathrm{d}K_1$ 的表达式。它表明，Γ_0 和一条随机曲线 Γ_1 在任意一个交点的夹角介乎 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 和 $\theta+\mathrm{d}\theta$ 之间的概率是 $\frac{1}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$。因此，$\theta$ 的期望值是

$$
E(\theta) = \pi/2. \tag{7.9}
$$

2. Poincaré 公式

假定我们试求和一条固定曲线 Γ_0 有公共点而与 Γ_1 全等的曲线的集合的测度，或者说，和 Γ_0 相交的 Γ_1 的位置集合的测度。这个测度等于 $\mathrm{d}K_1$ 的积分，积分范围是使，$\Gamma_0\cap\Gamma_1\neq\varnothing$ 的参数

a, b, ϕ 一切值。一般地，这个积分决定于 Γ_0 和 Γ_1 的形状，而缺乏一个简单的表达式。不过，如果对一切 s_0, s_1, θ 值（假定 $|\theta| \leqslant \pi$）把(7.8)两边积分，则在右边得

$$\int_0^{L_0} ds_0 \int_0^{L_1} ds_1 \int_{-\pi}^{\pi} |\sin\theta| d\theta = 4L_0L_1, \tag{7.10}$$

其中 L_0, L_1 为 Γ_0, Γ_1 的长。

在(7.8)左边，对于 Γ_1 每一个和 Γ_0 有交点的位置，Γ_1 和 Γ_0 有几个交点在积分中就计算了几次，因而

$$\int_{\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \varnothing} n dK_1 = 4L_0L_1, \tag{7.11}$$

其中 n 为 Γ_0 和 Γ_1 的交点数。

在积分几何中，公式(7.11)叫做 Poincaré 公式。更确切地说，Poincaré 只考虑了球面上的公式(7.11)作为具有已知长度的球面曲线的平均交点数[484，第 143 页]。Barbier 也知道这样的公式[21]。上述证明假定了曲线 Γ_0, Γ_1 是逐段光滑的[523]。但是，只须假定曲线是可求长的，公式就成立[377，378，455]。关于得到公式的另一个途径，见[351]。

若令 Γ_1 取一切满足 $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \varnothing$ 的位置时，Q_1（同 Γ_1 相固连的标架原点）所形成的区域面积是 A，则 Poincare 公式表明，Γ_1 和 Γ_0 交点数的期望值是 $2L_0L_1/\pi A$。显然，Γ_0, Γ_1 两条曲线中的每一条都可以是若干条不相连的曲线所构成，只要其总长依次是 L_0 与 L_1（见[434]）。

注意：若以 $|\theta|$ 乘(7.8)两边，再对一切 $s_0, s_1, \theta(-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 值取积分，就得

$$\int_{\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \varnothing} \sum_1^n |\theta^i| dK_1 = 2\pi L_0L_1, \tag{7.12}$$

其中 θ^i 是 θ 在 Γ_0, Γ_1 诸交点的值。

一个特款。 若 Γ_1 为半径等于 r 的圆，我们可以采用表达式

$dK_1 = dP \wedge d\phi$，其中 P 是圆心。这时对于 P 的每个位置，ϕ 角可以从 0 到 2π 变化而 n 不变，于是 Poincaré公式化为

$$\int n dP = 4rL_0, \tag{7.13}$$

积分域是整个平面。由(7.13)可知 $L_0 = (1/4r)\int n dP$，这可以作为一个连续统点集Γ_0的长的定义。这个定义可以推广到 n 维欧氏空间里的曲线(如Santaló[535]所作的)。

3. 闭曲线的与平面域的总曲率

设Γ为平面上具有连续曲率的有向闭曲线。积分

$$c(\Gamma) = \int_\Gamma \kappa ds \tag{7.14}$$

叫做Γ的**总曲率**，其中 s 是 Γ 的弧长，因为 $\kappa = d\tau/ds$，其中 τ 为从 x 轴到 Γ的有向切线的角，所以

$$c(\Gamma) = \int_\Gamma d\tau. \tag{7.15}$$

即：当切线顺着 Γ 正向移动一周时，总曲率等于 τ 的全部变差。

若Γ为有限多个C^2类弧 $a_1 = A_1A_2, a_2 = A_2A_3, \cdots, a_m = A_mA_1$ 的并集，而 $\theta(A_i)$是在隅角 A_i 的外角(即 $\theta(A_i)$是在 A_i 点，a_{i-1} 的切线和 a_i 的切线的夹角，$-\pi \leqslant \theta_i \leqslant \pi$)，总曲率的定义是

$$c(\tau) = \sum_{i=1}^{m} \int_{a_i} d\tau + \sum_{i=1}^{m} \theta(A_i). \tag{7.16}$$

一条没有重点的曲线叫做简单曲线。所谓转动切线定理指出，一条简单闭(曲)线的总曲率是 $\pm 2\pi$，其中的符号决定于曲线的正向[113]。

总曲率的定义也可以用于平面区域。设D为平面域，它的边界是有限多条逐段光滑的简单闭线所构成。假定取每条闭线的正

向，使区域位于它的左侧．这样，D的总曲率就是它的边界∂D的总曲率。例如，假定平面上逆时针方向为正向，则图7.2(a)有阴影区域的总曲率是-2π，而图7.2(b)有阴影区域的总曲率是2π。

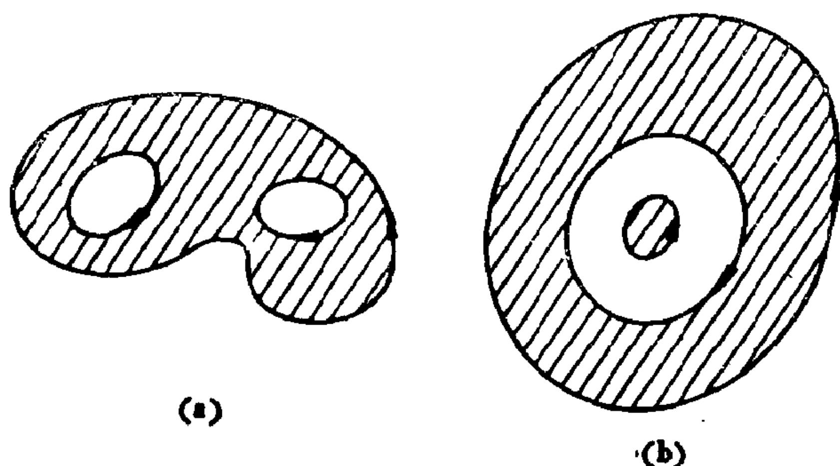


图 7.2

注意一个域的总曲率总是2π的一个整数倍。因此，可以令

$$c(D)=2\pi\chi(D), \tag{7.17}$$

其中$\chi(D)$是一个整数，叫做D的 Euler **示性数**。单一的简单闭线所包围的域的 Euler 特征数是$+1$。一般地，若D可以分解成f个面或胞腔(和一个圆盘同胚的点集)，这些面共有a条边和v个顶点，人们知道(例如参看 Coxeter[128])

$$\chi(D)=v-a+f. \tag{7.18}$$

4. Blaschke 基本公式

设有区域D_0，它的边界为有限多条逐段光滑的简单闭线所构成．设c_0是D_0的总曲率，F_0是它的面积，L_0是它的周长。设D_1为同类的域，D_1有总曲率c_1，面积F_1，周长L_1。假定D_1在平面上运动，运动密度是dK_1。用c_{01}表示域$D_0\cap D_1$的总曲率，我们要证明下面的 Blaschke 运动基本公式：

$$\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing} c_{01}\,dK_1=2\pi(F_0c_1+F_1c_0+L_0L_1). \tag{7.19}$$

证明 用$a_i^j(j=0,1)$表示∂D_j所含的光滑弧，而A_i^j表示隅角。按照(7.16)，D_j的总曲率是(图7.3)

$$c_j=\sum_i\int_{a_i^j}d\tau+\sum_i\theta(A_i^j),\quad j=0,1. \tag{7.20}$$

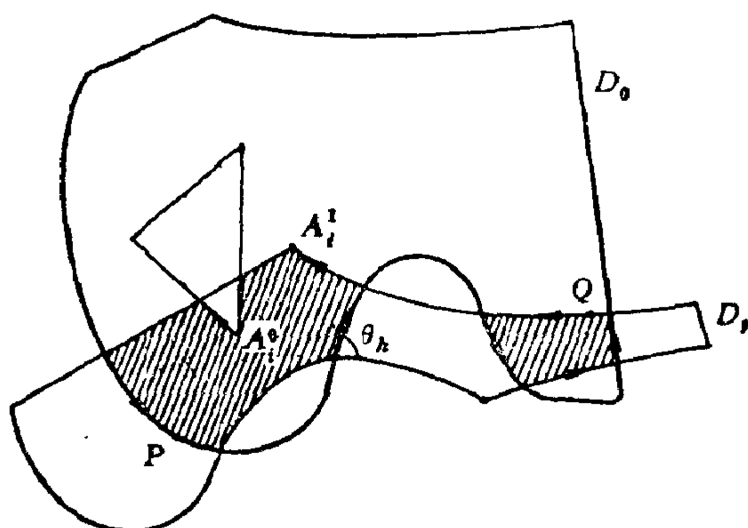


图 7.3

若$P(s_0)$表示∂D_0的一点，$Q(s_1)$表示∂D_1的一点(s_0,s_1为相应的弧长)，则$D_0\cap D_1$的总曲率是

$$c_{01}=\int_{P\in D_1}d\tau(s_0)+\int_{Q\in D_0}d\tau(s_1)+\sum_{A_i^0\in D_1}\theta(A_i^0)$$

$$+\sum_{A_i^1\in D_0}\theta(A_i^1)+\sum_h\theta_h, \tag{7.21}$$

其中θ_h是∂D_0和∂D_1在它们交点的夹角。在这里，我们假定选取∂D_0和∂D_1的正向，使D_0,D_1因而也使$D_0\cap D_1$位于它们左侧。这样，除去具有零测度的一个集合的D_1位置之外，$0\leqslant\theta_h\leqslant\pi$，因而$|\theta_h|=\theta_h$。我们考虑

$$I_1=\int_{P\in D_1}d\tau(s_0)\wedge dK_1, \tag{7.22}$$

其中 dK_1 代表当 D_1 作为运动中的点集时的运动密度。我们有

$$I_1=\int_{\partial D_0}d\tau(s_0)\int_{P\in D_1}dK_1=2\pi F_1\int_{\partial D_0}d\tau(s_0)$$

$$=2\pi F_1\sum_i\int_{a_i^0}d\tau(s_0), \qquad (7.23)$$

又有

$$I_1=\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}dK_1\int_{P\in D_1}d\tau(s_1)=\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\left(\int_{P\in D_1}d\tau(s_0)\right)dK_1. \qquad (7.24)$$

因此，

$$\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\left(\int_{P\in D_1}d\tau(s_0)\right)dK_1=2\pi F_1\sum_i\int_{a_i^0}d\tau(s_0)。\quad (7.25)$$

另一方面，

$$\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\left(\sum_{A_i^0\in D_1}\theta(A_i^0)\right)dK_1=\sum_i\int_{A_i^0\in D_1}\theta(A_i^0)dK_1$$

$$=2\pi F_1\sum_i\theta(A_i^0)。 \qquad (7.26)$$

注意我们可以令 $dK_1=dK_0$(运动密度在运动逆转中的不变性)，就从(7.25)和(7.26)得

$$\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\int_{Q\in D_0}(d\tau(s_1))dK_1=2\pi F_0\sum_i\int_{a_i^1}d\tau(s_1) \quad (7.27)$$

和

$$\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\sum_i\left(\int_{A_i^1\in D_0}\theta(A_i^1)\right)dK_1=2\pi F_0\sum_i\theta(A_i^1). \qquad (7.28)$$

而由(7.12)，注意 $0\leqslant\theta_h\leqslant\pi$，又有

$$\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\left(\sum_h\theta_h\right)dK_1=2\pi L_0L_1. \qquad (7.29)$$

把最后五等式相加，根据(7.21)和(7.20)，就得所要证明的公式(7.19)。

特款1. 若 D_0, D_1 是凸域，则$c_0 = c_1 = c_{01} = 2\pi$，而公式(7.19)化为(6.48)，这是预料中的。

特款2. 若D_0, D_1的边界都是单一的简单闭线，则 $c_0 = c_1 = 2\pi$，而$D_0 \cap D_1$包括有限多个分离的区域，例如 ν 个，每个的总曲率是 2π，因而 $c_{01} = 2\pi\nu$（在图 7.4 里，$\nu = 2$）。这时基本公式(7.19)化为

$$\int_{D_0 \cap D_1 \neq \varnothing} \nu \mathrm{d} K_1 = 2\pi(F_0 + F_1) + L_0 L_1. \tag{7.30}$$

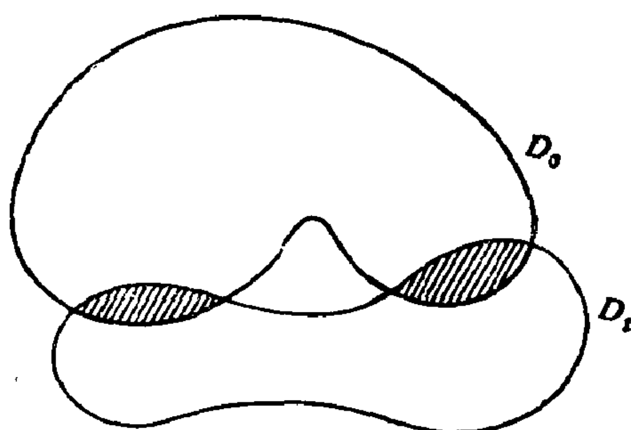


图 7.4

特款3. 若D_0是m个分离的凸集$D_0^i (i = 1, 2, \cdots, m)$的并集，其总面积是 F_0，总周长是 L_0，则 $c_0 = 2\pi m$。假定 D_1 的边界是单一的简单闭线，则 $c_1 = 2\pi$，而

$$\int_{D_0 \cap D_1 \neq \varnothing} \nu \mathrm{d} K_1 = 2\pi(F_0 + mF_1) + L_0 L, \tag{7.31}$$

其中 ν 是和D_1相交的D_0^i的个数（例如在图7.5里，$\nu = 5, m = 7$）。

特殊地，若 D_0 化为m个点，就得

$$\int \nu \mathrm{d} K_1 = 2\pi m F_1, \tag{7.32}$$

其中 ν 表示，对于D_1的每个位置，含在该区域内的点的数目（在图 7.6 里，$m = 9$，$\nu = 3$），而积分范围是整个平面。

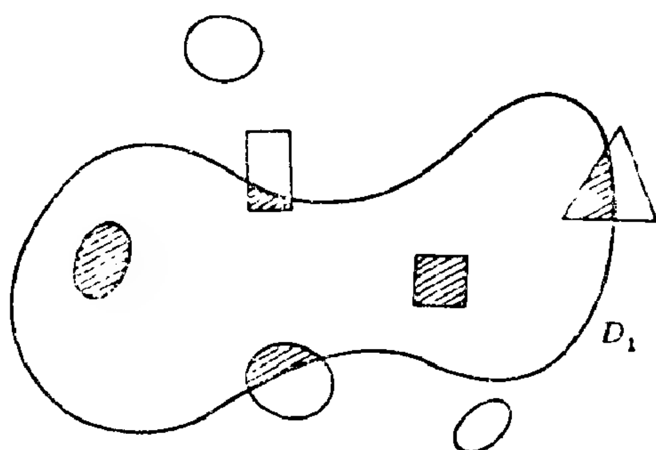


图 7.5

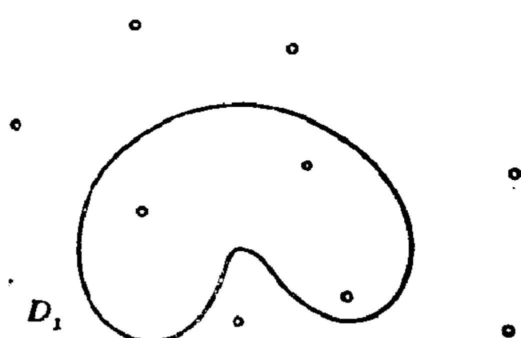


图 7.6

特款4. 假定D_1是边长为$a, b(a>b)$的长方形，则$F_1=ab$，$L_1=2(a+b)$，$c_1=2\pi$. 它的运动密度可以写成$dK_1=dG_1^*\wedge dt$（6.30），其中G_1^*是经过长方形中心而单行于长度为a的两边的直线. 这样，对于G_1的每个位置，(7.19)左边的积分可以分为两部分：第一部分对应于长度为b的两边同D_0都不相交的t值，第二部分对应于长度为b的至少一边同D_0相交的t值. 对于第一部分的D_1的位置，c_{01}与t无关，因而对dt积分后所得因子有如$a-h_1$的形状，其中h_1不超过D_0的直径. 若$a\to\infty$而b固定，则对于任意G_1，第二部分D_1的位置有有限测度，因此，若以a除(7.19)两边，并取$a\to\infty$时的极限，就得

$$\int_{B\cap D_0\neq\varnothing} c_{01}dG_1^*=2\pi(bc_0+2L_0), \tag{7.33}$$

其中 B 表示以 G_1 为中心平行线而宽度为 b 的带。若令 $dC_1^* = 2d$… 其中 db 表示无向带的密度(第五章，第1节)，则得

$$\int_{B \cap D_0 \neq \varnothing} c_{01} dB = \pi(bc_0 + 2L_0). \qquad (7.34$$

这就是关于宽度为 b 的带的基本公式。例如，在图 7.7 里，c_0 -2π，$c_{01} = 6\pi$。

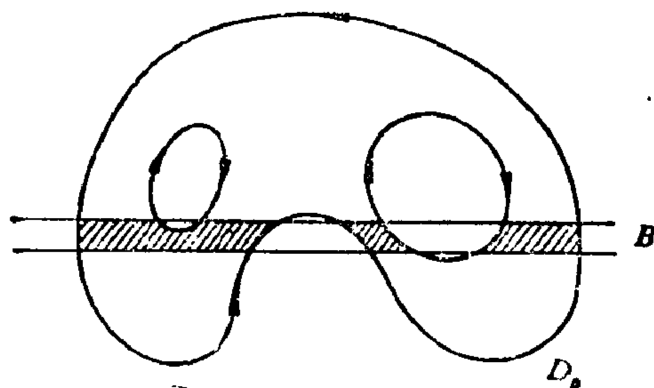


图 7.7

基本公式(7.19)可以推广到比这里所讨论的更一般性的域；见Blaschke[51]和Nöbeling[454]；关于另一种证明，见Hadwig…[270,274]。

5° 等周不等式

设 $K_i(i = 0,1)$ 为两个有界全等凸集，它们的面积都是 F，周长是 L。把 Blaschke 公式和 Poincaré 公式应用于 K_0, K_1 及其边界，就得

$$\int_{K_0 \cap K_1 \neq \varnothing} dK_1 = 4\pi F + L^2, \quad \int_{K_0 \cap K_1 \neq \varnothing} n dK_1 = 4L^2. \quad (7.35)$$

用 m_i 表示 ∂K_1 和 ∂K_0 有 i 个公共点时 K_1 的位置集合的测度，则(7.35)可以写成(注意 K_1 和 K_0 有奇数个点的位置集合测度是零)

$$m_2 + m_4 + \cdots = 4\pi F + L^2, \quad 2m_2 + 4m_4 + 6m_6 + \cdots = 4L^2.$$

由此可知

$$L^2 - 4\pi F = m_4 + 2m_6 + 3m_8 + \cdots, \tag{7.36}$$

而由于测度 m_i 总是 $\geqslant 0$，就得经典的等周不等式

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0. \tag{7.37}$$

注意(7.36)提供了关于一个凸集的等周亏量 $\Delta = L^2 - 4\pi F$ 的一种几何意义。若 $K \equiv K_0 \equiv K_1$ 不是凸集，我们考虑其凸包 K^*。在 K 和 K^* 的面积 F, F^* 以及在 ∂K 和 ∂K^* 的周长 L, L^* 之间，有关系 $F \leqslant F^*$，$L^* \leqslant L$，故 $L^2 - 4\pi F \geqslant L^{*2} - 4\pi F^* \geqslant 0$。因此，等周不等式对于一切平面域(不论凸否)皆成立。

更强的等周不等式. 设 K 为有界凸集. 设 r_i 为可能含在 K 内的最大圆的半径，r_e 为可能含 K 在内的最小圆的半径。显然 $r_i \leqslant r_e$，而且当 K 为圆时，也只在此时，$r_i = r_e$。设 K_1 为圆，它的半径 r 满足

$$r_i \leqslant r \leqslant r_e. \tag{7.38}$$

如上文那样，设 m_i 为 K_1 和 K 的边界有 i 个公共点时 K_1 的位置集合的测度。这时 Blaschke 公式和Poincaré公式可以写成

$$m_2 + m_4 + \cdots = 2\pi F + 2\pi^2 r^2 + 2\pi r L,$$

$$2m_2 + 4m_4 + \cdots = 8\pi 2 L,$$

因而

$$m_4 + 2m_6 + \cdots = 2\pi(rL - F - r^2).$$

由于 $m_i \geqslant 0$，得Bonnesen 不等式[62]

$$rL - F - \pi r^2 \geqslant 0. \tag{7.39}$$

对于满足(7.38)的任意 r，这个公式都是正确的。

若注意有等式

$$Lr - F - \pi r^2 = \frac{L^2}{4\pi} - F - \pi\left(\frac{L}{2\pi} - r\right)^2, \tag{7.40}$$

而且对应于半径为 r_i 和 r_e 的圆，我们依次用 s_i 和 s_e 表示 $(m_4 + 2m_6 + \cdots)/2\pi$ 的值，就有

$$\frac{L^2}{4\pi} - F = \pi\left(\frac{L}{2\pi} - r_i\right)^2 + s_i, \quad \frac{L^2}{4\pi} - F = \pi\left(\frac{L}{2\pi} - r_e\right)^2 + s_e.$$

于是

$$\frac{L^2}{4\pi}-F=\frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r_i\right)^2+\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r_e\right)^2+s_i+s_e\right],$$

因而

$$L_2-4\pi F\geqslant\frac{1}{2}[(L-2\pi r_i)^2+(2\pi r_e-L)^2]. \qquad (7.41)$$

这个不等式比(7.37)强，它表明等式$L^2-4\pi F=0$只有在$r_i=r_e=L/2\pi$时，即K为圆时成立。换句话说，已给周长，只有圆才包围最大面积。这个结果以及(7.36)证明了(Fujiwara[206]和Bo[61]所得到的)下述定理：

若有界凸集K不是圆，则必有K的位置，使它的边界和另一个同它全等的凸集的边界有至少四个公共点，而且这样的K的位置测度>0。

利用一般的不等式$2(x^2+y^2)\geqslant(x+y)^2$，可以看出，从(7.41)可得

$$L^2-4\pi F\geqslant\pi^2(r_e-r_i)^2. \qquad (7.42)$$

这是Bonnesen[62]所得到的另一个等周不等式。

等周亏量的一个上限。现设凸集K的边界有连续的曲率半径ρ。设ρ_m和ρ_M依次为ρ的最小和最大值。设K_1为圆，其半径r或者满足$r\leqslant\rho_m$或者满足$r\geqslant\rho_M$。根据(6.53)，含在K内与含K在内的K_1的集合测度m_0满足

$$\frac{m_0}{2\pi}=F+\pi r^2-Lr=\pi\left(\frac{L}{2\pi}-r\right)^2-\left(\frac{L^2}{4\pi}-F\right). \qquad (7.43)$$

由于$m_0\geqslant0$而(7.43)对$r=\rho_m$和$r=\rho_M$都成立，就有

$$\frac{L^2}{4\pi}-F\leqslant\pi\left(\frac{L}{2\pi}-\rho_m\right)^2,\quad \frac{L^2}{4\pi}-F\leqslant\pi\left(\rho_M-\frac{L}{2\pi}\right)^2. \qquad (7.44)$$

将两个不等式相乘，注意$2\pi\rho_m\leqslant L\leqslant2\pi\rho_M$，就得

$$\frac{L^2}{4\pi}-F\leqslant\pi\left(\frac{L}{2\pi}-\rho_m\right)\left(\rho_M-\frac{L}{2\pi}\right). \qquad (7.45)$$

于是利用一般不等式 $4xy\leqslant(x+y)^2$，就得

$$L^2-4\pi F\leqslant\pi^2(\rho_M-\rho_m)^2. \qquad (7.46)$$

这是 Bottema[66]所得到的等周亏量的上限。当$\rho_m=\rho_M$，即K是圆时，而且只在此时，等式成立。

Pleijel[480] 证明了 $L^2-4\pi F\leqslant\pi(4-\pi)(\rho_M-\rho_m)^2$，这是(7.46)的一种改进.

6. 一个域能含在另一个内的Hadwiger条件

设K_1是具有面积F_1的域，它的边界是长度为L_1的简单闭线，K_0是面积为F_0的域，它的边界是长度为L_0的简单闭线。我们将按照Hadwiger[263,264]的方法，求得K_1可以含在K_0内的一个充分条件。由于我们将应用 Poincaré 公式(7.11)和 Blaschke 公式(7.19)，我们将先假设边界∂K_0和∂K_1是逐段光滑的，然后将看到，在较一般条件下，结果仍然正确。

假定K_0在平面上固定而K_1在运动。设$\partial K_0\cap\partial K_1$含有$n$点而交集$K_0\cap K_1$则为$\nu$块所构成。若$m_0$表示满足$K_1\subset K_0$或$K_1\supset K_0$的$K_1$的一切位置的测度，则公式(7.30)可以写成

$$m_0+\int_{\partial K_0\cap\partial K_1\neq\varnothing}\nu\,\mathrm{d}K_1=2\pi(F_0+F_1)+L_0L_1. \qquad (7.47)$$

当$\partial K_0\cap\partial K_1\neq\varnothing$时，$K_0\cap K_1$的每一块的边界都至少含有$\partial K_0$和$\partial K_1$各一段孤。因此，$\nu\leqslant n/2$。而由(7.11)和(7.47)可知

$$m_0\geqslant2\pi(F_0+F_1)-L_0L_1. \qquad (7.48)$$

所以，若右边大于零，K_1就必有含K_0在内或者含在K_0内的位置.为了去掉∂K_0和∂K_1逐段光滑的条件，只须考虑域$K_0^{(m)}$,$K_1^{(m)}$①，

① 当$m\to\infty$时，$K_0^{(m)}\to K_0$，$K_1^{(m)}\to K_1$，而且$K_0^{(m)}$,$K_1^{(m)}$的周长依次是$L_0^{(m)}$,$L_1^{(m)}$，其面积依次是$F_0^{(m)}$,$F_1^{(m)}$。——译者

其边界是∂K_0和∂K_1的内接多边形。若 $2\pi(F_0+F_1)-L_0L_1>0$，
$\partial K_0,\partial K_1$为可求长曲线，则必有正整数$\mu$，使$m>\mu$时，可以取$K_0^{(m)}$
和$K_1^{(m)}$，满足

$$2\pi(F_0^{(m)}+F_1^{(m)})-L_0^{(m)}L_1^{(m)}>0.$$

这表明，对于每一个大于μ的m，$K_0^{(m)},K_1^{(m)}$两域中，必有一个含
另一个在内。在取极限后，K_0,K_1将有同样性质(注意只要K_0
有一个点在K_1之外，不管它们边界有无公共点，我们就说，K_0
在K_1内)。于是我们有定理：

**一个边界为可求长简单闭线的域K_1或者可以含在另一个同
的域K_0内，或者可以含K_0在内的一个充分条件是**

$$2\pi(F_0+F_1)-L_0L_1>0. \tag{7.49}$$

的确，这个条件不能把$K_0\subset K_1$和$K_1\subset K_0$两款区别开来。
了解决这个问题，我们考虑不等式

$$L_0L_1-4\pi F_1>(L_0^2L_1^2-16\pi^2F_0F_1)^{1/2}, \tag{7.50}$$

其中根号下的式总有非负值，因为等周不等式(7.37)对K_0和K_1
成立。若(7.50)成立，则(7.49)也成立，因而K_0或者可以含
K_1内，或者可以含K_1在内。此处，若(7.50)成立，则$L_0L_1-4\pi F$
>0，因而若把它加在(7.49)上，$2\pi(F_0-F_1)>0$，即$F_0>F_1$。
这表明$K_0\subset K_1$的可能性排除了，而K_0必能含K_1在内。

若考虑不等式

$$4\pi F_0-L_0L_1>(L_0^2L_1^2-16\pi^2F_0F_1)^{1/2}, \tag{7.51}$$

来代替(7.50)，我们注意，若它得到满足，则(7.49)也得到
足；此外，由(7.51)所得到的不等式$4\pi F_0-L_0L_1>0$，或即$16\pi^2F$
$-L_0^2L_1^2>0$和$L_0^2L_1^2-16\pi^2F_0F_1>0$在一起，给出$F_0>F_1$。这
是说，若(7.51)成立，则$K_0\subset K_1$。由此可见：**设K_0,K_1分别都
单一的可求长简单闭线所包围的域，则只要条件(7.50)或(7.51
得到满足，K_1就可以含在K_0之内。**

当然这些充分条件不是必要的(它们是Hadwiger[263,264]
到的)。

一个特款。假定K_1是半径为r的圆。我们从(7.50)推得以下结果：设K_0是一条简单闭线所包围的域，面积为F_0，周长为L_0，则一个半径为r的圆可以含在K_0内的一个充分条件是

$$r<\frac{L_0-(L_0^2-4\pi F_0)^{1/2}}{2\pi}=r_0. \tag{7.52}$$

同样，由(7.51)可知：设K_0为如上的域，则一个半径等于R的圆可以含K_0在内的一个充分条件是

$$R>\frac{L_0+(L_0^2-4\pi F_0)^{1/2}}{2\pi}=R_0. \tag{7.53}$$

这些不等式说明：对于任意的$\varepsilon(\varepsilon>0)$，总有半径为$r_0-\varepsilon$ $(R_0+\varepsilon)$的圆可以含在K_0内(含K_0在内)，因而取极限$\varepsilon\to 0$，就得定理：

已给面积为F_0，周长为L_0，边界为简单闭线的域K_0，必有半径为r

$$r\geqslant\frac{L_0-(L_0^2-4\pi F_0)^{1/2}}{2\pi} \tag{7.54}$$

的圆含在K_0内，又必有半径为R

$$R\leqslant\frac{L_0+(L_0^2-4\pi F_0)^{1/2}}{2\pi} \tag{7.55}$$

的圆含K_0在内。

由于$L_0-(L_0^2-4\pi F_0)^{1/2}\geqslant 2\pi(F_0/L_0)$，(7.54)的右边可代以$F_0/L_0$。这是Grünwald与Turan[249]的结果。

7. 注记

(1) 更多的等周不等式。设K_0和K_1两域的边界都是一条单一的简单闭线，而它们每一个都不能含在另一个内，则(7.50)和(7.51)都不能成立，因而

$$(L_0^2L_1^2-16\pi^2F_0F_1)^{1/2}\geqslant L_0L_1-4\pi F_1, \tag{7.56}$$

$$(L_0^2L_1^2-16\pi^2F_0F_1)^{1/2}\geqslant 4\pi F_0-L_0L_1. \qquad (7.57)$$

而把K_0和K_1对换，又得

$$(L_0^2L_1^2-16\pi^2F_0F_1)^{1/2}\geqslant L_0L_1-4\pi F_0, \qquad (7.58)$$

$$(L_0^2L_1^2-16\pi^2F_0F_1)^{1/2}\geqslant 4\pi F_0-L_0L_1. \qquad (7.59)$$

若r_i为含在K_0内的最大圆K_1的半径，则满足$K_1\subset K_0$的位置的测度是零。这样，(7.56)和(7.57)成立，因而

$$L_0^2-4\pi F_0\geqslant(L_0-2\pi r_i)^2,\quad L_0^2-4\pi F_0\geqslant\left(\frac{2F_0}{r_i}-L_0\right)^2. \qquad (7.60)$$

同样，若r_e为含K_0在内的最小圆的半径，则

$$L_0^2-4\pi F_0\geqslant\left(L_0-\frac{2F_0}{r_e}\right)^2,\quad L_0^2-4\pi F_0\geqslant(2\pi r_e-L_0)^2. \qquad (7.61)$$

利用 $x^2+y^2\geqslant\frac{1}{2}(x+y)^2$，从这两组不等式得①

$$L_0^2-4\pi F_0\geqslant r_i^{-2}(F_0-\pi r_i^2)^2,\quad L_0^2-4\pi F_0\geqslant F_0^2\left(\frac{1}{r_i}-\frac{1}{r_e}\right)^2. \qquad (7.62)$$

Bonnesen[62]和 Hadwiger[264]曾得到这类的不等式。D.C·Benson[26]曾得到其他加强了的等周不等式。

(2) 关于凸集的Minkowski 不等式。 设 K_0,K_1 为凸集，它们的撑函数依次是p_0,p_1。假定K_0固定，我们知道，使K_1和K_0相交的对K_1平移的集合测度是$F_0+F_1+2F_{01}^*$，其中F_{01}^*表示K_0和K_1^*的混合面积，而K_1^*则是从K_1经过对一点的反射所得的点集(第六章，第5节)。换句话说，若P_1为同K_1相固连的一点，则

$$\int_{K_0\cap K_1\neq\varnothing}\mathrm{d}P_1=F_0+F_1+2F_{01}^*. \qquad (7.63)$$

---

① 似乎还可得到$L_0^2-4\pi F_0\geqslant r_e^{-2}(\pi r_e^2-F_0)^2$，$L_0^2-4\pi F_0\geqslant\pi^2(r_e-r_i)^2$。——译者

现在考虑凸线 $\partial K_0, \partial K_1$。我们要在只考虑平移的情况下，求得类似Poincaré公式(7.11)的，关于 $\partial K_0, \partial K_1$ 的公式。设 s_0, s_1 表示边界 $\partial K_0, \partial K_1$ 的弧长，而令 P_1 为 $\partial K_0 \cap \partial K_1$ 的一点。由于 ∂K_0 和 ∂K_1 的隅角构成可数点集(第一章,第1节),可以假定两曲线在 P_1 都是可微的，因而在 P_1 的面积元素可以写成

$$\mathrm{d}P_1 = |\sin\theta|\,\mathrm{d}s_0 \wedge \mathrm{d}s_1,$$

其中 θ 是 ∂K_0 和 ∂K_1 在 P_1 的夹角。令 s_0 固定，对 $|\sin\theta|\mathrm{d}s_1$ 积分，就得到 ∂K_1 在垂直于 ∂K_0 的切线的直线上的投影，即

$$2[p_1(\phi) + p_1(\phi + \pi)],$$

其中 ϕ 是从一个参考方向到 ∂K_0 在 P_1 的法线的角。因此，若 n 为 ∂K_0 和 ∂K_1 的交点数，则利用(1.12)，得

$$\int_{\partial K_0 \cap \partial K_1 \neq \varnothing} n\mathrm{d}P_1 = 2\int_{\partial K_0} [p_1(\phi) + p_1(\phi + \pi)]\mathrm{d}s_0$$

$$= 4(F_{01} + F_{01}^*), \qquad (7.64)$$

其中 F_{01} 是 K_0 和 K_1 的混合面积。由此等式和(7.63)，即得 n 的平均值

$$E(n) = \frac{4(F_{01} + F_{01}^*)}{F_0 + F_1 + 2F_{01}^*}. \qquad (7.65)$$

假定 ∂K_0 和 ∂K_1 总相交，则 $E(n) \geqslant 2$。这时(7.65)表明

$$2F_{01} \geqslant F_0 + F_1. \qquad (7.66)$$

又由于 $(F_0 + F_1)^2 \geqslant 4F_0F_1$，故

$$F_{01}^2 \geqslant F_0F_1. \qquad (7.67)$$

可以证明，这个 Minkowski 不等式对于任意两个凸集都成立。注意：若 K_1 为幺圆，则

$$F_1 = \pi,\quad F_{01} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_0\mathrm{d}\phi = \frac{L_0}{2},$$

而(7.67)化为特殊的 $L_0^2 - 4\pi F_0 \geqslant 0$，即等周不等式。

下面是比(7.67)更强的关系。用 rK_1 表示 K_1 在以 r 为比值的位似变换下的象。经过平移，可使 rK_1 含在 K_0 内的最大 r 值 r_0 叫

做K_0相对于K_1的内半径，经过平移，可使rK含K_0在内的最小r值R_0叫做K_0相对于K_1的外半径。显然$R_0 \geq r_0$，而且当K_1和K_0同位相似时，并且只在此时，它们相等。注意：若K_1为幺圆，r_0和R_0就是第5节的r_i和r_e。有了这些定义之后，可以证明最强的不等式

$$F_{01}^2 - F_1 F_2 \geq (F_1^2/4)(R_0 - r_0)^2. \qquad (7.68)$$

Bonneson[62]得到了这个不等式。Blaschke[51]有一个类似第5节方法的证明。Flanders[201]有一个初等而详细的证明。

(3) **凸集的差集及其被平分的弦。** 我们按照Chakerian与Stein的论文[101]，叙述(7.64)的一项应用。设∂K_0为凸线，∂K_0^*为∂K_0对于$Q(Q \in K_0)$点的反射的象(图7.8)。除一个平移外，曲线∂K_0^*与Q无关①.若P_0为K_0的一个固定点，而经过以Q为中心的

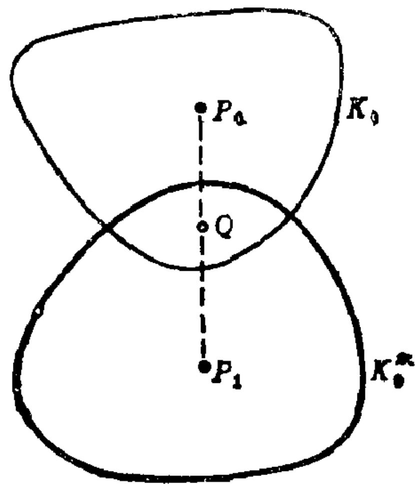


图 7.8

反射，P_0的象是P_1，则P_1在K_0^*内固定，于是可应用公式(7.46)。注意$dP_1 = 4dQ$，就得

$$\int_{Q \in K_0} n(Q) dQ = F_{00}^* + F_{00}, \qquad (7.69)$$

其中$F_{00} = F_0$(K_0和K_0的混合面积)，F_{00}^*表示K_0和K_0^*的混合面积，$n(Q)$为∂K_0和∂K_0^*的交点数。

让我们考虑所谓差集DK_0，它是撑函数

$$p(\phi) = p_0(\phi) + p_0(\phi + \pi)$$

① 即通过不同的反射中心Q所得曲线都可以经过平移互相叠合。——译者

所确定的凸集。按照(1.9)，DK_0的面积是$F(DK_0)=2F_0+2F_{00}^*$，而把 Minkowski 不等式(7.66)应用于 K_0 和 K_0^* 的结果是$F(DK_0)\geqslant 4F_0$，其中等号当K中心对称时，而且只在此时适用。此外，可以证明(见Bonneson与 Fenchel[63，第105 页])，$F(DK_0)\leqslant 6F_0$(其中等号当 K_0 是三角形时，而且只在此时适用)。于是有

$$F_0\leqslant F_{00}^*\leqslant 2F_0, \tag{7.70}$$

其中左边的等式适用于中心对称集而右边等式则适用于三角形。

设$\nu(Q)$为被Q平分的，K_0的弦的个数。显然，$2\nu(Q)=n(Q)$，而(7.69)和(7.70)给出

$$F_0\leqslant\int_{Q\in K_0}\nu(Q)\mathrm{d}Q\leqslant\frac{3}{2}F_0, \tag{7.71}$$

其中等号所适用的凸集与(7.70)同。由于$\nu(Q)\geqslant 1$，(7.71)表明，当K_0内平分不只一个弦的点的测度为零时，而且只在此时，K_0是中心对称的。这推广了 Viet[701]的一个结果。

令$M_k=\{Q\in K_0;\ \nu(Q)=k\}$，并用$F(M_k)$表示$M_k$的面积。这样，从上面的公式，Chakerian 与Stein[101]推得以下结果：

(a) 若k是偶数，$F(M_k)=0$；

(b) $3F_0\leqslant F(M_1)\leqslant 4F_0$；

(c) 若K_0是常幅集，则

$$1\geqslant F(M_1)/F_0\geqslant F(M_1(R))/F(R)\sim 0.943,$$

其中R是Reuleaux三角形(第1章第4节)。右边等式适用于而且只适用于Reuleaux三角形，左边等式适用于而且只适用于圆。

(4) **线段的填装**[1]。把$m(Q)$个凸盘随机地放在一个面积为$A(Q)$的正方形Q内，使每两个之间的距离至少是$2r$。用$F(Q)$，$L(Q)$依次表示这些凸盘的平均面积和平均周长。假定Q无限地增大，同时$F(Q)$，$L(Q)$和$n(Q)/A(Q)$依次趋于极限F,L,N。不难证明，$N\leqslant(F+L_r+\pi r^2)^{-1}$。若凸盘缩成线段，平均长是$a$，则这个结果可以改善成$N\leqslant(2ar+2\sqrt{3}r^2)^{-1}$[181]。

---

[1] Close Packing。——译者

第八章　图形的格

1.　定义与基本公式

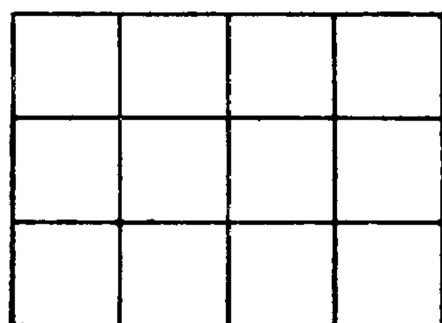
平面上一个连通开集叫做一个域。一个域，或者它和它的部分或全部边界点的并集，叫做一个区。

已给平面上一个叙列的全等区$a_0, a_1, a_2, \cdots$，如果下列条件得到满足，则这个叙列称为构成一个格，各区称为格的基本区。

(a) 平面上每一点属于唯一的 a_i；

(b) 每一个a_i可以通过一个运动t_i和a_0叠合，而且t_i把每一个a_s叠置在一个a_h上，也就是把整个格变为自己。

使得$a_0 = t_i a_i$的运动集合$\{t_i\}$是运动群的一个离散子群。这样一个群叫做晶体群。共有十七类不同构的晶体群，但对于每一个晶体群有无数多种可能的基本区。我们的目的不在于介绍这些群的细节，对此，Coxeter[127] 和 Guggenheimer[254]两书都作了考察。图8.1到图8.5是格的例，其中的基本区是正方形、平行四边形、正六角形或者形状更复杂的图形。



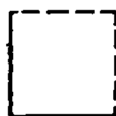
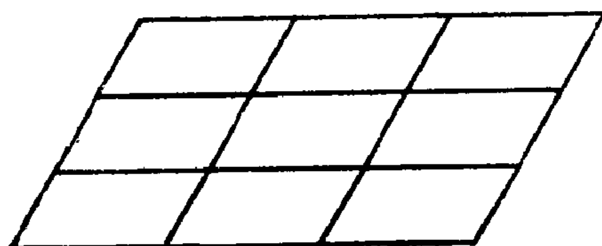


图　8.1



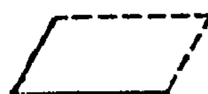


图　8.2

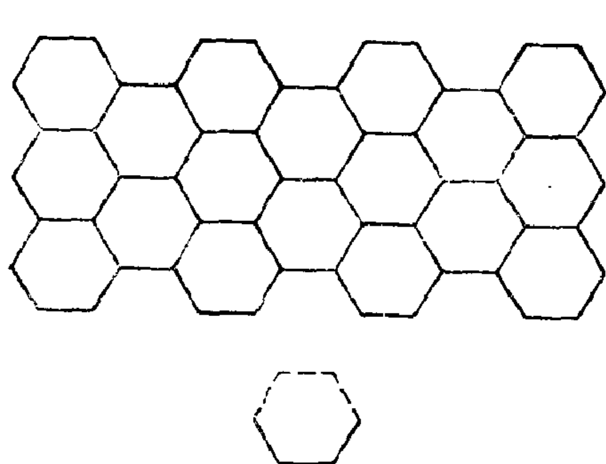


图 8.3

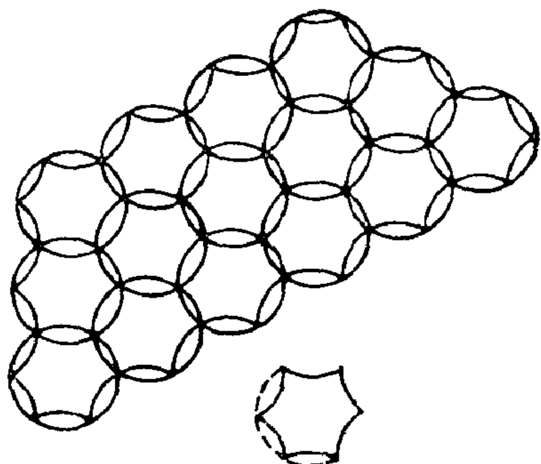


图 8.4

设D_0为平面上一个图形，它可能是被有限多条简单闭线所包围的区，或可求长曲线的一个集合，或有限多个点，等等．假定D_0含在一个格中的一个基本区a_m内．设D_1为另一个图形，它不一定含在一个基本区内．令D_0固定，而D_1作运动，其运动密度是

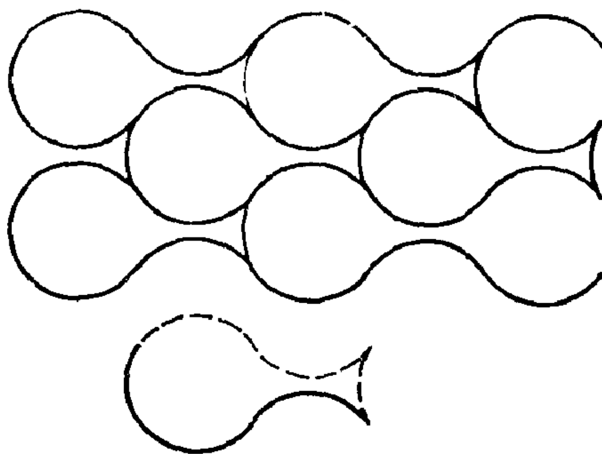


图 8.5

$\mathrm{d}K_1 = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}\phi$，其中$P$是$D_1$的一点而$\phi$表示从一个参考方向到一个和$D_1$相固连的方向的角．考虑积分

$$I = \int_{D_0 \cap D_1 \neq \varnothing} f(D_0 \cap D_1) \mathrm{d}K_1, \tag{8.1}$$

其中f表示交集$D_0 \cap D_1$的一个实函数，$f(\varnothing) = 0$．我们有

$$I=\sum_{i}\int_{a_i} f(D_0\cap D_1)\mathrm{d}K_1, \tag{8.2}$$

其中的和是对于一切的基本区所取的，而对于每个 i，积分范围是一切属于a_i的 P 和$0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$。

经过运动t_i，基本区a_i转移到 a_0，即$t_ia_i=a_0$。因此，经过变数的改变 $K_1\to t_iK_1$(即通过 t_i 移动动标P,ϕ)，由于运动密度的不变性(即 $\mathrm{d}K_1=\mathrm{d}(t_iK_1)$)，就得

$$I=\sum_{i}\int_{a_0} f(D_0\cap t_iD_1)\mathrm{d}K_1, \tag{8.3}$$

而由于交集$D_0\cap t_iD_1$ 和 $t_i^{-1}D_0\cap D_1$ 全等，又得

$$I=\int_{a_0}\sum_{i} f(t_i^{-1}D_0\cap D_1)\mathrm{d}K_1, \tag{8.4}$$

因此，若在平面上画出一切点集 $t_i^{-1}D_0(i=0,1,2,\cdots)$，然后对于一切 i 取和$\sum\limits_{i} f(t_i^{-1}D_0\cap D_1)$，再在 $P\in a_0$，$0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$ 的范围(这确定D_1 的位置的一个集合)内取积分，则所得积分(8.4)和(8.1)相同。

2. 域格

设D_0 和 D_1 为闭域，它们的边界是有限多条逐段光滑的简单闭线所构成。设F_i, L_i, c_i 依次为$D_i(i=0,1)$的面积、周长和总曲率。假定D_0含在基本区a_0内，我们考虑一切域$t_i^{-1}D_0(i=0,1,2,\cdots)$所构成的格①。这样，若令$f(D_0\cap D_1)$为$D_0\cap D_1$的总曲率，则由基本公式(7.19)以及(8.4)，就得

$$\int_{a_0} c_{01}\mathrm{d}K_1=2\pi(F_0c_1+F_1c_0)+L_0L_1, \tag{8.5}$$

① 这不是第一节中所说的那种意义的格，它不是由基本区所构成。——译者

c_{01}表示D_1和一切图形$t_i^{-1}D_0$的交集的总曲率，也就是D_1和D_0在一切a_i内的翻版所构成的格的交集的总曲率。(8.5)里的积分范围是$P\in a_0$，$0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$。

例如，若D_0和D_1的边界分别都是一条单一的闭线，则$c_0=c_1=2\pi$，$c_{01}=2\pi\nu$，其中ν表示交集$\sum_i(t_i^{-1}D_0)\cap D_1$所含的块数，因而

$$\int_{a_0}\nu dK_1=2\pi(F_0+F_1)+L_0L_1。\tag{8.6}$$

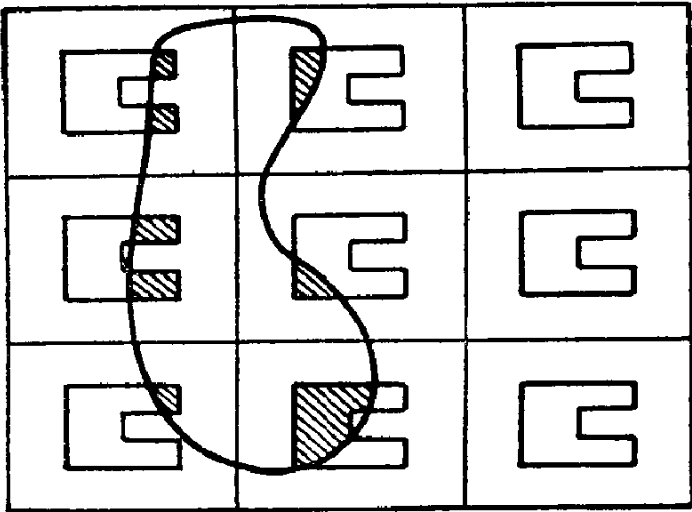


图 8.6

在图8.6的款，$\nu=8$。

特别值得注意的一款是：D_0和基本区a_0重合，但需补上必要的边界点，使D_0成为闭集。这时，(8.6)成立，而ν则表示D_1被格所分割成块的数目。例如在图8.7里①，$\nu=8$。

由于积分范围的“体积”是$2\pi a_0$，其中a_0也表示基本区a_0的面积，我们有：

设一个闭域D_1的面积是F_1，边界是长度为L_1的单一闭线，再设一个格的基本区面积为a_0，周长为L_0，则将D_1随机地放在格上时，D_1被格分割成块的平均数是

① 对原图有小变动。——译者

$$E(\nu)=\frac{2\pi(a_0+F_1)+L_0L_1}{2\pi a_0}. \qquad (8.7)$$

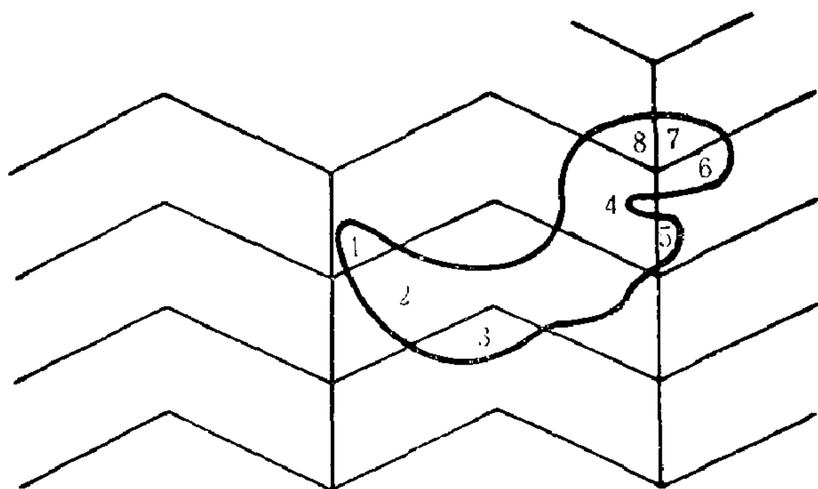


图 8.7

和D_1有公共点的基本区数N总小于等于ν(例如在图8.7中[1]，$N=6$，$\nu=8$)。因此，$E(N)\leqslant E(\nu)$。故：

设D_1为任意闭域，面积是F_1，边界是长度为L_1的单一闭线，再设一个格的基本区面积为a_0，周长为L_0，则D_1可以被格中一定数目μ的基本区所覆盖，而μ满足不等式$\mu\leqslant E(\nu)$，其中$E(\nu)$的值是(8.7)。

把这个结果应用于由边长为a的正方形格($a_0=a^2$，$L_0=4a$)，就得：每一个由单一的闭线包围的域可以用不多于

$$\mu_s=1+\frac{2L_1}{\pi a}+\frac{F_1}{a^2} \qquad (8.8)$$

个那样的正方形覆盖。

若格是由边长为a的正六边形所构成(图8.3)，则得：D_1可以用不多于

$$\mu_h=1+\frac{2L_1}{\sqrt{3}\pi a}+\frac{2F_1}{3\sqrt{3}a^2} \qquad (8.9)$$

---

① 对原图稍有修改。——译者

个六边形覆盖。

若考虑这些六边形的外接圆，就得：D_1 可以用不多于 μ_h 个半径等 a 的圆覆盖。这些结果是 Hadwiger[263]得到的。关于到 n 维空间的推广，见第十五章第 9 节。Trandafir [675,677,677a] 探讨了二维黎曼空间和三维欧氏空间关于格的问题，参看[464, 465]。

3. 曲线格

设 D_0 和 D_1 为逐段光滑曲线，长度依次是 L_0, L_1。由 (7.11) 和 (8.4)，令 $f(D_0 \cap D_1)$ 为交集 $D_0 \cap D_1$ 所含的点数，就得

$$\int_{a_0} n \mathrm{d} K_1 = 4 L_0 L_1, \tag{8.10}$$

其中 n 表示 D_1 和曲线格 $t_i^{-1} D_0 (i = 0,1,2,\cdots)$ 的交点数。

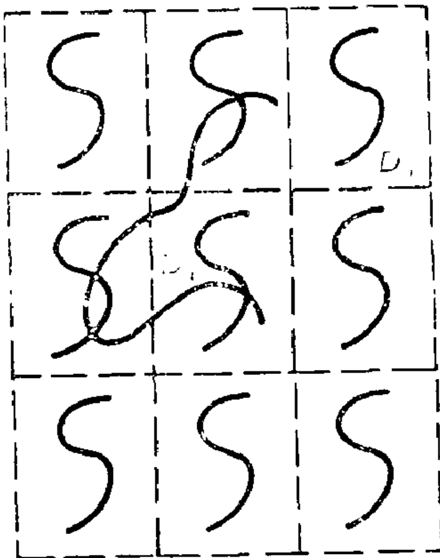


图 8.8

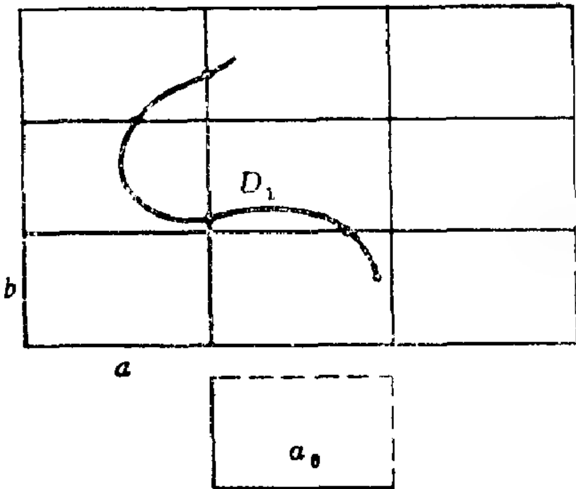


图 8.9

在图8.8里①，$n = 4$。于是得：

设一个格的基本区面积是 a_0，每个区含一条长度为 L_0 的曲线，而一条长度为 L_1 的曲线 D_1 随机地放了上去，则上述曲线格和 D_1 的平均交点数是

---

① 对原图有小改动。——译者

$$\overline{E(n)} = \frac{2L_0L_1}{\pi a_0}. \tag{8.11}$$

例如，考虑以边长为a,b的长方形格，而D_0为这些长方形的两条相邻边所构成(图8.9)。则$a_0 = ab$，$L_0 = a + b$，而

$$E(n) = \frac{2(a+b)L_1}{\pi ab}, \tag{8.12}$$

若$a\to\infty$，则上述的格变成平行线格，其间隔距离是b，而$E(n) = 2L_1/\pi b$。特殊地，若D_1为长度等于$L_1(L_1\leqslant b)$的线段，则n的值只能是0,1，而$E(n)$就等于一条长度为L_1的线段和一条平行线相交的概率。我们又一次获得 Buffon 的结果(第五章,第2节)。

4. 点格

设D_0为有尽多个点所构成，例如m个。令$f(D_0\cap D_1)$是含在D_1内的D_0点的个数。由(7.32)和(8.4)，就有

$$\int_{a_0} n\mathrm{d}K_1 = 2\pi mF_1, \tag{8.13}$$

其中n是点格中属于D_1的点的个数。例如在图(8.10)里，$m=3$，$n=4$，而在图8.11里，$m=1$，$n=2$。这个结果可以写成：

若每个基本区含有m点，而一个面积为F_1的域D_1随机地放在平面上，则D_1含有格点的平均数是

$$E(n) = \frac{mF_1}{a_0}. \tag{8.14}$$

我们将给出这个中值的三项应用。

(1) 考虑边长等于a的等边三角形格，则这些三角形的顶点构成一个点格。以这些点为顶点的平行四边形也构成一个格，其基本区是两个三角形所形成，$a_0 = (\sqrt{3}/2)a^2$，$m = 1$(图8.12)。这样，$E(n) = 2F_1(\sqrt{3}a^2)^{-1}$，于是得定理：

总可以把n个点放在一个已给的，面积为F_1的域内，使它们

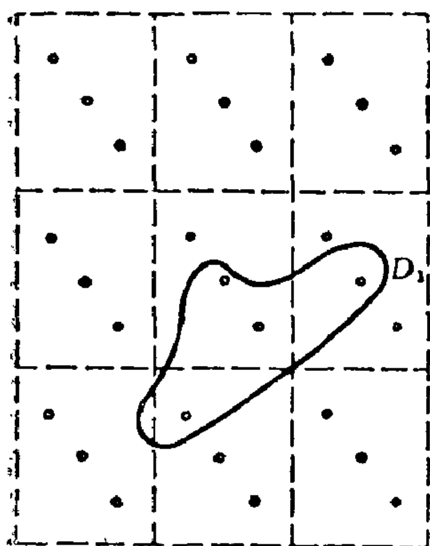


图 8.10

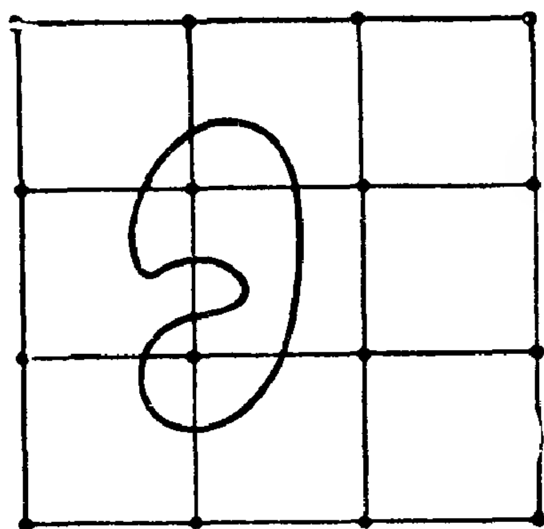


图 8.11

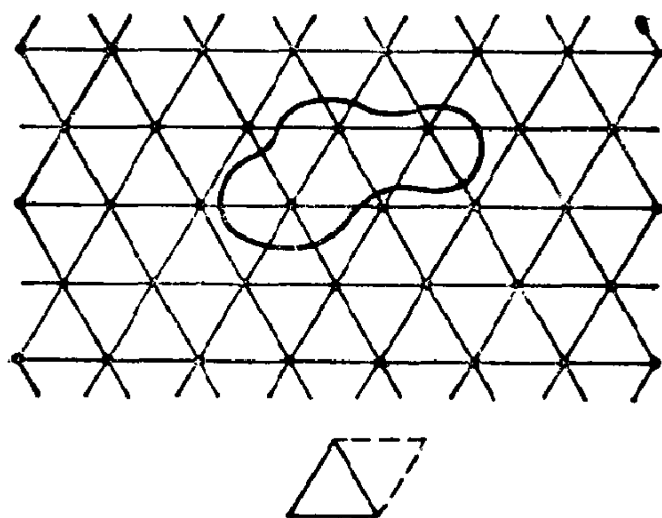


图 8.12

两点的最小距离 a 满足条件 $a^2 \geqslant 2F_1(\sqrt{3}\,n)^{-1}$[179]。

（2）若只考虑 D_1 的平移，只要把(7.32)右边的因子 2π 去掉，那个公式就适用，因而中值(8.14)也适用，不需改变. 我们将证明，若 D_1 是有界闭域，则它必有一个位置，含有至少 $[mF_1/a_0]+1$ 个格点，其中[ ]表示"整数部分"。事实上，若存在着使 $n<[mF_1/a_0]$ 的 D_1 的位置集合，其测度是正的，则为了补

偿，必有使$n>[mF_1/a_0]$的位置集合，其测度是正的，因而必有D_1的位置，使n等于$[mF_1/a_0]+1$。现在假设除了一个零测度集的D_1位置外，$n=[mF_1/a_0]$。取D_1的一个位置，使这些点中有些在边界∂D_1上。设ε为不属于D_1的格点和D_1的最短距离；由于D_1是有界闭集，$\varepsilon>0$，通过一个距离小于ε的平移，肯定可以使∂D_1上的一些格点离开D_1，因而就有一个正测度的D_1位置集合，使$D_1<[mF_1/a_0]$，和假设矛盾。于是我们证明了Blichfeldt定理[53]：

若平面上有一个格，其基本区的面积是a_0，而每个基本区含有m个格点，又在这个平面上有一个面积等于F_1的有界闭域D_1，则经过一个平移，必可使D_1的新位置含有至少$[mF_1/a_0]+1$个格点。

（3）已给一个点格，一个困难的课题是：若要求一个域的任何位置都含有至少一个已给数目的格点，求具有最小面积的这样的域的形状。

举一个例。考虑一个直角坐标系中具有整数坐标的点所构成的格（这样的格叫做整格），试求最小面积的闭凸集，它无论怎样地放在平面上，总要覆盖整格的一个点。对这一款，由(8.14)可知$E(n)=F_1$，而所需满足的条件是$E(n)\geq 1$，因而$F_1\geq 1$。若只考虑平移，所求答案显然是边长为1的正方形，$F_1=1$。若把一切运动考虑在内，条件$F_1=1$是不充分的。D.B.Sawyer([593]，对于具有中心的凸集)和J.J.Schäffer([594]，对于一般凸集)证明了：答案是一个边长为1的正方形和两个抛物线弓形所构成，抛物线切线和正方形的边所作的角是$\pi/4$（图8.13）。这个最小凸集的面积是$F_1=4/3$(参阅[332])。

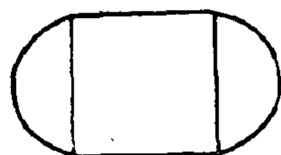


图 8.13

下面是一个类似的课题（设计人是Scott[603]）。设K为欧氏平面上一个有界凸集。令$\delta(K)$表示K的宽。若$\delta(K)\geq\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$，则$K$含有整格的一个点。当$K$为边长为$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$的等边三角形时，而且只在此时，需用这里面的等号。

若一个域D不含整格中的任何点作为一个内点，则相对于整格，D称为可容[许]的。Bender[25]证明了$2F\leqslant L$，其中F为D的面积，L为周长。参看Silver[612]，Hadwiger[277,278]和Wills[726,727]的结果.下面是Bokowski,Hadwiger与Wills[60]所得到的一般结果：设K为n维欧氏空间的凸体，它的体积是V，表面面积是F，并设N为作为K的内点的格点(具有整数坐标的点)，则$N>V-F/2$，而且其中的因子1/2不能用更小的数替代(参看[598a])。

Poole与Gerriets[491]探讨了以下课题：已给任意长度为L的弧，求平面上面积最小的凸区，它经过适当的平移和转动，可以覆盖那个弧。他们指出，一个对角线长为L和$3^{-1/2}L$的菱形R将能覆盖每一个那样的弧。他们还指出，可以把R"截"去一块以得到具有所要求性质的较小的区，其面积小于$0.2861L^2$。Chakerian与Klamkin[100]和Wetzel[714a]考虑了与此相关的问题。

要确定一个随机区所覆盖的格点数的方差，一般地是困难的。Kendall与Rankin[334]处理了E_n里在一个随机球内部的格点问题(与此有关的结果，见[335])。

5. 注记与练习

(1) **有关格的概率**。考虑基本区为具面积a_0的凸多边形所构成的格。基本区的边界构成一个线状格(或无穷网络)，它是a_0的部分边界经过变换t_i所产生的。设u_0为这部分边界的长。例如，对于图8.2的格，若作为基本区的平行四边形的边长是a,b，顶角是θ，则$a_0=ab\sin\theta$，$u_0=a+b$；对于图8.3的格，若六边形的边长是a，则$a_0=(3\sqrt{3}/2)a^2$，$u_0=3a$。在本节里，我们用"格"这个词来表示基本区的边界所构成的线状格。

设S^*是长度为r的有向线段，而且S^*不能同线状格有多于两个公共点。(6.44给)出了S^*含在一个基本区内的一切位置集合测度m。另一方面，若令$m_i(i=0,1,2)$为S^*同格有i个公

共点的一切位置测度，则根据(8.10)，$m_1-m_2=4ru_0$，而S^*在运动群$\{t_i\}$下互不等价的位置集合的测度是$m_0+m_1+m_2=2\pi a_0$。若m_0已知，则由这些公式可以确定m_1和m_2，我们就可以求得S^*同格有0,1,2个公共点的概率。

例1 考虑图8.2里的平行四边形格。按照(6.44)，

$$m_0=2\pi ab\sin\theta-4r(a+b)+r^2[2+(\pi-2\theta)\cot\theta], \tag{8.15}$$

而利用上述的结果，就得

$$\begin{aligned} m_1&=4r(a+b)-2r^2[2+(\pi-2\theta)\cot\theta],\\ m_2&=r^2[2+(\pi-2\theta)\cot\theta]. \end{aligned} \tag{8.16}$$

因此

设平面上有一个以边长为a,b，顶角为θ的全等平行四边形所构成的格，并把一根长度为r的针随机地放在上面。假定该针同格相交不多于两点。则交点数为0,1,2的概率是

$$p_0=1-\frac{2r(a+b)}{\pi ab\sin\theta}+\frac{r^2}{2\pi ab\sin\theta}[2+[\pi-2\theta)\cot\theta],$$

$$p_1=\frac{2r(a+b)}{\pi ab\sin\theta}-\frac{r^2[2+(\pi-2\theta)\cot\theta]}{\pi ab\sin\theta},$$

$$p_2=\frac{r^2[2+(\pi-2\theta)\cot\theta]}{2\pi ab\sin\theta}.$$

例2 对于以边长为a的正六边形格和长度r $(r\leqslant a)$的针，其概率是

$$p_0=1-\frac{4\sqrt{3}\,r}{3\pi a}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3\pi}-\frac{1}{9}\right)\frac{r^2}{a^2},$$

$$p_1=\frac{4\sqrt{3}\,r}{3\pi a}-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}-\frac{2}{9}\right)\frac{r^2}{a^2},$$

$$p_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3\pi}-\frac{1}{9}\right)\frac{r^2}{a^2}.$$

Santaló[532]探讨了这个问题。

例3　凸集格　假定每个基本区含有一个凸集D_0，它的面积是F_0，周长是L_0。设D_1为另一个凸集，它的面积是F_1，周长是L_1，而且它不能和一个以上的$t_i^{-1}D_0$相交(图8.14)。根据(7.19)，

$$m(D_1;D_0\cap D_1\neq\varnothing)$$
$$=2\pi(F_0+F_1)+L_0L_1$$

而由于D（对于$\{t_i\}$不等价）的位置测度是$2\pi a_0$，就得：

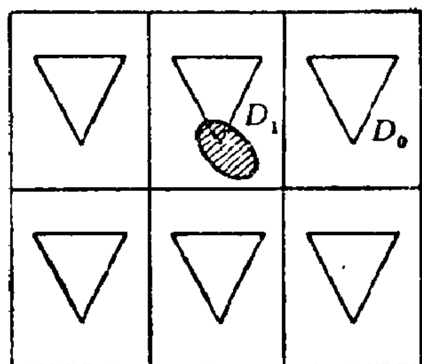


图　8.14

设在平面上有由凸集D_0所产生的格而把一个凸集D_1随机地放上去，则（在D_1不能和两个$t_i^{-1}D$相交的假定下），D_1和$t_i^{-1}D_0$之一相交的概率是

$$p=\frac{2\pi(F_0+F_1)+L_0L_1}{2\pi a_0}.$$

练习　设D_1为线段，它的长r不小于D_0的直径，但又不能和格中一个以上的凸集$t_i^{-1}D_0$相交。证明：D_1同∂D_0交于0,1,2个点的概率是

$$p_0=1-\frac{F_0}{a_0}-\frac{rL_0}{\pi a_0},\quad p_1=\frac{2F_0}{a_0},\quad p_2=\frac{rL_0}{\pi a_0}-\frac{F_0}{a_0}.$$

（3）**等边三角形格**。考虑边长为a的等边三角形格(图8.12)。把一条长度为r（$r\leqslant(\sqrt{3}/2)a$)的线段随机地放上去，它可能和格交于0,1,2个点。其对应的概率是[532]

$$p_0=1-\frac{4\sqrt{3}r}{\pi a}+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{1}{3}\right)\frac{r^2}{a^2},$$

$$p_1=\frac{4\sqrt{3}r}{\pi a}-\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}+\frac{5}{3}\right)\frac{r^2}{a^2},$$

$$p_2=\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)\frac{r^2}{a^2},$$

$$p_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{\pi}-\frac{1}{3}\right)\frac{r^2}{a^2}.$$

（4）特殊形状的凸集及其格。

(a) 考虑边长为$a,b(a\geqslant b)$的长方形的格(图8.15)，并设K为常幅凸集，其幅$h\leqslant b$。若把D_1随机地放在平面上，则K_1和0，1，2条格线相交的概率是

$$p_0=1-\frac{(a+b)h}{ab}+\frac{h^2}{ab},\quad p_1=\frac{(a+b)h}{ab}-\frac{2h^2}{ab},\quad p_2=\frac{h^2}{ab}.$$

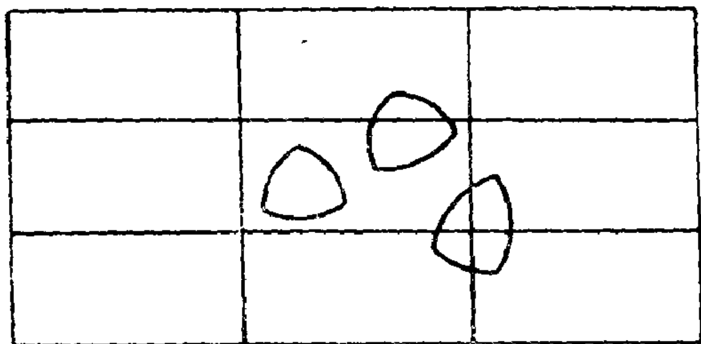


图 8.15

(b) 考虑边长为a的等边三角形格(图8.16)和一个三角凸集K_1，其外接三角形的边$a_1\leqslant a$（第一章，第4节)。若把K_1随机地放在平面上，则K_1和格相交的概率是$p=2a_1/a-(a_1/a)^2$，而K完全落在格中一个三角形之内的概率是$p_0=1-(2a_1/a)+(a_1/a)$ [551]。

(c) 考虑边长为a的正方形的格，并以每个顶点为中心作半径等于$a/4$的圆(图8.17)。作为练习，证明：(i) 格中的圆和一个长度为L的随机曲线的平均交点数是$E(n)=L/a$。(ii) 若一个形状任意而有16个小孔的薄片随机地放在平面上，则落在格中一个圆内的小孔的平均数是π。

（5）曲线长的测量。把公式(8.12)应用于边长为a的正

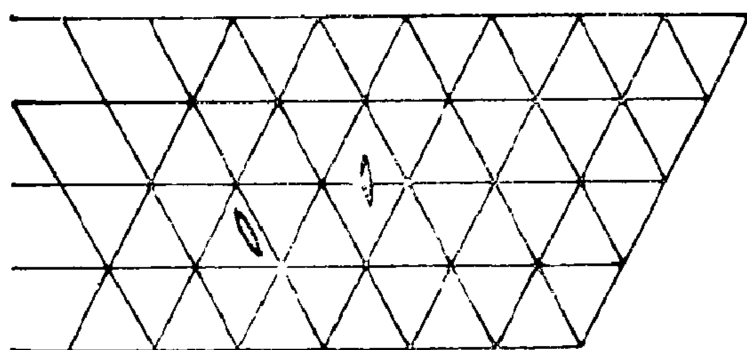


图 8.16

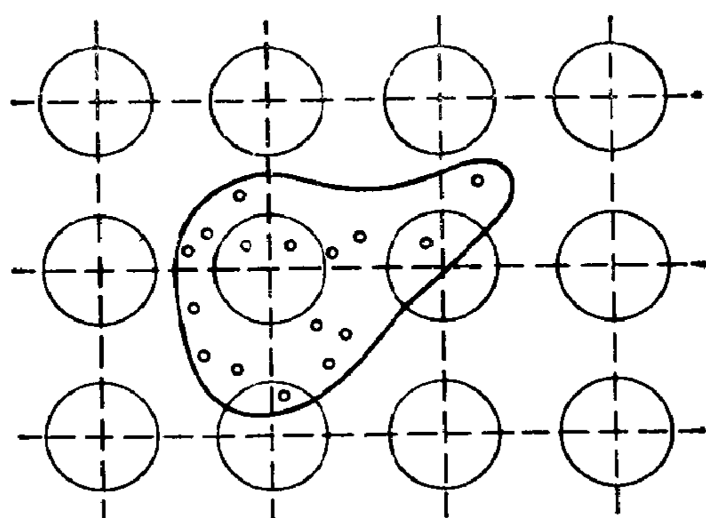


图 8.17

方形格，就得$L_1=(\pi/4)aE(n)$。这个结果提供了测量曲线长的一种实际方法。假定我们把一张画有边长为a的正方格的透明薄片盖在曲线上。记下曲线和格线的交点数，把薄片逐次转动π/n角，取各次交点数的中值，再乘以$(\pi/4)a$，就得L_1的一个估计值。利用这个方法所产生误差的估计，Moran[427]作过分析。

第 二 篇

一 般 积 分 几 何

第九章　微分齐式与李群

1. 微分齐式

在第一篇里，我们从初等观点论述了平面积分几何。点集和线集的密度以及运动密度都是通过特殊办法获得的，它们的不变性是直接地而且彼此独立地证明的。

我们要把前面的结果和思想概括在一个一般的范畴内。为此目的，我们需要：(a) 一个含有某些几何对象的基本空间 M(在第一篇里，M是欧氏平面而对象是点，线，或全等图形)；(b) 一个作用于M上的变换群$\mathfrak{G}$（在第一篇里，$\mathfrak{G}$ 是平面上的运动群）。一旦有了空间M和变换群 $\mathfrak{G}$，下一步就是对于几何对象的集合确定在$\mathfrak{G}$下不变的一种测度，然后对于某些特殊的集合计算其测度，以便获得一些有几何意义的结果。

我们将假定读者已经了解微分流形与李群中的一般定义和基本定理，象Sternberg[628]，Kobayashi与Nomizu[341a]或Bishop与Goldberg[32]的书中所阐明的。在本章内，我们只对微分组和李群与齐性空间上的不变测度的主要性质作一概述。

设M为一个 C^∞类 n 维微分流形．用 T_p表示在 p 点的切空间，$T(M)$表示所有切空间T_p的并集．一个矢场X是一个函数$X: M\to T(M)$，对于每个 $p\in M$，它确定一个矢量$X_p\in T_p$。若X是一个矢场，而 f 属于确定于M上的 C^∞类函数环，则Xf 为函数 $p\to X_p(f)$或$Xf(p)=X_pf$。若x_i是局部坐标系，则一个矢场用

$$X=\sum_i^n a^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{9.1}$$

确定，其中函数$a^i(x)$总假定是属于C^∞类的。

若 T_p^* 表示T_p的对偶空间(称为M在 p 的余切空间)而$T^*(M)$

表示所有空间T_p^*的并集，则M的一个一次式是一个函数 $M\to T^*(M)$，对于每一点 $P\in M$，它确定一个余矢 $\omega_p\in T_p^*$。在局部坐标系里，一次式表现为

$$\omega=\sum_1^n a_i(x)\mathrm{d}x_i, \tag{9.2}$$

其中 $a_i(x)$是C^∞类函数。若 $\bigwedge T_p^*(M)$表示$T_p^*(M)$上的外代数，则一个 q 次式就对于每个点 $p\in M$确定 $\bigwedge T_p^*(M)$里的一个 q 次元素。在局部坐标系x_i里，$\omega^{(q)}$ 可以唯一地表示为

$$\omega^{(q)}=\sum_{i_1<\cdots<i_q} a_{i_1\cdots i_q}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_q},$$

其中$a_{i_1\cdots i_q}$为M上的C^∞类函数。当 $q>n$时，不存在不等于零的 q 次式。q 次式就叫做 q 次微分齐式，而且我们约定，函数是零次微分齐式。显然，M上的 q 次式构成确定于M上的C^∞类函数环上的一个模。这个模的一个底是一切外积$\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_q}$，$(i_1<\cdots<i_q)$。更一般地，若 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$为一次式的一个底，则一切外积$\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_q}$ $(i_1<\cdots<i_q)$ 构成 q 次式的一个底。

$\omega^{(q)}$的外导式或外微分的定义是

$$\mathrm{d}\omega^{(q)}=\sum_i \mathrm{d}a_{i_1\cdots i_q}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\mathrm{d}x_{i_q}$$

$$=\sum_{i,k}\frac{\partial a_{i_1\cdots i_q}}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_q}, \tag{9.3}$$

其中的总和里下标 i_h的范围是满足 $i_1<\cdots<i_q$的一切排列，而 k 则满足 $1\leqslant k\leqslant n$。注意，对于任意整数 $q,s\geqslant 1$，

$$\begin{gathered}\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega^{(q)})=0,\\ \mathrm{d}(\omega^{(q)}\wedge\omega^{(s)})=\mathrm{d}\omega^{(q)}\wedge\omega^{(s)}+(-1)^q\omega^{(q)}\wedge\mathrm{d}\omega^{(s)}.\end{gathered} \tag{9.4}$$

对于一次式，有时候利于把它的外微分用普通微分表示。为此，注意外积 $\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ 可以看作 $\boldsymbol{R}^2$ 里的带有正负号的面积元素。于是，若$(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2)$和$(\delta x_1,\delta x_2)$为两个独立的无穷小矢，就

有 $dx_1 \wedge dx_2 = dx_1\delta x_2 - dx_2\delta x_1$，而一次式 ω(9.2)的外微分可以写成

$$d\omega = \sum_{i,k}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i$$

$$= \sum_{i,k} \frac{\partial a_i}{\partial x_k}(dx_k\delta x_i - \delta x_k dx_i). \qquad (9.5)$$

根据 $d\delta x_i = \delta dx_i$(这相当于二阶偏导数与取导数的次序无关)，就有[90，第36页]

$$d\omega = d\omega(\delta) - \delta\omega(d)①. \qquad (9.6)$$

这个公式在坐标变换下不变，我们以后将用到它。注意在左边，d 表示外导，而在右边，它表示普通的微分。不过，既然(9.6)并不常用，保留这个较易误解的记法并无危险。

最后，注意已给 r 个一次式

$$\phi_i = \sum_j a_{ij}dx_j \quad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

我们有

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_r$$

$$= \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \det(a_{i_1} \cdots a_{i_r})\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}, \qquad (9.7)$$

其中 $\det(a_{i_1} \cdots a_{i_r})$表示矩阵$(a_{ij})$的第 $i_1, \cdots, i_r$ 列所构成的行列式。特殊地，若 $r = n$，就有

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n = \det(a_{ij})dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n. \qquad (9.8)$$

若在M的每点，矩阵(a_{ij})的秩是 r，一次式 $\phi_1, \cdots, \phi_r$ 是独立的，故根据(9.7)，$\phi_1, \cdots, \phi_r$ 独立的充要条件是

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_r \neq 0. \qquad (9.9)$$

---

① 右边更明确的写法是 $d[\omega(\delta)] - \delta[\omega(d)]$，其中 $\omega(d)$就是(9.2)中的一次式，而 $\omega(\delta) = \sum_i a_i \delta_{x_i}$。——译者

2. Pfaff 微分组

设 ω 为微分流形M上的一次式，而X为M上的矢场。方程 $\omega X=0$ 表示在M的每一点 p，余矢 $\omega(p)$把矢量 X_p化为零。这时，我们就说X是方程 $\omega=0$ 的一个解，而这样一个方程就叫做一个 Pfaff 方程。

更一般地，若 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_r$ 为M上 r 个独立一次式，则方程组

$$\omega_1=0,\qquad \omega_2=0,\qquad \cdots,\qquad \omega_r=0 \tag{9.10}$$

称为M上的一个 Pffaf组。已给M(或M的一个开域)上两个Pffaf组 $\omega_i=0(i=1,2,\cdots,r)$和 $\phi_j=0(j=1,2,\cdots,m)$，若有 C^∞类函数 λ_{ij} 和 μ_{ij}，使

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}\phi_j,\qquad \phi_j=\sum_{i=1}^{r}\mu_{ij}\omega_i, \tag{9.11}$$

则两个 Pffaf 组称为等价的。

显然，若一次式 ω_i 是独立的，而一次式 ϕ_j 也是独立的，则只有 $m=r$ 而且方阵(μ_{ij})是方阵(λ_{ij})的逆时，(9.11)才能成立。若设 $\omega_i=\sum a_{ik}dx_k$，则一个矢场 $X=\sum a^j(\partial/\partial x_j)$为(9.10)的解的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a^k=0,\qquad i=1,2,\cdots,r. \tag{9.12}$$

若一次式ω_i是独立的，则方阵(a_{ik})的秩等于 r，这时在每一点 $p\in M$，分量 $a^k(p)$满足线性方程(9.12)的矢量 X_p构成切空间T_p的一个 $n-r$ 维子空间，或 $n-r$ 维平面。于是对于每一个 Pffaf 组(9.10)，就有一个 $n-r$ 维平面场，也就是有一个函数。对于每一点 $p\in M$，这个函数使一个 $n-r$ 维平面 T_p 与 p 对应。这样一个函数叫做M上的一个 r 维分布。我们说，这个 $n-r$维平面场是(9.10)组的零化场或解。若M'为M的一个子流形，而且对于每一个 $p\in M'$，M'在 p 的切空间 T_p含在(9.10)组的零化场内，

则 M' 称为(9.10)组的一个**积分流形**。倒转来，若有 $n-r$ 个独立的矢场 $X^i=\sum a_i^k(\partial/\partial x_k)$ $(i=1,\cdots,n-r;\ k=1,2,\cdots,n)$，张成一个 M 上的 $n-r$ 维矢场，则线性方程组

$$\sum_{k=1}^{n} a_h a_i^h = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n-r) \tag{9.13}$$

在每一点 $p\in M$ 确定余空间 T_p^* 的一个 r 维平面。这就是说，对应于每一个 $n-r$ 维平面场，有一个函数(叫做一个 r 维余分布)，对于每一点 $p\in M$，它确定 T_p^* 的一个 r 维平面，即一组 r 个独立的一次式，而这 r 个一次式，除了还可以用它们的线性组合代替之外，是完全确定的。

已给 Pffaf 组(9.10)，若在 M(或 M 的一个开集)上有一组 r 个函数 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,r)$，使(9.10)组和方程组

$$\mathrm{d}y_1=0,\quad \mathrm{d}y_2=0,\ \cdots,\quad \mathrm{d}y_r=0 \tag{9.14}$$

等价，则所给 Pffaf 组称为**完全可积的**。

换句话说，若有 r 个函数 $y_i(x_1,\cdots,x_n)$，使

$$\omega_i=\sum_{h=1}^{r} a_{ih}\mathrm{d}y_h, \tag{9.15}$$

其中 (a_{ih}) 是可逆(即满秩)方阵，其元素 a_{ih} 是 C^∞ 类的，则(9.10)完全可积。若(9.10)完全可积，则经过每一点 $p\in M$，有一个 $n-r$ 维积分子流形。事实上，在每一点 p 的邻近，方程组 $y_i(x)=y_i(p)$ 确定一个 $n-r$ 维子流形，而这显然是一个积分子流形，因为(9.14)和(9.10)等价。倒转来，已给一族的 $n-r$ 维微分子流形，若经过 M 的每一点，有族中唯一的一个子流形，则这些微分子流形是一个完全可积 Pffaf 组的积分流形。事实上，在一个局部坐标系里，所给子流形可以用

$$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)=0,\qquad i=1,2,\cdots,r \tag{9.16}$$

代表，其中每一点 $p\in M$ 确定唯一的一组参数 $\xi_1,\cdots,\xi_r$。这时，上面所说的 Pffaf 式就是

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j = 0, \quad i = 1,2,\cdots,r, \tag{9.17}$$

其中的参数 ξ_i 要用从(9.16)解出的含 x_i 的函数代入。

最后，我们指出，若(9.10)是完全可积的，即若一次式 ω_i 可以写成(9.15)的形状，则

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial a_{ih}}{\partial x_j} dx_j \wedge dy_h, \quad i = 1,2,\cdots,r, \tag{9.18}$$

而利用方程(9.14)，就得 $d\omega_i = 0$。于是可以得出下面结论：

(9.10)组完全可积的一个必要条件是，若把组中的方程考虑在内时，外微分 $d\omega_i = 0$。

换句话说，(9.10)组完全可积的一个必要条件是

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,r). \tag{9.19}$$

上述条件也是充分的(Frobenius 定理)，但我们将只用到它的必要性。Frobenius 定理的证明见 Flanders[201]，Sternberg[628]，或 H.Cartan[91]。

3. 微分流形的映射

在讨论李群之前，需要陈述关于微分流形的映射的一些定义。设 Φ: $M \to M'$ 为从 n 维微分流形 M 到 m 维微分流形 M' 内的一个映射。若对于在 M' 上确定的任意 $f \in C^\infty$，都有 $f \circ \Phi \in C^\infty$，则 Φ 就称为可微的。若 Φ 是可微的，则有一个诱导的线性映射 $d\Phi$: $T(M) \to T(M')$，称为 Φ 的微分，其定义如下：对于任意矢量 $X_p \in T_p$ 和任意在 $p' = \Phi(p)$ 的一个邻域里确定的 $f \in C^\infty$，$d\Phi(X_p)f = \Phi_p(f \circ \Phi)$。用局部坐标表示：若 Φ 表现为 $x'_\alpha = x'_\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n), \alpha = 1,2,\cdots,m$，而 $X_p = \sum_1^n a^i (\partial/\partial x_i)_p$，则

$$(d\Phi)X_p = \sum_{i,\alpha} a^i \left(\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\right)_{p'}, \tag{9.20}$$

其中的上下标的范围是 $i=1,2,\cdots,n$；$\alpha=1,2,\cdots,m$。

从这个式就可以得到链式法则：若 Φ：$M\to M'$，而 Ψ：$M'\to M''$，则

$$\mathrm{d}(\Psi\circ\Phi)=\mathrm{d}\Psi\circ\mathrm{d}\Phi. \tag{9.21}$$

可微映射 Φ：$M\to M'$ 还诱导出一个映射

$$\Phi^*: T(M')\to T^*(M),$$

称为 Φ 的对偶，其定义为

$$\Phi^*(\omega')X_p=\omega' X_{p'}, \tag{9.22}$$

其中 $X_{p'}=(\mathrm{d}\Phi)X_p$，而 ω' 表示 $T^*_{p'}$ 的一个一次式。若 $\omega'=\sum a_\alpha \mathrm{d}x_\alpha$，则 $\Phi^*(\omega')$ 的表达式是

$$\Phi^*\left(\sum^m a_\alpha \mathrm{d}x_\alpha\right)=\sum_{i,\alpha} a_\alpha \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i. \tag{9.23}$$

注意 $\mathrm{d}\Phi$ 和 Φ^* 的矩阵互为转置。

映射 Φ^* 可以扩充成关于 q 次式的一个映射 $\omega'^{(q)}\to\omega^{(q)}$ 如下：

$$\Phi^*\left(\sum_\alpha a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_q}\mathrm{d}x_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha_q}\right)$$

$$=\sum_{\alpha,i} a_{\alpha_1\cdots\alpha_q}\frac{\partial x'_{\alpha_1}}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial x_{\alpha_q}}{\partial x_{i_q}}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_q}. \tag{9.24}$$

特殊地，若 $m=n$ 而 ω' 为 M' 上的 n 次式，则

$$\Phi^*\omega'=|J|\omega=(\det\Phi)\omega, \tag{9.25}$$

其中 $|J|$ 表示 Jacobi 方阵 $J=(\partial x'_\alpha/\partial x_i)$ 的行列式（$i=1,2,\cdots,n$；$\alpha=1,2,\cdots,m$）。

由(9.24)容易推得下面公式。

$$\begin{aligned}&(\Psi\circ\Phi)^*=\Phi^*\circ\Psi^*,\\&\Phi^*(\omega\wedge\phi)=\Phi^*(\omega)\wedge\Phi^*(\phi),\\&\Phi^*(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}(\Phi^*(\omega)).\end{aligned} \tag{9.26}$$

4. 李群；左移与右移

一个李群$\mathfrak{G}$是一个群，其元素是一个微分流形的点，这个流形也用$\mathfrak{G}$表示，而且群运算$(a,b)\to ab^{-1}(a,b\in\mathfrak{G})$是一个从$\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$到$\mathfrak{G}$内的可微映射。若$e\in\mathfrak{G}$是幺元，映射$x\to x^{-1}$可以写成$(e,x)\to ex^{-1}$，故它也是一个可微分映射$\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}$。

一般线性群GL(n)(一切可逆$n\times n$方阵的群)是一个李群。映射$a_{ij}\to x_{n(i-1)+j}(i,j=1,2,\cdots,n)$把每一个方阵$(a_{ij})$变成$R^{n^2}$的一点。因此，GL$(n)$的群流形是把满足$\det(a_{ij})=F(x_1,\cdots,x_{n^2})=0$的点除外后的$n^2$维仿射空间。积分几何主要是讨论方阵李群，即GL$(n)$的子群中构成微分流形的，例如特殊线性群SL$(n)$(行列式等于1的一切$n\times n$实方阵的群)，和正交群$O(n)$(满足$OO^t=I$的一切$n\times n$实方阵的群，其中$O^t$是$O$的转置，而$I$为幺方阵)。由于$OO^t=I$包含$n(n-1)/2$个条件，$O(n)$的维是$n(n-1)/2$。

对于每个固定的$g_0\in\mathfrak{G}$，我们有两个可微映射$\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}$：(a) 左移$L_{g_0}$：$g\to g_0g$及(b) 右移$R_{g_0}$：$g\to gg_0$。

已给$\mathfrak{G}$上一个矢场X，若对于任意的$g,g_0\in\mathfrak{G}$，我们有

$$(\mathrm{d}L_{g_0})X_g=X_{g_0g},\tag{9.27}$$

则X称为左不变矢场。

把$g_0\to g$，$g\to e$代入，得

$$X_g=(\mathrm{d}L_g)X_e.\tag{9.28}$$

因此，每一个左不变矢场可以由一个在幺元e的切矢通过左移产生。

同样，已给$\mathfrak{G}$上一个矢场X，若对于任意的$g,g_0\in\mathfrak{G}$，我们有$\mathrm{d}(R_{g_0})X_g=X_{g_0g}$，则$X$称为右不变矢场。用$g_0\to g,g\to e$代入，就有$X_g=(\mathrm{d}R_g)X_e$。这证明了，每一个右不变矢场可以由一个在幺元的切矢通过右移产生。

对于一切$g_0,g_1\in\mathfrak{G}$，我们有

$$L_{g_0}R_{g_1}(g)=L_{g_0}(gg_1)=g_0gg_1,$$
$$R_{g_1}L_{g_0}(g)=R_{g_1}(g_0g)=g_0gg_1,$$

因而

$$L_{g_0}R_{g_1}=R_{g_1}L_{g_0}. \tag{9.29}$$

另一方面，根据(9.21)，我们有 $\mathrm{d}(L_{g_0}\circ R_{g_1})=\mathrm{d}L_{g_0}\circ \mathrm{d}R_{g_1}$，于是有交换性

$$\mathrm{d}L_{g_0}\circ\mathrm{d}R_{g_1}=\mathrm{d}R_{g_1}\circ\mathrm{d}L_{g_0}. \tag{9.30}$$

现在注意

$$L_{g_1g_0}:\ g\to(g_1g_0)g=g_1(g_0g),\quad R_{g_1g_0}:\ g\to g(g_1g_0)=(gg_1)g_0,$$

因此，

$$L_{g_1g_0}=L_{g_1}\circ L_{g_0},\qquad R_{g_1g_0}=R_{g_0}\circ R_{g_1}. \tag{9.31}$$

于是根据(9.21)，

$$\mathrm{d}L_{g_1g_0}=\mathrm{d}L_{g_1}\circ\mathrm{d}L_{g_0},\qquad \mathrm{d}R_{g_1g_0}=\mathrm{d}R_{g_0}\circ\mathrm{d}R_{g_1}. \tag{9.32}$$

由(9.31)可知 $L_{g_0^{-1}}\circ L_{g_0}=R_{g_0}\circ R_{g_0^{-1}}=$ 幺变换，因而

$$\mathrm{d}L_{g_0^{-1}}=(\mathrm{d}L_{g_0})^{-1},\qquad \mathrm{d}R_{g_0^{-1}}=(\mathrm{d}R_{g_0})^{-1}。 \tag{9.33}$$

伴随表现。设 T_e 表示$\mathfrak{G}$在幺元 e 的切空间，每一个 $g_0\in\mathfrak{G}$ 诱导出一个把 T_e 表为自己的变换，称为 g_0 的**伴随变换**，其定义是

$$\mathrm{ad}(g_0):\ X_e\to(\mathrm{d}R_{g_0^{-1}}\circ\mathrm{d}L_{g_0})X_e. \tag{9.34}$$

它是线性变换，因为 $\mathrm{d}L_{g_0}$ 和 $\mathrm{d}R_{g_0}$ 是线性变换。映射 $g\to\mathrm{ad}(g)$ 叫做$\mathfrak{G}$的伴随表现，它是从$\mathfrak{G}$到 T_e 的自同构群（即GL(n)）内的一个同态。事实上，利用(9.30)和(9.32)，我们容易证明

$$\mathrm{ad}(g_1g_0):\ X_e\to\mathrm{ad}(g_1)\circ\mathrm{d}(g_0)X_e,$$

而 $\mathrm{ad}(g_0^{-1})=(\mathrm{ad}(g_0))^{-1}$

5. 左不变微分齐式

每一个左移 L_{g_0} 诱导出它的对偶映射(9.22)

$$L_{g_0}^*:\ T_{g_0g}^*\to T_g^*, \tag{9.35}$$

它是从余切空间 $T^*_{g_0g}$ 到 T^*_g 上的映射. 已给一次式 $\omega\in T^*(\mathfrak{G})$, 若对于一切 $g_0,g\in\mathfrak{G}$,

$$L^*_{g_0}\omega(g_0g)=\omega(g), \tag{9.36}$$

则 ω 称为左不变式. 在局部坐标下, 若 x_i,x_i^0 和 $y_i=y_i(x_i;x_i^0)$ 依次为 g,g_0 和 g_0g 的坐标, 则不变条件(9.36)可以写成

$$\sum^n a_i(y)\mathrm{d}y_i=\sum_{i,h}a_i(y(x))\frac{\partial y_i}{\partial x_h}\mathrm{d}x_h=\sum^n a_i(x)\mathrm{d}x_i, \tag{9.37}$$

而这个等式表明, 有时用来表达 ω 的左不变性的记号

$$\omega(g_0g)=\omega(g) \tag{9.38}$$

是合理的. 例如 $x^{-1}\mathrm{d}x$ 是实数乘法群的一个左不变式, 因为对于任意常数 x_0,

$$\omega(x_0x)=(x_0x)^{-1}(\mathrm{d}x_0x)=x^{-1}\mathrm{d}x=\omega(x).$$

若 ω_1 和 ω_2 为左不变一次式, 则对于任意常数 a,b, $a\omega_1+b\omega_2$ 也是左不变式, 因而左不变一次式构成实数域上的一个矢空间. 由(9.36)可知

$$L^*_{g^{-1}}\omega(e)=\omega(g).$$

因此, $\mathfrak{G}$ 上的一切左不变一次式都可以由在 e 的一次式产生, 所以左不变一次式所构成的空间和 T^*_e 有相同的维, 即 $\mathfrak{G}$ 的维 n. 构成这个空间的任意底的一次式 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 称为 $\mathfrak{G}$ 的 Maurer-Cartan 式. 换句话说, $\mathfrak{G}$ 的一组 Manrer-Cartan 式是 $\mathfrak{G}$ 的任意一组线性无关的左不变一次式. 因此, 每一个左不变一次式可以写成

$$\omega=\sum^n a_i\omega_i, \tag{9.39}$$

其中 a_i 是常数. 为了给出这个事实的一个直接证明, 注意若 ω 是一个左不变一次式, 则

$$L^*_{g_0}\omega(g_0g)=\sum_i^n a_i(g_0g)\omega_i(g_0g)=\omega(g)$$

$$= \sum_{i}^{n} a_i(g)\omega_i(g),$$

而由于 $\omega_i(g_0 g) = \omega_i(g)$，就得

$$\sum_{i} (a_i(g_0 g) - a_i(g))\omega_i(g) = 0.$$

但因据假设，一次式 ω_i 是线性独立的，最后一式表明 $a_i(g_0 g) = a_i(g)$，因而 a_i = 常数($i = 1, 2, \cdots, n$)。

一般地，我们有下面的重要定理。

每一个左不变 h 次式可以写成

$$\omega^{(h)} = \sum_{i_1, \cdots, i_h} a_{i_1 i_2 \cdots i_h} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_h}, \tag{9.40}$$

其中一次式 ω_{i_k} 属于一组 Maurer-Cartan 式。而系数 $a_{i_1 \cdots i_h}$ 是常数.

证明与前同，因为$\binom{n}{h}$个乘积 $\omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_h}$ 构成 h 次式模的一个底。

系理　若$\mathfrak{G}$是 n 维的，一切左不变 n 次式彼此间的差别只是一个常数因子.

6. Maurer-Cartan 方程

设$\{\omega_i\}$($i = 1, 2, \cdots, n$)为一组 Maurer-Cartan 一次式，即$\mathfrak{G}$上左一次不变式所构成的矢空间的一个底，根据(9.26)中的最后一个方程，我们有 $L_g^* \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(L_g^* \omega)$。这样，外导式 $\mathrm{d}\omega_i$ 是左不变二次式，而根据上节最后定理，我们可以令

$$\mathrm{d}\omega_i = \sum_{j, k=1}^{n} C^i_{jk} \omega_j \wedge \omega_k, \tag{9.41}$$

其中 C^i_{jk} 为常数。令 $C^i_{jk} - C^i_{kj} = C'^i_{jk}$，然后把$C'^i_{jk}$仍写成 C^i_{jk}，则(9.41)可以写成

$$d\omega_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} C^i_{jk}\omega_j \wedge \omega_k, \tag{9.42}$$

其中 C^i_{jk} 是满足

$$C^i_{jk} + C^i_{kj} = 0 \tag{9.43}$$

的常数。

方程(9.42)叫做群 $\mathfrak{G}$ 的 Manrer–Cartan 方程或结构方程。常数C^i_{jk} 称为$\mathfrak{G}$对于底$\{\omega_i\}$的结构常数。

有时候利于把结构方程用普通的微分来表示。利用(9.6)，可以把(9.42)写成

$$d\omega_i(\delta) - \delta\omega(d) = \frac{1}{2}\sum_{j,k} C^i_{jk}(\omega_j(d)\omega_k(\delta) - \omega_j(\delta)\omega_k(d))$$

$$= \sum_{j,k} C^i_{jk}\omega_j(d)\omega_k(\delta), \tag{9.44}$$

其中右边是微分齐式的普通乘积。

结构常数的性质。结构常数满足反称条件(9.43)。此外，对 Manrer–Cartan 方程取外积，利用 $d(d\omega) = 0$，得

$$0 = \frac{1}{4}\sum C^i_{jk}(C^j_{pq}\omega_p \wedge \omega_q \wedge \omega_k - C^k_{pq}\omega_j \wedge \omega_p \wedge \omega_q)$$

$$= \frac{1}{2}\sum C^i_{jk}C^j_{pq}\omega_p \wedge \omega_q \wedge \omega_k$$

$$= \sum_j \sum_{p<q<k} (C^i_{jk}C^j_{pq} + C^i_{jq}C^j_{kp} + C^i_{jp}C^j_{qk})\omega_p \wedge \omega_q \wedge \omega k.$$

由于$\{\omega_p \wedge \omega_q \wedge \omega_k\}$ $(p<p<k)$是左不变三次式所构成的矢空间的底，因而这些三次式是独立的。我们有，对于一切 $i,p,q,k \leqslant n$，

$$\sum_{j=}^{n} (C^i_{jk}C^j_{pq} + C^i_{jq}C^j_{kp} + C^i_{jp}C^j_{qk}) = 0. \tag{9.45}$$

方程(9.41)所确定的结构常数和底$\{\omega_i\}$有关。若用另一个底

$\{\phi_i\}$代替$\{\omega_i\}$，而它们之间的关系是

$$\phi_i = \sum_{h=1}^{n} u_{ih}\omega_h, \qquad \omega_i = \sum_{h=1}^{n} U_{ih}\phi_h, \tag{9.46}$$

其中 u_{ih}, U_{ih} 是常数，而且

$$\sum_{h=1}^{n} u_{ih}U_{hj} = \delta_{ij}, \tag{9.47}$$

则我们有以下一组新结构常数。

$$C'^{j}_{s\,k} = \sum_{i,\,m,\,h} C^{i}_{m\,h} U_{ms} U_{hk} u_{ji}. \tag{9.48}$$

这些等式表明：

(a) 条件 $C^{i}_{m\,i} = 0$ 与底无关，它们代表$\mathfrak{G}$的一项内在性质。我们可以证明，它们是$\mathfrak{G}$为交换群的充要条件。

(b) 从(9.47)和(9.48)，可得

$$\sum_{j=1}^{n} C'^{j}_{s\,j} = \sum_{i,\,m} C^{i}_{m\,i} U_{ms},$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} C^{i}_{m\,i} = 0, \qquad m = 1, 2, \cdots, n \tag{9.49}$$

是与底无关的方程组，因而代表$\mathfrak{G}$的另一项内在性质。我们将看到，(9.49)是所谓单模群的特征。

方阵群的 Maurer–Cartan 式的构成法。设$\mathfrak{G}$为一个方阵群，$g = (g_{ij})$为其元素。取方阵

$$\Omega = g^{-1}\mathrm{d}g, \tag{9.50}$$

它的元素是

$$\omega_{ij} = \sum_{h=1}^{n} \gamma_{ih}\,\mathrm{d}g_{hj}, \tag{9.51}$$

其中 γ_{ih} 是逆方阵 g^{-1} 的元素。方阵 Ω 是左不变方阵，即 ω_{ij} 为左不变式。事实上

$$L_{g_0}^*\Omega(g_0g)=(g_0g)^{-1}\mathrm{d}(g_0g)=g^{-1}g_0^{-1}g_0\mathrm{d}g$$
$$=g^{-1}\mathrm{d}g=\Omega(g), \tag{9.52}$$

而这就是左不变的条件(9.36)。

若𝔊中的 g 是 $r\times r$ 方阵而 𝔊的维是 n，我们要证明，在 r^2 个一次式 ω_{ij} 中，恰好有 n 个线性无关。证明如下．在幺元，我们有

$$\Omega(e)=(\mathrm{d}g)_e=(\mathrm{d}g_{ij}(e)).$$

而由于 $\mathrm{d}g_{ij}(e)$构成 GL(r)在幺元的余切空间的一个底，它们包含𝔊 在 e 的余切空间的一个底，而这个底的余切矢产生 n个线性无关一次式。因此，在(9.51)的一次式里，可以选出左不变一次式的底，即一组的 Maurer–Cartan 一次式。

对(9.50)外导，得 $\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}g^{-1}\wedge\mathrm{d}g=-g^{-1}\mathrm{d}gg^{-1}\wedge\mathrm{d}g$① ，即

$$\mathrm{d}\Omega=-\Omega\wedge\Omega. \tag{9.53}$$

这个方阵方程所含的r^2个方程里就有着 𝔊的Maurer–Cartan方程。

例 考察三维方阵群

$$g=\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ x\log x & x & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad x\neq 0. \tag{9.54}$$

群流形是 $\boldsymbol{R}^3$，但其中去掉了平面 $x=0$。我们有

$$\Omega=g^{-1}\mathrm{d}g=\begin{pmatrix} \mathrm{d}x/x & 0 & \mathrm{d}y/x \\ \mathrm{d}x/x & \mathrm{d}x/x & -x^{-1}\log y\mathrm{d}y+\mathrm{d}z/x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.55}$$

于是一组 Maurer–Cartan 式是

$$\omega_1=\frac{\mathrm{d}x}{x},\qquad \omega_2=\frac{\mathrm{d}y}{x},\qquad \omega_3=-\frac{\log x}{x}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}z}{x}. \tag{9.56}$$

由于

① 由 $g^{-1}g=e$ 可知$(\mathrm{d}g^{-1})g+g^{-1}\mathrm{d}g)=0$，故 $\mathrm{d}g^{-1}=g^{-1}\mathrm{d}gg^{-1}$。——译者

$$\Omega\wedge\Omega=\begin{pmatrix}0 & 0 & \omega_1\wedge\omega_2\\ 0 & 0 & \omega_1\wedge\omega_2+\omega_1\wedge\omega_3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$\mathfrak{G}$的结构方程为

$$d\omega_1=0,\quad d\omega_2=-\omega_1\wedge\omega_2,\quad d\omega_3=-\omega_1\wedge\omega_2+\omega_1\wedge\omega_3,\tag{9.57}$$

而非零结构常数是

$$C^2_{12}=-C^2_{21}=-1,\quad C^3_{12}=-C^3_{21}=-1,\quad C^3_{13}=-C^3_{31}=-1.\tag{9.58}$$

右不变一次式。关于左不变一次式的一切论点几乎可以不加改变地用于右不变一次式。已给一次式 ϖ，若对于一切 $g,g_0\in\mathfrak{G}$，

$$R^*_{g_0}\varpi(gg_0)=\varpi(g),\tag{9.59}$$

则 ϖ 叫做**右不变式**。我们将把这个条件写成

$$R^*_g\varpi=\varpi\quad 或\quad \varpi(gg_0)=\varpi(g),\tag{9.60}$$

但(9.60)的意义要理解如(9.59)，因为严格地说，$\varpi(gg_0)$是余切空间 $T^*_{gg_0}$ 的元素而 $\varpi(g)$则是 T^*_g 的元素。

象左不变式的款那样，右不变一次式是实域上的一个 n 维矢空间。对于方阵群，右不变一次式可以从方阵

$$\bar{\Omega}=dgg^{-1}\tag{9.61}$$

得到，而由于 $R^*_{g_0}\bar{\Omega}=d(gg_0)(gg_0)^{-1}=\bar{\Omega}$，它是右不变方阵。从方阵 $\bar{\Omega}$ 里选出 n 个线性独立的元素，就得到右不变一次式所构成的矢空间的一个底，由(9.61)和(9.50)，我们有

$$\Omega(g^{-1})=gdg^{-1}=-dgg^{-1}=-\bar{\Omega}(g).\tag{9.62}$$

因此，总可以选取底$\{\omega_i\}$，$\{\varpi_i\}$，使

$$\varpi_i(g)=-\omega_i(g^{-1}),\quad i=1,2,\cdots,n.\tag{9.63}$$

如同我们得到(9.42)那样，我们可得

$$d\varpi_i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\bar{C}^i_{jk}\varpi_j\wedge\varpi_k,\tag{9.64}$$

其中$\bar{C}^i_{jk}$是常数。应用(9.64)于g^{-1}并参照(9.63)，就得

$$-\mathrm{d}\omega_i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\bar{C}^i_{jk}\omega_j\wedge\omega_k。\tag{9.65}$$

于是和(9.42)比较，就得$\bar{C}^i_{jk}=-C^i_{jk}$。故关于右不变一次式的结构方程可以写成

$$\mathrm{d}\varpi_i=-\frac{1}{2}\sum_{j,k}^{n}C^i_{jk}\mathrm{d}\varpi_j\wedge\mathrm{d}\varpi_k。\tag{9.66}$$

对于交换群，左右不变式相同，而(9.66)和(9.42)给出$C^i_{jk}=0$。换句话说，交换群的结构常数等于零。可以证明，这也是交换群的充分条件。

与(9.44)对应，结构方程(9.66)可以写成

$$\mathrm{d}\varpi_i(\delta)-\delta\varpi(\mathrm{d})=-\sum_{j,k}C^i_{jk}\varpi_j(\mathrm{d})\varpi_k(\delta)。\tag{9.67}$$

例 考虑方阵群(9.54)。我们有

$$\bar{\Omega}=\mathrm{d}gg^{-1}=\begin{pmatrix}x^{-1}\mathrm{d}x & 0 & -yx^{-1}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\\ x^{-1}\mathrm{d}x & x^{-1}\mathrm{d}x & -yx^{-1}-zx^{-1}\mathrm{d}x+\mathrm{d}z\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

故一组右不变一次式是

$$\varpi_1=\frac{\mathrm{d}x}{x},\quad \varpi_2=-\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,\ \varpi_3=-\frac{y+z}{x}\mathrm{d}x+\mathrm{d}z。\tag{9.68}$$

结构方程是

$$\mathrm{d}\varpi_1=0,\quad \mathrm{d}\varpi_2=\varpi_1\wedge\varpi_2,\quad \mathrm{d}\varpi_3=\varpi_1\wedge\varpi_2+\varpi_1\wedge\varpi_3。\tag{9.69}$$

结构常数和(6.68)相同，只是符号相反。

7. 群的不变体元；单模群

设$\{\omega_i\}$为群$\mathfrak{G}$的一组Maurer-Cartan一次式。外积

$$\mathrm{d}_L\mathfrak{G}=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n\tag{9.70}$$

是一个左不变n次式，而且按第5节的系理，除一个常数因子

外，它是唯一的左不变一次式。我们将把 $d_L\mathfrak{G}$的左不变性用记号

$$d_L(g_0\mathfrak{G}) = d_L\mathfrak{G}, \qquad g_0 \in \mathfrak{G} \tag{9.71}$$

表示。

n 次式 $d_L\mathfrak{G}$叫做$\mathfrak{G}$的**左不变体[积]元[素]**。在积分几何里，它也叫做$\mathfrak{G}$ 的**运动密度**。第 6 章所讨论的运动密度是平面运动群的左不变体元。

同样，$\mathfrak{G}$ 的右不变体元的定义为

$$d_R\mathfrak{G} = \varpi_1 \wedge \varpi_2 \wedge \cdots \wedge \varpi_n, \tag{9.72}$$

其中$\{\varpi_i\}$是右不变一次式空间的一个底。$d_R\mathfrak{G}$ 的右不变式可以用记号

$$d_R(\mathfrak{G}g_0) = d_R\mathfrak{G}, \qquad g_0 \in \mathfrak{G}. \tag{9.73}$$

对左[右]不变体元取积分，就得到$\mathfrak{G}$ 上的一个左[右]测度。在任意局部紧致群上，这个不变体元是存在的，并称为$\mathfrak{G}$ 上的左[右]Haar测度，大多数我们将要证明的关于李群的左[右]不变测度的性质、对于局部紧致群这个更一般款，都是适用的(见[443，500,710])。

若一个李群的左不变体元同时是右不变体元，则它叫做**单模群**。这时$d_L\mathfrak{G}$和 $d_R\mathfrak{G}$ 至多差一个常数因子，我们就可以选择底$\{\omega_i\}$和$\{\varpi_i\}$，使得

$$d_L\mathfrak{G} = d_R\mathfrak{G}.$$

若$\mathfrak{G}$是单模群，根据(9.63)，可知(除符号外)

$$d_L\mathfrak{G}(g) = d_L\mathfrak{G}(g^{-1}); \tag{9.74}$$

换句话说，单模群的不变体元在映射$g \to g^{-1}$下也不变。这个不变性对应于所谓在运动逆转中的不变性(见第六章，第 3 节)。

现在我们将给出单模群的若干条件。由于 n 个一次式ϖ_i是独立的，而$\mathfrak{G}$上的一次式模是 n 维的，可以令

$$\omega_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\varpi_k, \tag{9.75}$$

其中a_{ik}是$\mathfrak{G}$上的函数。若采用写成(9.67)形状的结构方程，假定

δ表示一个左移元(无穷小左移)而d表示一个右移元，并利用ω_i的右不变性，则$d\varpi_i(\delta)=0$，而(9.67)变成

$$\delta\varpi(\mathrm{d})=\sum_{j,k=1}^{n}C^{i}_{jk}\varpi_j(\mathrm{d})\varpi_k(\delta). \tag{9.76}$$

另一方面，由于$\omega_i(\mathrm{d})$的左不变性，$\delta\omega_i(\mathrm{d})=0$，而由(9.75)，我们得

$$\sum_{k=1}^{n}(\delta a_{ik}\varpi_k(\mathrm{d})+a_{ik}\delta\varpi_k(\mathrm{d}))=0. \tag{9.77}$$

由(9.76)和(9.77)，我们得

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\delta a_{ik}-\sum_{m,j=1}^{n}C^{m}_{jk}a_{im}\varpi_j(\delta)\varpi_k(d)\right)=0, \tag{9.78}$$

而由于一次式$\varpi_k(\mathrm{d})$是独立的，用d代δ，就得

$$\mathrm{d}a_{ik}-\sum_{j,m=1}^{n}C^{m}_{jk}a_{im}\varpi_j=0. \tag{9.79}$$

再若令Δ为关系(9.75)的行列式$|a_{ik}|$，则除符号外，

$$\mathrm{d}_L\mathfrak{G}=\Delta(g)\mathrm{d}_R\mathfrak{G}, \tag{9.80}$$

一个行列式的导数可以写成

$$\mathrm{d}\Delta=\sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}\mathrm{d}a_{ik}, \tag{9.81}$$

其中α_{ik}的定义是

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}a_{ih}=\Delta\delta_{kh}. \tag{9.82}$$

用α_{ik}乘(9.79)两边，再对i,k求和，得

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\Delta}=\sum_{j,k=1}^{n}C^{k}_{jk}\varpi_j. \tag{9.83}$$

若$\mathfrak{G}$是单模群，则Δ是常数，而$\mathrm{d}\Delta=0$。倒转来，若Δ是常数，则可以把两种体元规格化，使$\Delta=1$，而由(9.80)可知$\mathfrak{G}$为单

模群。由此可见$\mathfrak{G}$为单模群的一个充要条件是

$$\sum_{k=1}^{n} C_{jk}^{k} = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{9.84}$$

$\Delta(g)$ 的性质。关系(9.80)所确定的 $\Delta(g)$ 有重要性质，我们现在加以探究。令右移R_{g_0}作用于(9.80)两边，并利用 $\mathrm{d}_R G$ 的右不变性，得

$$\begin{aligned} R_{g_0}^{*}\mathrm{d}_L\mathfrak{G} &= \Delta(gg_0)R_{g_0}^{*}\mathrm{d}_R\mathfrak{G} = \Delta(gg_0)\mathrm{d}_R\mathfrak{G} \\ &= \frac{\Delta(gg_0)}{\Delta(g)}\mathrm{d}_L\mathfrak{G}. \end{aligned} \tag{9.85}$$

根据(9.29)，$R_{g_0}^{*}$和任意左不变 n 次式是可交换的，因而 $R_{g_0}^{*}\mathrm{d}_L G$ 仍是左不变式。于是，根据第 5 节里的系理，$R_{g_0}^{*}\mathrm{d}_L G$和$\mathrm{d}_L G$只差一个常数因子，因而利用(9.85)，就有

$$\frac{\Delta(gg_0)}{\Delta(g)} = c, \tag{9.86}$$

其中 c 相对于 g 是常数，但还可能和g_0有关。为了求 c 的值，我们考虑$g=e$。这时，根据(9.63)，$\varpi_i(e) = -\omega_i(e)$，因而除符号外，$(\mathrm{d}_L\mathfrak{G})_e = (\mathrm{d}_R\mathfrak{G})_e$，即$\Delta(e)=1$。故$c=\Delta(g_0)$，而我们可得，对于一切$g, g_0 \in \mathfrak{G}$，

$$\Delta(gg_0) = \Delta(g)\Delta(g_0), \qquad \Delta(g^{-1}) = \frac{1}{\Delta(g)}. \tag{9.87}$$

这些等式表明，$\Delta(g)$是由$\mathfrak{G}$到正实数乘法交换群内的一个同态。

由(9.85)和(9.87)可得 $R_{g_0}^{*}\mathrm{d}_L\mathfrak{G} = \Delta(g_0)\mathrm{d}_L\mathfrak{G}$，而这可以写成

$$\mathrm{d}_L(\mathfrak{G}g_0) = \Delta(g_0)\mathrm{d}_L\mathfrak{G}. \tag{9.88}$$

若$\mathfrak{G}$的体积有限，$\mathrm{d}_L(\mathfrak{G}g_0)$和$\mathrm{d}_L\mathfrak{G}$在整个群上的积分相等，因而对于一切 $g_0 \in \mathfrak{G}$，$\Delta(g_0)=1$。因此，具有有限体积的群是单模群。逆定理不成立，例如尽管$GL(n)$的体积并非有限，我们将看到，它却是单模的。

若一个李群所构成的微分流形是紧致的，则李群就称为紧致的。由于任意紧致群有有限体积，因此，紧致群是单模的。

通过伴随表现，可以得到$\mathfrak{G}$为单模群的另一个条件，事实上，$\mathrm{ad}(g_0)$在T_e^*上诱导出线性变换

$$(\mathrm{ad}(g_0))^*:\ \omega(e)\to(R_{g_0^{-1}}\circ L_{g_0})^*\omega(e)=L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}^*\omega(e),\tag{9.89}$$

这对于一切一次式$\omega(e)\in T_e^*$成立。注意这个线性变换的方阵是(9.34)的方阵的转置，因此，它们的行列式相等，我们将用$\det\mathrm{ad}(g_0)$表示它，应用变换(9.89)于(9.80)两边，并利用$R_{g_0^{-1}}^*\mathrm{d}_R\mathfrak{G}=\mathrm{d}_R\mathfrak{G}$，就得

$$L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}^*\mathrm{d}_L\mathfrak{G}=\Delta(g_0gg_0^{-1})L_{g_0}^*\mathrm{d}_R\mathfrak{G}=\Delta(g_0gg_0^{-1})\mathrm{d}_R(g_0g).\tag{9.90}$$

利用(9.26)，我们有

$$L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}^*\mathrm{d}_L\mathfrak{G}=L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}^*\omega_1\wedge\cdots\wedge L_{g_0}^*\circ R_{g_0^{-1}}^*\omega_n$$
$$=\det\mathrm{ad}(g_0)\mathrm{d}_L\mathfrak{G},$$

因而

$$\det\ \mathrm{ad}(g_0)\mathrm{d}_L\mathfrak{G}=\Delta(g_0gg_0^{-1})dR(g_0\mathfrak{G})$$
$$=\frac{\Delta(g_0gg_0^{-1})}{\Delta(g_0g)}\mathrm{d}_L\mathfrak{G}.\tag{9.91}$$

令$g=e$，得

$$\det\ \mathrm{ad}(g_0)=\frac{\Delta(e)}{\Delta(g_0)}.\tag{9.92}$$

若$\mathfrak{G}$是单模群，则$\Delta=$常数而由(9.92)可知$\det\mathrm{ad}(g_0)=1$。反过来，若$\det\ \mathrm{ad}(g_0)=1$，我们有

$$\Delta(g_0)=\Delta(e)=\text{常数},$$

而$\mathfrak{G}$是单模群。于是有：

李群$\mathfrak{G}$是单模群的一个充要条件是：对于一切$g,g_0\in\mathfrak{G}$，

$$\det\ \mathrm{ad}(g_0)=1.\tag{9.93}$$

8. 注记与练习

(1) **平面里的运动群与相似群。** 在第六章里，已经详细讨论了平面里的运动群。它和方阵群

$$g = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & a \\ \sin\phi & \cos\phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.94}$$

同构。

一组Maurer-Cartan式是

$\omega_1 = \cos\phi da + \sin\phi db$, $\omega_2 = -\sin\phi da + \cos\phi db$, $\omega_3 = d\phi$.

结构方程是

$$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = 0,$$

而非零结构常数是

$$C^1_{23} = -C^1_{32} = -1, \quad C^2_{13} = -C^2_{31} = 1.$$

因此，条件(9.84)得到满足，而平面里的运动群是单模群。不变体元是

$$d_L\mathfrak{G} = d_R\mathfrak{G} = da \wedge db \wedge d\phi.$$

这些结果和第六章里的一致。

平面里的相似群是四维变换群

$$x' = \rho(x\cos\phi + y\sin\phi) + a, \quad y' = \rho(-x\sin\phi + y\cos\phi) + b. \tag{9.95}$$

参数是ρ, a, b, ϕ，其中$\rho \neq 0$。这个群与方阵群

$$g = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi & \rho\sin\phi & a \\ -\rho\sin\phi & \rho\cos\phi & b \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho \neq 0 \tag{9.96}$$

同构。

利用(9.50)，我们得一组Maurer-Cartan一次式：

$$\omega_1 = d\rho/\rho, \quad \omega_2 = d\phi,$$

$$\omega_3 = \rho^{-1}\cos\phi da - \rho^{-1}\sin\phi db, \tag{9.97}$$

$$\omega_4 = \rho^{-1}\sin\phi \mathrm{d}a + \rho^{-1}\cos\phi \mathrm{d}b.$$

结构方程是

$$\mathrm{d}\omega_1 = 0, \quad \mathrm{d}\omega_2 = 0,$$
$$\mathrm{d}\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_3 - \omega_2 \wedge \omega_4,$$
$$\mathrm{d}\omega_4 = \omega_2 \wedge \omega_3 - \omega_1 \wedge \omega_4,$$

而非零结构常数是

$$C^3_{13} = -C^3_{31} = -1, \quad C^3_{24} = -C^3_{42} = -1,$$
$$C^4_{23} = C^4_{32} = 1, \quad C^4_{14} = -C^4_{41} = -1.$$

条件(9.84)不满足，故相似群不是单模群。左不变体元是

$$\mathrm{d}_L\mathfrak{G} = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 = \frac{\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b}{\rho^3}.$$

同样，右不变体元是

$$\mathrm{d}_R\mathfrak{G} = \frac{\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b}{\rho}.$$

例如，以(a,b)为中心，以ρ为半径的圆的一个集合C，在相似群下的左与右不变测度是

$$m_L(C) = 2\pi \int_C \frac{\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}\rho}{\rho^3},$$

$$m_R(C) = 2\pi \int_C \frac{\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}\rho}{\rho}.$$

除一个常数因子外，这些测度是唯一确定的(见[647])。

(2) 群的直积。若$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$为$\mathfrak{G}$的子群，而群$\mathfrak{G}$的元素是一切的偶$(g_1, g_2)$，其中$g_1 \in \mathfrak{G}_1, g_2 \in \mathfrak{G}_2$，而$\mathfrak{G}$的乘法定律是

$$(g_1, g_2)(g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2),$$

则$\mathfrak{G}$称为$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$的直积，若$\mathrm{d}_L\mathfrak{G}_1$和$\mathrm{d}_L\mathfrak{G}_2$为$\mathfrak{G}_1$和$\mathfrak{G}_2$的左不变体元，则$\mathfrak{G}$的左不变体元是$\mathrm{d}_L\mathfrak{G} = \mathrm{d}_L\mathfrak{G}_1 \wedge \mathrm{d}_L\mathfrak{G}_2$。同样，$\mathrm{d}_R\mathfrak{G} = \mathrm{d}_R\mathfrak{G}_1 \wedge \mathrm{d}_R\mathfrak{G}_2$。由此可见，若$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$是单模群，则$\mathfrak{G}$也是单模群。

练习1　证明关系

$$d_L(\mathfrak{G}g_0) = \det\ \mathrm{ad}(g_0^{-1})d_L\mathfrak{G},$$
$$d_R(g_0\mathfrak{G}) = \det\ \mathrm{ad}(g_0)d_R\mathfrak{G},$$
$$d_L(\mathfrak{G}g^{-1}) = \det\ \mathrm{ad}(g)d_L\mathfrak{G}. \tag{9.98}$$

练习2 设C^i_{jk}为结构常数而a_{ij}的定义如(9.75)所示，对于任意$i,s,k\leqslant n$，证明恒等式

$$\sum_{p,q=1}^{n} C^i_{pq}a_{qk}a_{ps} = \sum_{r=1}^{n} C^r_{sk}a_{ir}. \tag{9.99}$$

例1 考虑方阵群

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a\neq 0.$$

利用(9.50)和(9.61)，得

$$\omega_1 = da/a, \quad \omega_2 = db/a, \quad \varpi_1 = da/a, \quad \varpi_2 = -(b/a)da + db, \tag{9.100}$$

因此

$$d_L\mathfrak{G} = \frac{da\wedge db}{a^2}, \qquad d_R\mathfrak{G} = \frac{da\wedge db}{a}, \qquad \Delta = \frac{1}{a}. \tag{9.101}$$

不难得到以下映射：

$$L_{g_0}:\ a\to aa_0,\ \ b\to a_0b + b_0;$$
$$R_{g_0}:\ a\to aa_0,\ \ b\to ab_0 + b;$$
$$R_{g_0^{-1}}\cdot L_{g_0}:\ a\to a,\ \ b\to -ab_0 + ba_0 + b_0;$$

$$\mathrm{ad}(g_0):\ \frac{\partial}{\partial a}\to\frac{\partial}{\partial a} - b_0\frac{\partial}{\partial b},\ \ \frac{\partial}{\partial b}\to a_0\frac{\partial}{\partial b};$$

因而$\det\mathrm{ad}(g_0) = a_0$与(9.92)一致。容易验证关系(9.98)。

例2 考虑(9.54)中的方阵群$\mathfrak{G}$，由(9.56)和(9.68)，可得

$$d_L\mathfrak{G} = x^{-3}dx\wedge dy\wedge dz, \quad d_R\mathfrak{G} = x^{-1}dx\wedge dy\wedge dz. \tag{9.102}$$

这个群不是单模群，和(9.80)比较，可得$\Delta(g) = x^{-2}$，$d\Delta/\Delta = -(2x)dx$。利用(9.80)，容易验证，关系(9.83)成立。群的元素$g' = gg_0$，是具有(9.54)形状的方阵，其中的元素是

$$x' = xx_0, \quad y' = xy_0 + y, \quad z' = xy_0\log x + xz_0 + z,$$

故有

$$\Delta(gg_0) = (x^2x_0^2)^{-1} = \Delta(g)\Delta(g_0),$$

而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_L(\mathfrak{G}g_0) &= x'^{-3}\mathrm{d}x' \wedge \mathrm{d}y' \wedge \mathrm{d}z' \\ &= (xx_0)^{-3}x_0\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \Delta(g_0)\mathrm{d}_L\mathfrak{G}. \end{aligned}$$

按照(9.88)，这是必然的。

映射$g \to g_0 g g_0^{-1}$是

$$x' = x, \quad y' = -y_0x + x_0y + y_0,$$

$$z' = -xy_0\log x + x_0y\log x_0 - z_0x + x_0z + z_0,$$

因而一次式$\omega' = a'\mathrm{d}x' + b'\mathrm{d}y' + c'\mathrm{d}z'$变成

$$\begin{aligned} \omega = &[a' - y_0b' - (y_0\log x + y_0 + z_0)c']\mathrm{d}x \\ &+ [b'x_0 + x_0\log x_0 c']\mathrm{d}y + c'x_0\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

幺元 e 对应于 $x = 1$，$y = 0$，$z = 0$，因此，变 换$(\mathrm{ad}(g_0))^*$可以写成

$$a = a' - y_0b' - (y_0 + z_0)c' \qquad b = x_0b' + x_0\log x_0c', \quad c = x_0c',$$

因而 $\det\ \mathrm{ad}(g_0) = x_0^2$。利用这个值，不难验证方程(9.92)和恒等式(9.98)。

例3 考虑群GL(2)，即2×2可逆方阵

$$g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \quad xt - yz = D \neq 0. \qquad (9.103)$$

所构成的四维群。

方阵$\Omega = g^{-1}\mathrm{d}g$的元素是

$$\omega_1 = \frac{1}{D}(t\mathrm{d}x - y\mathrm{d}z), \qquad \omega_2 = \frac{1}{D}(t\mathrm{d}y - y\mathrm{d}t),$$

$$\omega_3 = \frac{1}{D}(-z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}z), \qquad \omega_4 = \frac{1}{D}(-z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}t).$$

从(9.52)所得的结构方程是

$$\mathrm{d}\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_3, \quad \mathrm{d}\omega_2 = -\omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_2 \wedge \omega_4,$$

$$\mathrm{d}\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_3 \wedge \omega_4, \quad \mathrm{d}\omega_4 = \omega_2 \wedge \omega_3.$$

故非零结构常数是

$$C^1_{23}=-C^1_{32}=-1,\quad C^2_{12}=-C^2_{21}=-1,\quad C^2_{24}=-C^2_{42}=-1,$$
$$C^3_{13}=-C^3_{31}=1,\quad C^3_{34}=-C^3_{43}=1,\quad C^4_{23}=-C^4_{32}=1.$$

因此，条件(9.84)成立，而GL(2)是单模群。以后我们将看到GL(n)同样也是单模群。GL(2)的不变体元是

$$\mathrm{d}_L\mathfrak{G}=\mathrm{d}_R\mathfrak{G}=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3\wedge\omega_4$$
$$=\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}t}{D^2}. \tag{9.104}$$

例4　设$\mathfrak{G}$为方阵群

$$g=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix},\qquad x\neq 0.$$

这是一个交换群，因而是单模群．一般方法给出

$$\omega_1=\varpi_1=\mathrm{d}x/x,\quad \omega_2=\varpi_2=\mathrm{d}y/x-(y/x^2)\mathrm{d}x.$$

结构方程是$\mathrm{d}\omega_1=0$，$\mathrm{d}\omega_2=0$，而不变体元是

$$\mathrm{d}_L\mathfrak{G}=\mathrm{d}_R\mathfrak{G}=x^{-2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

例5　设$\mathfrak{G}$为方阵群

$$g=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix},\qquad x\neq 0.$$

通过一般方法，得

$$\omega_1=\mathrm{d}x/x,\quad \omega_2=\mathrm{d}y/x+(y/x^2)\mathrm{d}x,$$
$$\varpi_1=\mathrm{d}x/x,\quad \varpi_2=-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y.$$

结构方程是$\mathrm{d}\omega_1=0$，$\mathrm{d}\omega_2=-2\omega_1\wedge\omega_2$，而非零结构常数是$C^2_{12}=-C^2_{21}=-2$。这不是单模群。体元是

$$\mathrm{d}_L\mathfrak{G}=x^{-2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\quad 和\quad \mathrm{d}_R\mathfrak{G}=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

故

$$\Delta=1/x^2,\quad \mathrm{d}\Delta/\Delta=-2(\mathrm{d}x/x),$$

与(9.83)一致。伴随映射是

$$A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y\to(A-2x_0y_0B)\mathrm{d}x+Bx_0^2\mathrm{d}y.$$

因此，$\det\ \mathrm{ad}(g_0)=x_0^2$。

第十章 齐性空间的密度与测度

1. 引论

在本章里，我们将只用到左不变性。因此，为简化文字和记号，我们将把左不变性说成不变性，左不变体元 $d_L\mathfrak{G}$ 就简写成 $d\mathfrak{G}$。

设$\mathfrak{G}$为 n 维李群，$\mathfrak{H}$为$\mathfrak{G}$的一个$n-m$维闭子群(若$\mathfrak{H}$的点在$\mathfrak{G}$的流形里构成闭集，则$\mathfrak{H}$叫做闭子群)。对于$g\in\mathfrak{G}$，旁系$g\mathfrak{G}$所构成的集合是齐性空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$，人们知道，可赋予它一个 m 维微分结构(例如参考[62],第230页])。我们将要求得在$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$上存在着一个在$\mathfrak{G}$下不变的非零 m 次式的条件。这样一个 m 次式叫做 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 上的密度，而把它积分，就得到$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$上一个不变测度。由于$\mathfrak{G}$在$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$上的作用是可迁的，不变测度如果存在，就是唯一的。

注意$\mathfrak{H}$和它的旁系$g\mathfrak{H}(g\in\mathfrak{G})$是微分流形$\mathfrak{G}$的微分子流形，而且经过$\mathfrak{G}$的每一点有唯一的一个子流形$g\mathfrak{H}$。因此，根据第9章第2节，它们是一个完全可积Pffaf系

$$\omega_1=0,\quad \omega_2=0,\quad \cdots,\quad \omega_m=0 \tag{10.1}$$

的积分流形，其中ω_i是$\mathfrak{G}$上的一次式。

由于$\mathfrak{H}$和它的旁系作为一个整体在$\mathfrak{G}$下是不变的，(10.1) 里各式的左边可以从不变一次式中选取，因而可以作为$\mathfrak{G}$的一组 Maurer–Cartan 式的具有常数系数的线性组合(第九章,第5节)。由于这样一组 Maurer–Cartan 式，除了可以用具有常数系数的线性组合代替外，是唯一确定的，可以假定(10.1)中的一次式是$\mathfrak{G}$的一组Maurer–Cartan式的前 m 个式。于是 m 次微分齐式

$$d(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_m \tag{10.2}$$

在$\mathfrak{G}$下是不变式，而且，除一个常数因子外，是唯一的不变 m 次

微分齐式。事实上，任意另一个不变m次式可以写成$f(g)\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$，而由不变性，可知

$$f(g_0g)\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})=f(g)\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H});$$

由此，对于任意的g_0，$f(g_0g)=f(g)$，于是由$\mathfrak{G}$在$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$上的可迁性，又可知$f(g)=$常数。不过，$\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$不总是$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$的密度，因为当$g\in\mathfrak{G}$在子流形$g\mathfrak{H}$上变动时，$\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$的值还可能变化。我们将证明以下定理：

m次式$\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$成为$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$的密度的一个充要条件是它的外微分等于零，即

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}))=0。\tag{10.3}$$

证明 设x_i为点$g\in\mathfrak{G}$在一个局部坐标系里的坐标。可以通过一个坐标变换

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,\xi_{m+1},\cdots,y_n),$$

使旁系$g\mathfrak{H}$用方程$\xi_i=$常数代表$(i=1,2,\cdots,m)$而$y_j(j=m+1,\cdots,n)$则是$g\mathfrak{H}$上的局部坐标。方程组(10.1)等价于

$$\mathrm{d}\xi_1=0,\quad \mathrm{d}\xi_2=0,\quad \cdots,\quad \mathrm{d}\xi_m=0,$$

从而我们有

$$\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})=F(\xi_1,\cdots,\xi_m,y_{m+1},\cdots,y_n)\mathrm{d}\xi_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\xi_m。\tag{10.4}$$

在$g\mathfrak{H}$上的一个变差δ下，坐标ξ_i保持不变，从而我们有

$$\delta(\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}))=\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_j}\mathrm{d}y_j\wedge\mathrm{d}\xi_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\xi_m。\tag{10.5}$$

另一方面，对(10.4)外导，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}))&=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial \xi_j}\mathrm{d}\xi_j\wedge\mathrm{d}\xi_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\xi_m\\&\quad+\sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_j}\mathrm{d}y_j\wedge\mathrm{d}\xi_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\xi_m\\&=\delta(\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})),\end{aligned}\tag{10.6}$$

因为前一个总和等于零。因此，$\delta(\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}))=0$(即在流形$g\mathfrak{H}$上

的位移下$d(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$不变)的充要条件是$d(d(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}))=0$。证毕.

另一处理法 我们将给出$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$上存在着一种不变密度（我们总是考虑“非零”密度）的条件的其他形式。设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,y_{m+1},\cdots,y_n$为上面所引进的局部坐标。$\mathfrak{H}$的元素将用$g_H$表示，它们有坐标

$$(e_1,e_2,\cdots,e_m,y_{m+1},\cdots,y_n),$$

其中$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$为幺元的坐标，$\mathfrak{G}$的每个元素属于一个旁系$g\mathfrak{H}$，而在这个旁系里，我们取其中具有坐标

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,e_{m+1},\cdots,e_n)$$

的元素h为它的代表。由于(10.1)中的齐式是$\mathfrak{G}$的一组Maurer-Cartan式的前m个，而(10.1)又等价于

$$d\xi_1=0,\ d\xi_2=0,\ \cdots,\ d\xi_m=0,$$

ω_i就具有$\omega_i(\xi,y,d\xi)$ $(i=1,2,\cdots,m)$的形状，即不含有微分$dy_{m+1},\cdots,dy_n$。此外，若在$\mathfrak{G}$的其余的Maurer-Cartan式中，令

$$\xi_1=e_1,\ \xi_2=e_2,\ \cdots,\ \xi_m=e_m,$$

所得到的齐式在$\mathfrak{H}$的作用下将是不变的，因而构成$\mathfrak{H}$的一组Maurer-Cartan式。因此，我们有：

$\mathfrak{G}$的Maurer-Cartan式可以写成

$$\begin{aligned}&\omega_i=\omega_i(\xi,y,d\xi),\qquad i=1,2,\cdots,m,\\&\omega_s=\omega_s^*(\xi,y,d\xi)+\omega_s^H(y,dy),\qquad s=m+1,\cdots,n,\end{aligned}\tag{10.7}$$

其中ω_s^H是群$\mathfrak{H}$的一组Maurer-Cartan式。

取(10.7)诸式的外积，得

$$d\mathfrak{G}(g)=d(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})(h)\wedge d\mathfrak{H}(g_H),\tag{10.8}$$

其中$d\mathfrak{H}(g_H)=\omega_{m+1}^H\wedge\cdots\wedge\omega_n^H$是在元素$g_H$的不变体元，而$g=hg_H$。

若$d(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$可以作为密度，它必须①在旁系$g\mathfrak{H}$的位移中不变；即它在$h\to hg_H$下不变。因此，必须②有：

对于一切$g_H\in\mathfrak{H}$,

①② 而且“只须”。——译者

$$\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})(hg_H) = \mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})(h). \qquad (10.9)$$

根据关系(9.88)，现在有$\mathrm{d}(\mathfrak{G}g_H) = \Delta(g_H)\mathrm{d}\mathfrak{G}$。对于群$\mathfrak{H}$，则有对应的等式$\mathrm{d}(\mathfrak{H}g_H) = \delta(g_H)\mathrm{d}\mathfrak{H}$。通过右移 $g \to gg_H$，(10.8) 给出

$$\mathrm{d}(\mathfrak{G}g_H) = \mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})(hg_H) \wedge \mathrm{d}(\mathfrak{H}g_H),$$

而这可以写成

$$\Delta(g_H)\mathrm{d}\mathfrak{G} = \mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})(hg_H) \wedge \delta(g_H)\mathrm{d}\mathfrak{H}. \qquad (10.10)$$

由这个方程和(10.8)，可得：对于每个$g_H \in \mathfrak{H}$，

$$\frac{\Delta(g_H)}{\delta(g_H)} = \frac{\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})(hg_H) \wedge \mathrm{d}\mathfrak{H}^{①}}{\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})(h) \wedge \mathrm{d}\mathfrak{H}}. \qquad (10.11)$$

因此，若要(10.9)得到满足，必须 $\Delta(g_H) = \delta(g_H)$ ②. 由于在考虑密度时总是取绝对值，就有下面的Weil条件[710]：

在齐性空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$上存在着不变密度的一个充要条件是：对于一切$g_H \in \mathfrak{H}$，

$$|\Delta(g_H)| = |\delta(g_H)|. \qquad (10.12)$$

根据(9.92)，条件(10.12)表示

$$|\det \mathrm{ad}_G(g_H)| = |\det \mathrm{ad}_H(g_H)|. \qquad (10.13)$$

推论 (a) 若$\mathfrak{G}$是单模群，则对于一切$g \in \mathfrak{G}$，

$$\det \mathrm{ad}_G(g) = 1.$$

而由(10.13)可知，*若$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$有不变密度而$\mathfrak{G}$是单模群，则$\mathfrak{H}$也是单模群。*

(b) 若(10.13)成立，则根据(9.92)，我们有

$$|\Delta(g_H)/\delta(g_H)| = |\Delta(e)/\delta(e)| = \text{常数},$$

但$\mathrm{d}\mathfrak{G}$和$\mathrm{d}\mathfrak{H}$除常数因子外是唯一确定的，可以把它们规范化，使得$|\Delta(g_H)| = |\delta(g_H)|$. 于是可知：*条件(10.13)是$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$上存在着不变密度的一个充要条件。*

(c) 若$\mathfrak{G}$和$\mathfrak{H}$是单模群，则条件(10.12)成立，因此，若$\mathfrak{G}$和

---

① 原书分式上下都缺因子$\mathrm{d}\mathfrak{H}$，疑误，兹补上。——译者

② 这是充要条件：若$\Delta(g_H) = \delta(g_H)$，则(10.11)分子和分母相等，但 ω_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 线性无关，故得(10.9)。——译者

$\mathfrak{H}$是单模群，则$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$有不变密度。

(d) 回顾(9.87)的一个推论：映射 $g\to\Delta(g)$是从$\mathfrak{G}$到正实数乘法群内的一个同态。若$\mathfrak{H}$是紧致的，它在映射Δ或δ下的象是正实数乘法群的一个紧致子群，因而只含幺元，即 $\Delta(g_H)=\delta(g_H)=1$。因此，若$\mathfrak{G}$的一个闭子群$\mathfrak{H}$是紧致的，则在$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$上有不变密度。

正实数乘法群的一个紧致子群必然只含幺元的事实可以证明如下：若它含有任意实数$a\neq 1$，则对于任意(正整数) m，它含有a^m。但这是不可能的，因为当$m\to\infty$时，$a^m\to\infty$或$a^m\to 0$；而这两种情况都不可能，因为a^m必须保持在一个不含 0 的有界闭节（区间）之内。

注意$|\det \operatorname{ad}(g_H)|=1$不表示对于任意$g\in\mathfrak{G}$，

$$|\det \operatorname{ad}(g)|=1。$$

因此，$\mathfrak{H}$是单模群而$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$有不变密度时，$\mathfrak{G}$可能不是单模群。例如设$\mathfrak{G}$为方阵群

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a\neq 0$$

而$\mathfrak{H}$为子群

$$g_H=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这时$\mathfrak{H}$是交换群，因而是单模群。$\mathfrak{G}$的 Maurer–Cartan 式是 $\omega_1=\mathrm{d}a/a$，$\omega_2=\mathrm{d}b/a$，故旁系$g\mathfrak{H}$可以用$\omega_1=0$确定，而由于$\mathrm{d}\omega_1=0$，根据判别准则(10.3)，$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$有不变密度。但是，$\mathfrak{G}$却不是单模群，因为$\bar{\omega}_1=\mathrm{d}a/a$，$\bar{\omega}_2=-(b/a)\mathrm{d}a+b$，故

$$\mathrm{d}_L\mathfrak{G}=a^{-2}\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}b, \quad \mathrm{d}_R\mathfrak{G}=a^{-1}\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}b。$$

线性变换$\operatorname{ad}_G(g_0)$是$A'=A$，$B'=-b_0A+a_0B$，故$\operatorname{ad}_G(g_0)=a_0$。所以，当$g_0=g_H\in\mathfrak{H}$时，$\det\operatorname{ad}_G(g_0)=1$，否则$\det\operatorname{ad}_G(g_0)\neq 1$。

2. 不变子群与商群

设$\mathfrak{H}$为李群$\mathfrak{G}$的子群而对于一切$g_H \in \mathfrak{H}$和一切$g \in \mathfrak{G}$，关系$g g_H g^{-1} \in \mathfrak{H}$成立，则$\mathfrak{H}$称为$\mathfrak{G}$的不变子群或正规子群。这时，若$\mathfrak{H}$是闭的，则人们知道，按照乘法规律$(x\mathfrak{H})(y\mathfrak{H}) = xy\mathfrak{H}$，齐性空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$成为一个李群，称为商群，也用$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$表示。

设$d_L(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$表示这个群$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$的左不变密度。若$h \in \mathfrak{G}$是旁系$g\mathfrak{H}$的一个代表元素，由$h g_H h^{-1} \in \mathfrak{H}$可知$h g_H = g_H^* h$，其中$g_H^* \in \mathfrak{H}$。这个事实可用记号

$$(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}) g_H = g_H^* (\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$$

表示。于是左不变性$d_L(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}) = d_L(g_H^*(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}))$表示

$$d_L(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}) = d_L((\mathfrak{G}/\mathfrak{H}) g_H),$$

因而由(10.9)可知$d_L(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$是齐性空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$的不变密度。这样，可知：

若$\mathfrak{H}$为$\mathfrak{G}$的一个不变闭子群，齐性空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$有一个在$\mathfrak{G}$下不变的密度，它等于商群$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$的左不变密度。

由这个定理和上节的推论(a)可知：*若$\mathfrak{G}$是单模群而$\mathfrak{H}$是$\mathfrak{G}$的一个不变闭子群，则$\mathfrak{H}$是单模群。*

$\mathfrak{H}$是不变子群的条件不能去掉。例如GL(2)是单模群，而它的子群

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad xz = 1$$

则不是单模群。上述定理的逆理也不正确。例如方阵群

$$g_H = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是方阵群

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \neq 0$$

的一个不变单模闭子群，但后一个群却不是单模群。当然，若$\mathfrak{H}$是单模群而$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$是紧致的，则$\mathfrak{G}$是单模群。

3. 齐性空间上密度存在的其他条件

令变换(9.89)作用于(10.8)的两边得

$$L^*_{g_H} \circ R^*_{g_H^{-1}} \mathrm{p}\mathfrak{G}(e)$$
$$= L_{g_H} \circ R^*_{g_H^{-1}} \mathrm{d}((\mathfrak{G}/\mathfrak{H})(e)) \wedge L^*_{g_H} \circ R^*_{g_H^{-1}} \mathrm{d}\mathfrak{H}(e). \tag{10.14}$$

把$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$变成自己的微分同胚$\tau(g_H)$：$g\mathfrak{H} \to g_H g\mathfrak{H}$ 等价于$g\mathfrak{H} \to g_H g\mathfrak{H} g_H^{-1}$（因为$g_H \in \mathfrak{H}$）；故(10.14)右边第一个因子是映射$\tau^*(g_H)_e$。令(10.14)两边线性变换的方阵行列式相等，则由于τ^*和$\mathrm{d}\tau$的方阵互为转置，得

$$\det \mathrm{ad}_G(g_H) = \det \mathrm{ad}_H(g_H) \cdot \det(\mathrm{d}\tau(g_H))_e. \tag{10.15}$$

对于商群$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$，幺元$e$就是旁系$\mathfrak{H}$，作用于$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$在$e$的切空间的线性变换群$(\mathrm{d}\tau(g_H))_e$叫做$\mathfrak{G}$的**线性合痕群**。由(10.13)和(10.15)，我们得**定理**(见[353])：

在齐性空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$上存在着不变密度的一个充要条件是

$$|\det \mathrm{d}\tau(g_H)_e| = 1, \tag{10.16}$$

即线性合痕群的行列式等于1。

我们再给出$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$上存在着不变密度的最后一个条件。从(10.7)，写出结构方程$\mathrm{d}\omega_s = \frac{1}{2}\sum C^s_{ik}\omega_i \wedge \omega_k \quad (s = m+1, \cdots, n)$，并令两边不含有诸微分$\mathrm{d}\xi_i$的项相等，就得

$$\mathrm{d}\omega^H_s = \frac{1}{2}\sum C^s_{ik}\omega^H_i \wedge \omega^H_k.$$

因此，对于$i, k, s = m+1, \cdots, n$，群$\mathfrak{G}$的结构常数C^s_{ik}和子群$\mathfrak{H}$的相同。另一方面，根据(10.7)，对于点g_H(ξ_i = 常数)，我们有$\omega_i(g_H) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$，而$i = m+1, \cdots, n$时，

$$\omega_i(g_H)=\omega_i^H(g_H).$$

因此，利用(9.63)，我们有

$$\varpi_i(g_H)=-\omega_i(g_H^{-1})=0 \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

所以，参照(9.83)，条件$\Delta=\delta$或$\mathrm{d}\Delta/\Delta=\mathrm{d}\delta/\delta$化为

$$\sum_{s=m+1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{s\,k}^{k}\varpi_s=\sum_{s=m+1}^{n}\sum_{k=m+1}^{n}C_{s\,k}^{k}\varpi_s,$$

由此得

$$\sum_{s=m+1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}C_{s\,k}^{k}\right)\varpi_s=0.$$

由于一次式ϖ_s是独立的，我们导出下面的陈省身判准[见105]:

在齐性空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$上存在着不变密度的一个充要条件是

$$\sum_{k=1}^{m}C_{s\,k}^{s}=0,\qquad s=m+1,\cdots,n. \tag{10.17}$$

Gaeta [见211]给出了一种计算不变密度的方法，这种方法的基础是把齐性空间作为仿射空间里的簇，并建立它们的模型。

4. 例

(1) 设$\mathfrak{G}$为方阵群

$$g=\begin{pmatrix}1 & 0 & \log x\\ y & x & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad x\neq 0, \tag{10.18}$$

而$\mathfrak{H}$为一维子群

$$g_H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ y & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{10.19}$$

$\mathfrak{G}$的一组Maurer-Cartan一次式是

$$\omega_1=\mathrm{d}x/x,\qquad \omega_2=\mathrm{d}y/x,\qquad \omega_3=-yx^{-2}\mathrm{d}x+x^{-1}\mathrm{d}z, \tag{10.20}$$

而结构方程是

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = -\omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_3. \tag{10.21}$$

子群$\mathfrak{H}$为$x=1$，$z=0$所确定。因此方程组(10.1)现在是$dx=0$，$dz=0$；也就是$\omega_1=0$，$\omega_3=0$。而不变密度如果存在，必然是$d(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})=\omega_1\wedge\omega_3$。由于

$$d(\omega_1\wedge\omega_3)=d\omega_1\wedge\omega_3-\omega_1\wedge d\omega_3=0,$$

条件(10.3)得到满足，因而空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$有不变密度$d(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})=\omega_1\wedge\omega_2$。旁系$g\mathfrak{H}$($\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$的点)被$x,z$坐标(第一节中的$\xi_1,\xi_2$)所确定而用这两个坐标表示的不变密度是

$$d(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})=x^{-2}dx\wedge dz. \tag{10.22}$$

作为练习，我们要验证$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$上存在着不变密度的其他条件也得到满足。事实上，由(10.21)可知，非零结构常数是

$$C_{12}^2=-C_{21}^2=-1, \quad C_{12}^3=-C_{21}^3=-1, \quad C_{13}^3=-C_{31}^3=-1,$$

因而(10.17)得到满足。映射$g\to g\circ gg_0^{-1}$是$x'=x$，$y'=-y_0x+x_0y+y_0$，$z'=(y_0\log x_0-z_0)x+y_0\log x-x_0y\log x_0+x_0z-y_0\log x_0+z_0$，而$|\det \mathrm{ad}_G(g_0)|=x_0^2$。若$g_0\in\mathfrak{H}$，则$x_0=1$，而$|\det \mathrm{ad}_G(g_H)|=1$。映射$g_H\to g_{H_0}g_Hg_{H_0}^{-1}$可以写成$y'=y$，因而$|\det \mathrm{ad}_H(g_H)|=1$。于是条件(10.13)得到满足。旁系$g\mathfrak{H}$是：对于一切$y_0\in \boldsymbol{R}^1$的方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \log x \\ y+xy_0 & x & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，若g_H^1是元素$x=1$，$y=y_1$，$z=0$，映射$\tau(g_H^1)$是$x'=x$，$y'=y+y_1$，$z'=y_1\log x+z$，因而映射$(d\tau(g_H'))e$可以写成

$$dx'=dx, \quad dy'=dy, \quad dz'=\frac{y_1dx}{x}+dz ①.$$

于是$|\det(d\tau(g_H^1))_e|=1$，和(10.16)一致。

(2) 考虑方阵群

① 原书作$x'=x$，$y'=y$，$z'=y_1+z$。——译者

$$\mathfrak{G}: \quad g = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad xy \neq 0;$$

$$\mathfrak{H}: \quad g_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \neq 0, \qquad (10.23)$$

显然$\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$。$\mathfrak{G}$的一组Maurer－Cartan式是

$$\omega_1 = dx/x, \quad \omega_2 = dy/y, \quad \omega_3 = dz/y,$$

而结构方程是

$$d\omega_1 = 0, \quad d\omega_2 = 0, \quad d\omega_3 = -\omega_2 \wedge \omega_3.$$

旁系$g\mathfrak{H}$可用x＝常数，z＝常数确定，故方程组(10.1)化为$\omega_1 = 0$，$\omega_3 = 0$。我们需要看看，$d(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}) = \omega_1 \wedge \omega_3$是不是$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$的不变密度。我们有

$$d(d(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})) = d\omega_1 \wedge \omega_3 - \omega_1 \wedge d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0.$$

因此，齐性空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$在$\mathfrak{G}$下没有不变密度。第二和第三节的判准给出相同的结果。例如，从结构方程可得$C^1_{21} + C^2_{22} + C^3_{23} = -1$，因而条件(10.17)不能满足。一组右不变一次式是

$$\bar{\omega}_1 = dx/x, \quad \bar{\omega}_2 = dy/y,$$

$$\bar{\omega}_3 = (z/y)dy + dz = -z\omega_2 + y\omega_3.$$

因而按$\Delta(g)$的定义(9.80)，我们有$\Delta(g) = 1/y$。故$\mathfrak{G}$不是单模群。对于群$\mathfrak{H}$，我们有$\omega_1^H = \bar{\omega}_1^H = dy/y$，$\delta(g_H) = 1$，因而$\mathfrak{H}$是单模群。条件(10.12)没有满足。读者容易计算

$$|\det \mathrm{ad}_G(g_1)| = y_1, \quad |\det \mathrm{ad}_H(g_H)| = 1,$$

$$|\det(d\tau(g'_H))_e| = y_1.$$

5. 李变换群

设$\mathfrak{G}$为李群，M为微分流形。若对应于每个$x \in \mathfrak{G}$，$p \to xp$ ($p \in M$) 是一个把M变为自己的同胚变换，而且(a) 对于$x_1, x_2 \in \mathfrak{G}$，

$p \in M$，有$(x_1x_2)p = x_1(x_2p)$；(b) 映射$(x,p)\to xp$是$G\times M$到M上的可微映射，则$\mathfrak{G}$叫做M的一个李变换群。由此可见，映射$p\to xp$是一个把M变成自己的微分同胚映射。xp称为在变换x下p的象。平面上的运动群是李群的一例。

设$\mathfrak{G}$为M的一个李变换群，若对于M的每一对点p_1,p_2，至少有一个$x\in\mathfrak{G}$，使$xp_1=p_2$，则$\mathfrak{G}$叫做**可迁群**。若对于每一对点p_1，$p_2\in M$，有唯一的x，使$xp_1=p_2$，则$\mathfrak{G}$叫做**单迁群**。若e是$\mathfrak{G}$的元素中唯一能令M的一切点固定，则$\mathfrak{G}$叫做**有效的**。

设$\mathfrak{G}$在M上是可迁群。已给点$p_0\in M$，$\mathfrak{G}$中令p_0不变的一切元素s，$(sp_0=p_0)$构成$\mathfrak{G}$的一个子群$\mathfrak{G}_0$，叫做在p_0的**合痕群**(或$\mathfrak{G}$在p_0的**稳定子群**)。这个群$\mathfrak{G}_0$在$\mathfrak{G}$内是闭集。若$\mathfrak{G}$是有效群，则ψ：$x\mathfrak{G}_0\to xp_0$是把齐次空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$变到$M$上的一个连续而一对一的映射，即对应于旁系$x\mathfrak{G}_0$($\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$的一个元素)的是$M$的点$xp_0$，而且反过来，对应于$M$的点$p=xp_0$的是旁系$x\mathfrak{G}_0$。设$\{y\}$是$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$的代表元素的一个集合，即元素$y\in\mathfrak{G}$的一个集合，它具有以下性质：$y\mathfrak{G}_0(y\in\{y\})$是$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$的一切旁系，而且若$y_1\neq y_2$，则$y_1\mathfrak{G}_0\neq y_2\mathfrak{G}_0$。集合$\{y\}$叫做$\mathfrak{G}$的**一组平移**。通过上面的映射$\psi$，集合$\{y\}$以一种连续而一对一的方式变到$M$上。

若$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$有一个在$\mathfrak{G}$下不变密度，映射$\psi$给出关于$M$的点的一个不变密度，而$M$的一个点集$X$的不变测度是

$$m(X) = \int_{\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0} \phi(y)\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0), \qquad (10.24)$$

其中当$yp_0\in X$时，$\phi(y)=1$，否则$\phi(y)=0$。密度$\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0)$称为在$\mathfrak{G}$下不变的，$M$内的**点密度**，并记作

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0). \qquad (10.25)$$

由(9.74)和(10.8)可知，若$\mathfrak{G}_0$和$\mathfrak{G}$是单模群，则$\mathrm{d}P=\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0)$在映射$y\to y^{-1}$下不变，而(10.24)可以写作

$$m(X)=\int_{\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0}\phi(y^{-1})\mathrm{d}P, \tag{10.26}$$

其中$p_0\in yX$时，$\phi(y^{-1})=1$，否则$\phi(y^{-1})=0$。

我们给出这些公式的两项应用。

(1) 设K_0为M内一组N个固定点$p_1,p_2,\cdots,p_N$。对于每个p_i，写出(10.26)并相加，得

$$\int_{\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0}\nu(K_0\cap yX)\mathrm{d}P=Nm(X), \tag{10.27}$$

其中$\nu(K_0\cap yX)$表示属于yX的K_0中的点的个数。由此可见，若$m(M)=m(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0)$ 表示M的体积，则对于一切y，点集yX含有K_0的点的个数的中值是

$$E(\nu)=\frac{m(X)}{m(M)}N. \tag{10.28}$$

由于中值$E(\nu)$在ν的最大和最小值之间，我们可以叙述以下定理：

*设M为微分流行，在它上面，群$\mathfrak{G}$的作用是可迁的。设$\mathfrak{G}_0$为在$p_0\in M$的合痕群，$\mathfrak{G}$和$\mathfrak{G}_0$是单模群，而且齐性空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$有不变密度。设$X$为$M$内已给点集，体积是$m(X)$，而$M$有有限体积$m(M)$($m(X)$和$m(M)$都用点密度$\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0)=\mathrm{d}P$来测量)。则已给$N$个点$p_i\in M$ $(i=1,2,\cdots,N)$，就有一个平移$y\in\mathfrak{G}$，使yX含有至少(至多) $Nm(X)/m(M)$个所给点。若X在M内是闭集而$0<m(X)<m(M)$*①*，则至少有一个yX含有大于(小于)$Nm(X)/m(M)$个所给点。*

定理最后部分的证明和第八章第4节里的相同。

(2) 考虑复变数$z=\xi+i\eta$。群SL(2)(一切行列式等于1的2×2方阵)在上半平面的作用就如群

---

① 原文作$m(X)<m(M)$。——译者

$$z'=\frac{az+b}{pz+q},\quad aq-bp=1 \tag{10.29}$$

那样，其中 a,b,p,q 为实数．SL(2)的Maurer–Cartan 式是①

$$\omega_1=q\mathrm{d}a-b\mathrm{d}q,\quad \omega_2=q\mathrm{d}b-b\mathrm{d}q,\quad \omega_3=-p\mathrm{d}a+a\mathrm{d}p, \tag{10.30}$$

而利用$\mathrm{d}(aq-bp)=0$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}a&=a\omega_1+b\omega_3,\quad \mathrm{d}b=-b\omega_1+a\omega_2,\\ \mathrm{d}p&=p\omega_1+q\omega_3,\quad \mathrm{d}q=-q\omega_1+p\omega_2.\end{aligned} \tag{10.31}$$

结构方程为

$$\mathrm{d}\omega_1=-\omega_2\wedge\omega_3,\quad \mathrm{d}\omega_2=-2\omega_1\wedge\omega_2,\quad \mathrm{d}\omega_3=-2\omega_3\wedge\omega_1. \tag{10.32}$$

在$z=\mathrm{i}$的合痕群$\mathfrak{G}_0$用条件$b=-p,a=q$确定，而按照(10.31)，这个条件等价于$\omega_1=0$，$\omega_2+\omega_3=0$②．由于$\mathrm{d}(\omega_1\wedge(\omega_2+\omega_3))=0$，根据判准(10.3)，可知 $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ 有不变密度 $\mathrm{d}(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0)=\mathrm{d}P=\omega_1\wedge(\omega_2+\omega_3)$．注意

$$\mathrm{d}z=(\omega_2+\omega_3+2\mathrm{i}\omega_1)/(p\mathrm{i}+q)^2③,$$

$$z-\bar{z}=2\mathrm{i}(p^2+q^2)^{-1},$$

就得

$$\mathrm{d}p=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}=-\frac{\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}\eta}{2\eta^2}. \tag{10.33}$$

现在考虑$\mathfrak{G}\equiv$SL(2)中，令半圆$|z|=1$ ($\eta>0$)保持不变的元素所构成的群$\mathfrak{G}_1$．这些元素的特征是，对于任意的ζ，

---

① 注意：若令 $g=\begin{pmatrix}a & b\\ p & q\end{pmatrix}$，则

$$\Omega=g^{-1}\mathrm{d}g=\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_2\\ \omega_3 & -\omega_1\end{pmatrix},$$

其中用到$\mathrm{d}(aq-bp)=a\mathrm{d}q+q\mathrm{d}a-b\mathrm{d}p-p\mathrm{d}b=0$。——译者

② 注意由$b=-p$，$a=q$ 立刻得到 $\omega_1=0$，$\omega_2+\omega_3=0$，因此(10.31)是不必需的。——译者

③ 原书分母作$(p+\mathrm{i}q)^2$。——译者

$$1=(a^2+2ab\xi+b^2)(p^2+2pq\xi+q^2)^{-1}.$$

故有条件$a^2+b^2=p^2+q^2$，$ab=pq$，而由此就可得 $a=q$，$b=p$ 或 $a=-q$，$b=-p$。这些条件等价于$\omega_1=0$，$\omega_2-\omega_3=0$。由于$d(\omega_1\wedge(\omega_2-\omega_3))=0$，齐性空间 $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ 有不变密度

$$d(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1)=\omega_1\wedge(\omega_2-\omega_3),$$

$\mathfrak{G}$的元素(10.29)把半圆$|z|=1$ $(\eta>0)$ 变到另一个半圆，其中心$(\xi,0)$和半径 r 确定于

$$\xi=(bq-ap)(p^2-q^2)^{-1},\quad r=(q^2-p^2)^{-1}①. \tag{10.34}$$

利用(10.30)，通过简易计算，可得

$$d(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1)=\omega_1\wedge(\omega_2-\omega_3)=-(d\xi\wedge dr)/2r^2. \tag{10.35}$$

这是中心在ξ轴的半圆在群(10.29)下的不变密度。

在变换群(10.29)下，上半平面 $\eta>0$ 是关于非欧双曲几何的经典的Poincaré模型。因此，除一个常数因子外，点密度(10.33)是非欧面元，而(10.35)则是双曲平面内直线(短程线)集合的密度(例如参看[360])。

6. 注记与练习

(1) Blichfeld 定理和Minkowski 定理的推广。设M为微分流形，而且在M上李变换群$\mathfrak{G}$ 的作用是可迁的。首先，假定齐性空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$($\mathfrak{G}_0$ 为在 p_0 的合痕群)有不变密度 $d(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0)$；其次，假定$M$可划分为基本区域$D_h(h=0,1,\cdots)$，当$h\neq m$时，$D_h\cap D_m=\varnothing$；第三，假定$\mathfrak{G}$有一个离散子群 $\mathfrak{J}$，它具有以下性质：(a) 每个D_h是变换$x_h\in\mathfrak{J}$作用于 D_0 的象($x_0=\mathfrak{J}$的幺元)，即$D_h=x_hD_0(x_h\in\mathfrak{J},h=0,1,\cdots)$；(b) 若$h\neq0$，则每一个$x_h$ 把一个基本区域D_j 变成一个基本区域 D_m，而且 $j\neq m$；(c) 基本区域有有限体积 $0<m(D_0)=m(D_h)$。这样，我们可以证明下面的定理：

设p_i为含在基本区域D_0里的N个点。考虑一切点 x_hp_i $(x_h\in$

① 更准确些，$r^2=(q^2-p^2)^{-1}$。——译者

$\mathfrak{F}$)所构成的格，设函数$f(p_i)$在点p_i及其平移后所得的象是确定的，而且$f(p_i)=f(x_h p_i)$。这样，则对于M的每个点集X，存在着平移象yX($\{y\}=\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$的代表元素的集合)，使得在$yX$所含的格点上，$\sum f(p_i)$不小于

$$\frac{m(X)}{m(D_0)}\sum_1^N f(p_i); \tag{10.36}$$

也存在着平移象yX，使那个和不大于(10.36)。若X在M里是闭的，则必存在着平移象，使总和$\sum f(p_i)$确实小于(10.36)，也必存在着平移象，使总和确实大于(10.36)。

若$f(p_i)=1$，我们得到yX所覆盖的格点数的中值，即$m(\nu)=Nm(X)/m(D_0)$，而定理给出在适当的平移下，X的象所含格点数的上下限。若M为n维欧氏空间E_n，$\mathfrak{G}$为其中的运动群，而$\mathfrak{F}$为保持具整数坐标的格点不动的平移子群，则$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$为$E_n$里的平移群，而上述定理与经典的Blichfeld定理一致，即：

考虑E_n内具整数坐标的点所构成的格。设X为可测集，$m(X)\geqslant k$，则有平移y，使yX至少含k个格点。$n=2$的款见第八章第5节。

若M为复数平面的幺圆盘$|z|\leqslant 1$，$\mathfrak{G}$为把M变成自己的线性变换群，而$\mathfrak{F}$为$\mathfrak{G}$的一个不连续实子群(Fuchs群)，我们的定理给出Tsuji[680]的一些结果。考虑$N=1$的款。已给含p_0在内的一个域X，若X^*为含在X内的域，而且对于任意两个元素$x,y\in\mathfrak{G}$，下面的两个条件得到满足，则对于群$\mathfrak{G}$，X^*称为X的一个m域，这两个条件是：(a) 若$xp_0\in X^*$，则$x^{-1}p_0\in X^*$；(b)若$xp_0\in X^*$，$yp_0\in X^*$，则$xyp_0\in X$。在这样的条件下，可以证明：若含p_0在内的那个域X有一个m域X^*，而且$m(X^*)>m(D_0)$，则X至少含有和p_0不同的一个格点。

若M是E_n，$\mathfrak{G}$为平移群，而$\mathfrak{F}$为$\mathfrak{G}$的子群，它保持具整数坐标的点所构成的格，这个定理就是一个经典的Minkonski定理[361]。关于它对复数平面的幺圆盘和对Fuchs群的应用，见

Tsuji[679]和Santaló[571]。

(2) 按照M.I. Stoka 意义的可测群。 设在微分流形M上，$\mathfrak{G}$是可迁李变换群，而$\mathfrak{G}_0$为在$p_0\in M$的合痕群。若齐性空间$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$有不变密度 $d(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0)$($M$内的点的密度)，则 $\mathfrak{G}$叫做按照 M.I.Stoka 意义的可测群[646]。换句话说，若在可迁群$\mathfrak{G}$下有不变点密度，则$\mathfrak{G}$叫做可测群。可以证明下列定理：

(a) M上的一切单迁群是可测群(因为这时 $d(\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0)$是 $\mathfrak{G}$ 的不变密度)。

(b) 若M是 n 维的，则任意作用于M的$n+1$维群或者可测，或者有一个 n 维可测子群。

(c) 若$\mathfrak{G}$有一个可迁但不可测子群$\mathfrak{G}_1$，则$\mathfrak{G}$不可测。

(d) 若$\mathfrak{G}$有两个单迁群 $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$，则$\mathfrak{G}$可测的一个充要条件是$\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ 有相同的不变密度。例如作用于实线的仿射群 $\mathfrak{G}$: $x'=ax+b(a\neq 0)$有子群 $\mathfrak{G}_1$: $x'=x+b$，它具有不变密度 dx，$\mathfrak{G}$ 又有相似子群 $\mathfrak{G}_2$: $x'=ax$，$a\neq 0$，它具有不变密度 dx/x。由于这两个密度不同，$\mathfrak{G}$是不可测的，即在仿射群 $\mathfrak{G}$ 下，实线上的点集没有不变密度。由此可见，射影群

$$x'=(ax+b)/(cx+d),\quad ad-bc\neq 0$$

是不可测的，即它没有不变点密度，这可以通过直接计算验证。

关于可测群的其他性质以及通过群的无穷小算子和结构常数表达的关于可测性的充要条件，见 Stoka[646]；参看 Chebotarev [102]，Drinfel' d[152,153]，Vranceanu[706]。

(3) 链式法则。 (a) 设 $\mathfrak{S},\mathfrak{T}$ 为李群 $\mathfrak{G}$ 的闭子群，$\mathfrak{S}\subset\mathfrak{T}$。若齐性空间 $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ 和 $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ 依次有非零不变密度 $d(\mathfrak{G}/\mathfrak{T})$和 $d(\mathfrak{G}/\mathfrak{S})$，则 $\mathfrak{T}/\mathfrak{S}$ 也有不变密度，而且在适当规范化后，它可以写作

$$d(\mathfrak{G}/\mathfrak{S})=d(\mathfrak{G}/\mathfrak{T})\wedge d(\mathfrak{T}/\mathfrak{S}).\qquad(10.37)$$

见[298,第449页]；关于具有有限不变测度的齐性空间，见[436]。

(b) 设 $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ 为李群 $\mathfrak{G}$ 的闭子群。设 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 和 $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ 在 $\mathfrak{G}$ 下
不变密度。则 $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K}$ 和 $\mathfrak{K}/(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K})$ 有不变密度的一个充要
件是 $\mathfrak{G}/(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K})$ 有不变密度[661]。

(4) 齐性空间里的相对不变密度。 设 $\mathfrak{G}$ 为李群。设 Ω 为
上确定的微分齐式。我们知道，若对于一切 $g_0, g\in\mathfrak{G}$, $\Omega(g_0g$
$\Omega(g)$，则 Ω 称为在 $\mathfrak{G}$ 下不变(记住在本章里，不变指的是"左
变")。更一般地，若存在着一个正实值的函数 ϕ: $\mathfrak{G}\to R^+$(称为
的乘子)使得对于 $g, g_0\in\mathfrak{G}$,

$$\Omega(g_0g) = \phi(g_0)\Omega(g),$$

则 Ω 称为在 $\mathfrak{G}$ 下**相对不变**。

设 $\mathfrak{H}$ 为 $\mathfrak{G}$ 的闭子群，并考虑齐性空间 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$。假定 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 是
维的而 Ω 为 $\mathfrak{G}$ 上的 m 次式。这样，若 Ω 在对旁系 $g\mathfrak{H}$ 的平移
不变，即对于 $g\in\mathfrak{G}$, $g_H\in\mathfrak{H}$，有

$$\Omega(gg_H) = \Omega(g),$$

则 Ω 是 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 上的一个 m 次式。我们已经得到，在 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 上，存
着在 $\mathfrak{G}$ 下不变的 m 次式的一些判准。现在我们将指出，如何
到在 $\mathfrak{G}$ 下相对不变的，$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 上的 m 次式。

设 $\omega_1=0$, $\omega_2=0, \cdots, \omega_m=0$ 为一组确定 $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 的旁系 $g\mathfrak{H}$
Pfaff 式。令 $\omega=\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_m$。作为判准(10.3)的推广，可
证明，在 $\phi(g_0g)=\phi(g_0)\phi(g)$ 的情况下，$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ 具乘子 ϕ 的相
密度存在的一个充要条件是 $\mathrm{d}(\phi\omega)=0$。这样，所求的相对不
m 次式是 $\Omega=\phi\omega$。此外，沿用和(10.13)里相同的记号，在$\mathfrak{G}$上
乘子 ϕ 满足等式

$$\phi(g_H) = \det \mathrm{ad}_H(g_H)/\det \mathrm{ad}_G(g_H) \quad (\text{见[521]})。$$

由 $\phi(g_1g_0)=\phi(g_1)\phi(g_0)$ 可知，除一个常数因子外，$\phi(g_H)=\delta(g$
$/\Delta(g_H)$。$\mathfrak{G}$ 上任意一个满足这些条件的严格正函数 ϕ 给出 $\mathfrak{G}/$
上的一种相对不变密度。更一般结果曾为 Bourbaki[69]和 Rei
[500]所讨论。

练习1　三角群. 设 $ST(n)$, $n\geqslant 2$ 为行列式等于 1, $g_{ij}=0$ $(1\leqslant j<i\leqslant n)$, $g_{ii}>0(1\leqslant i\leqslant n)$的一切 $n\times n$ 方阵所构成的群, 它叫做特殊三角群. 证明它不是单模群. 用 $ST_1(n)$ 表示 $g_{ij}=0$ $(1\leqslant j<i\leqslant n)$, $g_{ii}=1(1\leqslant i\leqslant n)$的一切 $n\times n$ 方阵所构成的群, 它是$ST(n)$的闭子群. 证明它是单模群(见[500]).

第十一章　仿射诸群

1.　仿射变换诸群

设 R^n 表示实 n 数组$(x_1, \cdots, x_n)$所构成的空间，并具有通常的拓扑。我们将把它叫做笛卡儿 n 维空间。R^n 的 r 维线性空间叫做 r 维平面($r=1$ 时是直线，$r=2$ 时是平面，$r=n-1$ 时是超平面)。

现将前章的结果应用于 R^n 的仿射群　用 x 表示具有坐标$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的点，同时表示以这些坐标为元素的 $n\times 1$ 矩阵。一个仿射变换是一个把 R^n 变成自己的变换，它用形状为

$$x' = ax + b, \quad \det a \neq 0 \tag{11.1}$$

的矩阵方程表示，其中 $a=(a_{ij})$，$b=(b_i)$依次是 $n\times n$ 和 $n\times 1$ 矩阵。一个仿射群是具有(11.1)形状的变换所构成的群。这些群和对应的$(n+1)\times(n+1)$方阵群

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

同构，后一个群的元素满足规律

$$g_2 g_1 = \begin{pmatrix} a_2 a_1 & a_2 b_1 + b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

一个仿射群的 Maurer-Cartan 齐式和对应的方阵群相同，即方阵 $g^{-1}\mathrm{d}g$ 中一组独立的一次式，而这个方阵现在可分解成矩阵

$$\Omega_1 = a^{-1}\mathrm{d}a, \quad \Omega_2 = a^{-1}\mathrm{d}b. \tag{11.4}$$

通过外导，同时利用关系 $\mathrm{d}a^{-1} = -a^{-1}\mathrm{d}a a^{-1}$，我们得下面的结构方程

$$\mathrm{d}\Omega_1 = -\Omega_1 \wedge \Omega_1, \quad \mathrm{d}\Omega_2 = -\Omega_1 \wedge \Omega_2. \tag{11.5}$$

若令

$$a=(a_{ij}),\quad b=(b_i),\quad a^{-1}=(\alpha_{ij}),$$
$$\Omega_1=(\omega_{ij}),\quad \Omega_2=(\omega_i),\tag{11.6}$$

则方程(11.4)可以写成显式

$$\omega_{ij}=\sum_{h=1}^{n}\alpha_{ih}\,da_{hj},\quad \omega_i=\sum_{h=1}^{n}\alpha_{ih}\,db_h,\tag{11.7}$$

而结构方程变成

$$d\omega_{ij}=-\sum_{h=1}^{n}\omega_{ih}\wedge\omega_{hj},\quad d\omega_i=-\sum_{h=1}^{n}\omega_{ih}\wedge\omega_h.\tag{11.8}$$

若一个仿射群是 r 维的，则在 n^2+n 个一次式 ω_{ij},ω_i 中恰好有 r 个是线性独立的，它们构成那个群的一组 Maurer–Cartan式。例如对于一般仿射群 $\mathfrak{G}(n)$(a 是任意 $n\times n$ 满秩方阵而 b 是任意 $n\times 1$ 矩阵)，则有 $r=n^2+n$ 而 Maurer–Cartan 式就是所有的 ω_{ij}, ω_i。对于特殊仿射群 $\mathfrak{G}_s(n)$($\det a=1$)，我们有 $r=n^2+n-1$，因而在一次式 ω_{ij},ω_i 之间存在着一个关系。事实上，把方程 $d(\det a)=0$ 展开，就得

$$\sum_{i,h}\alpha_{hi}da_{ih}=0\quad 或\quad \omega_{11}+\omega_{22}+\cdots+\omega_{nn}=0,\tag{11.9}$$

因而$\mathfrak{G}_s(n)$的Maurer–Cartan 齐式就是除一个 ω_{ii} 外的所有ω_{ij},ω_i。

E.Cartan 的动标。为了给出 Pffaf 式 ω_{ij}, ω_h 的几何意义，取 R^n 里一个固定标架$(p_0;e_1^0,e_2^0,\cdots,e_n^0)$，其中 p_0 是一点而e_i^0是 n 个独立点，再取通过仿射变换(11.1)从固定标架所得到的动标$(p;e_1,e_2,\cdots,e_n)$。假定 p_0 是原点$(0,0,\cdots,0)$而 e_i^0是坐标矢

$$e_1^0(1,0,\cdots,0),\quad e_2^0(0,1,0,\cdots,0),\quad \cdots,\quad e_n^0(0,\cdots,0,1).\tag{11.10}$$

若引进矢矩阵

$$e^0=(e_1^0,e_2^0,\cdots,e_n^0),\quad e=(e_1,e_2,\cdots,e_n),\tag{11.11}$$

我们可以写

$$p-p_0=e^0b,\quad e=e^0a.\tag{11.12}$$

因而

$$\mathrm{d}p = \mathbf{e}^0\mathrm{d}b = \mathbf{e}a^{-1}\mathrm{d}b = \mathbf{e}\Omega_2, \quad \mathrm{d}\mathbf{e} = \mathbf{e}^0\mathrm{d}a = \mathbf{e}a^{-1}\mathrm{d}a = \mathbf{e}\Omega_1, \tag{11.13}$$

这叫做仿射群的动标方程。它们可以写成

$$\mathrm{d}p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathbf{e}, \quad \mathrm{d}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} \mathbf{e}_j. \tag{11.14}$$

注意：由方程 $\mathbf{e} = \mathbf{e}^0 a$ 可知，动标的矢量 $\mathbf{e}_i$ 相对于定标的分量就是方阵 a 的列 $a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}$。因此，$\det a$ 可以写成 $|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\cdots\mathbf{e}_n|$，其中每个矢 $\mathbf{e}_i$ 需要用它相对于定标的分量所构成的列代人。在这个记号下，特殊仿射变换的特征是 $|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\cdots\mathbf{e}_n| = 1$，而利用(11.14)，我们有

$$\begin{aligned} \omega_i &= |\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\cdots\mathbf{e}_{i-1}\mathrm{d}p\mathbf{e}_{i+1}\cdots\mathbf{e}_n|, \\ \omega_{ji} &= |\mathbf{e}_1\cdots\mathbf{e}_{i-1}\mathrm{d}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_{i+1}\cdots\mathbf{e}_n|. \end{aligned} \tag{11.15}$$

仿射群的不变体积。我们已经看到，通过(11.4)的矩阵 Ω_1，Ω_2，可以得到仿射群的左不变一次式。通过方阵 $\mathrm{d}gg^{-1}$，就可以得到右不变一次式，方阵 $\mathrm{d}gg^{-1}$ 现在可以分解成

$$\bar{\Omega}_1 = \mathrm{d}aa^{-1}, \quad \bar{\Omega}_2 = -\mathrm{d}aa^{-1}b + \mathrm{d}b. \tag{11.16}$$

为了得到仿射群的体元的显式，我们分别考虑 $b = 0$ 和 $b \neq 0$ 两款。

当列矩阵 b 是零矩阵时，我们得到所谓齐次仿射变换（或中心仿射变换）

$$x' = ax, \quad \det a \neq 0. \tag{11.17}$$

这个群将用 $\mathfrak{A}^0(n)$ 表示，它和 $\mathrm{GL}(n)$ 同构。按照(11.7)，左不变体元是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_L\mathfrak{A}^0(n) &= \mathrm{d}_L\mathrm{GL}(n) \\ &= \bigwedge_k (\det\alpha)^n \mathrm{d}a_{1k} \wedge \mathrm{d}a_{2k} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_{nk}, \end{aligned}$$

其中 $\alpha = a^{-1}$。由(11.16)，右不变一次式是 $\varpi_{ih} = \sum_{1}^{n} \mathrm{d}a_{ik}\alpha_{kh}$，故

$$\mathrm{d}_R\mathfrak{A}^0(n) = \mathrm{d}_R\mathrm{GL}(n) = \bigwedge_i (\det\alpha)^n \mathrm{d}a_{i1} \wedge \mathrm{d}a_{i2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}a_{in}.$$

由于 $\det a=(\det a)^{-1}$，我们得下面的结论：

群 $\mathfrak{A}^0(n)$（或群 $\mathrm{GL}(n)$）是单模的。左和右不变体元可以写成

$$\mathrm{d}\mathfrak{A}^0(n)=\mathrm{d}\,\mathrm{GL}(n)=\frac{1}{(\det a)^n}\bigwedge_{i,k}\mathrm{d}a_{ik}. \tag{11.18}$$

R^n 里的特殊齐次仿射群是

$$x'=ax,\quad \det a=1, \tag{11.19}$$

它和 $\mathrm{SL}(n)$ 同构，用 $\mathfrak{A}^0_s$ 表示。这是 $\mathrm{GL}(n)$ 的一个不变闭子群。因为，若 $g\in\mathrm{GL}(n)$，$g_H=\mathrm{SL}(n)$，我们有

$$\det(gg_Hg^{-1})=1,$$

因而 $gg_Hg^{-1}\in\mathrm{SL}(n)$。因此，由于 $\mathrm{GL}(n)$ 是单模群，由第10章第3节可知 $\mathrm{SL}(n)$ 也是单模群。它的左和右不变体元（记住对于密度，我们总考虑绝对值）是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathfrak{A}^0_s(n)&=\mathrm{d}\,\mathrm{SL}(n)\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}a_{in}\bigwedge_{h,k}\mathrm{d}\,a_{hk}(\mathrm{d}a_{in}),\end{aligned} \tag{11.20}$$

其中 $(\mathrm{d}a_{in})$ 表示因子 a_{in} 需要从中删掉。例如 $n=2$ 时，

$$\mathrm{d}\mathfrak{A}^0_s(2)=\mathrm{dSL}(2)=\frac{\mathrm{d}a_{11}\wedge\mathrm{d}a_{12}\wedge\mathrm{d}a_{21}}{a_{11}}.$$

对于一般仿射群(11.1)，按照(11.7)，我们有

$$\mathrm{d}_L\mathfrak{A}(n)=(\det a)^{-1}\mathrm{d}_L\,\mathrm{GL}(n)\bigwedge_h\mathrm{d}b_h. \tag{11.21}$$

右不变体元是方阵(11.16)中的一切元素的外积，它是

$$\mathrm{d}_R\mathfrak{A}(n)=\mathrm{d}_R(\mathrm{GL}(n))\bigwedge_h\mathrm{d}b_h. \tag{11.22}$$

因此，一般仿射群不是单模的。由(9.80)可知 $\Delta(g)=(\det a)^{-1}$。

非齐次特殊仿射群 $\mathfrak{A}_s(n)$：$x'=ax+b$，$\det a=1$ 是单模群，它的不变体元是

$$\mathrm{d}\mathfrak{A}_s(n)=\mathrm{d}\,\mathrm{SL}(n)\bigwedge_h\mathrm{d}b_h, \tag{11.23}$$

其中 d SL(n)的值见(11.20)。

2. 对于特殊齐次仿射群的线性空间密度

考虑作用于 n 维空间 R^n 上的特殊齐次仿射变换群 $\mathfrak{A}_s^0(n)$，或简单些 $\mathfrak{A}_s^0$，在 $R^n - O$ 上，(11.19)这个群是可迁而有效的。设 L_r 为一个不经原点的固定 r 维平面，$\mathfrak{A}_r$ 表示为令 L_r 固定的变换所构成的子群。显然，在 $\mathfrak{A}_s^0$ 里，$\mathfrak{A}_r$ 是闭的，而且在 r 维平面的集合和齐次空间 $\mathfrak{A}_s^0/\mathfrak{A}_r$ 的点之间有一个一一对应关系。$\mathfrak{A}_s/\mathfrak{A}_r$ 在 $\mathfrak{A}_s^0$ 下的不变密度，如果存在，叫做 r 维平面的密度。为了判断这样的密度是否存在，假定 r 维平面 L_r 经过 e_1 的终点而平行于 $e_2, e_3, \cdots, e_{r+1}$ 的 r 维平面，在这里，$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$是在原点 O，满足条件$|e_1 e_2 \cdots e_n| = 1$的动标。对于 $\mathfrak{A}_s^0$ 中令 L_r 不变的元素，$de_i (i = 1, 2, \cdots, r+1)$是 $e_2, e_3, \cdots, e_{r+1}$ 的线性组合。于是，根据(11.14)中第二组方程，它们的特征是

$$
\begin{aligned}
&\omega_{1i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r+1; \\
&\omega_{ji} = 0, \quad j = r+2, \cdots, n, \quad i = 1, 2, \cdots, r+1.
\end{aligned}
\tag{11.24}
$$

这就是一般理论中的方程组(10.1)。根据(10.3)，L_r的集合在 $\mathfrak{A}_s^0$ 下有不变密度的一个充要条件是

$$
d(\bigwedge \omega_{1i} \bigwedge \omega_{ji}) = 0, \tag{11.25}
$$

其中外积中下标的范围见(11.24)。$\mathfrak{A}_s^0$ 的结构方程是附有条件(11.9)的方程组(11.8)。利用这些方程，(10.25)可写作

$$
\bigwedge \omega_{1i} \bigwedge \omega_{ji} \bigwedge \left(\sum_{h=1}^{r+1} \omega_{hh} \right) = 0, \tag{11.26}
$$

$$
i = 1, \cdots, r+1; \quad j = r+2, \cdots, n.
$$

这个条件得到满足的充要条件是

$$
\omega_{11} \bigwedge (\omega_{22} + \cdots + \omega_{r+1, r+1}) = 0. \tag{11.27}
$$

而由于(11.9)是 Maurer-Cartan 一次式间的唯一关系，可见或者 $r = 0$，或者 $r = n-1$。

令 $r=0$，所得的是点密度

$$\mathrm{d}L_0=\omega_{11}\wedge\omega_{21}\wedge\cdots\wedge\omega_{n1}=\mathrm{d}a_{11}\wedge\mathrm{d}a_{21}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}a_{n1},$$

而由于 $a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}$ 是 $\boldsymbol{e}_1$ 终点的坐标，可见除一个常数因子外，点密度等于空间的体元，而这是当然的，因为特殊仿射变换保持面积不变。令 $r=n-1$，所得的超平面密度是

$$\mathrm{d}L_{n-1}=\omega_{11}\wedge\omega_{12}\wedge\cdots\wedge\omega_{1n}. \tag{11.28}$$

这式对应于经过 $\boldsymbol{e}_1$ 的终点而平行于 $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的超平面。为了给出这个密度的一种度量解释，我们进行如下。设 $\boldsymbol{b}$ 为经过原点 O 的 L_{n-1} 的幺法矢，并设 $\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 为平行于 L_{n-1} 的超平面$(O,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$里 $n-1$ 个互相垂直的幺矢。数积 $\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{b}_i$ 等于 $n-1$ 维幺球面 U_{n-1} 上，在 $\boldsymbol{b}$ 的终点，沿 $\boldsymbol{b}_i$ 的方向的弧素，因此，若用 $\mathrm{d}u_{n-1}$ 表示在 $\boldsymbol{b}$ 的终点，U_{n-1} 的 $n-1$ 维体元，则

$$\mathrm{d}u_{n-1}=\bigwedge_i(\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{b}_i),\quad i=2,3,\cdots,n. \tag{11.29}$$

另一方面，由于矢量 $\boldsymbol{b}_i$和 $\boldsymbol{e}_i$ 属于同一个超平面，可以令

$$\boldsymbol{e}_i=\sum_{k=2}^{n}\lambda_{ik}\boldsymbol{b}_k,\quad i=2,3,\cdots,n, \tag{11.30}$$

因而

$$\bigwedge(\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i)=\det(\lambda_{ik})\wedge(\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{b}_i)=\det(\lambda_{ik})\mathrm{d}u_{n-1}. \tag{11.31}$$

由于 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_i=0(i=2,\cdots,n)$，根据(11.14)，我们有

$$\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i=\omega_{i1}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1)=\omega_{i1}\rho_1\cos\theta\quad(i=2,\cdots,n),$$

其中 ρ_1 是 $\boldsymbol{e}_1$ 的长而 θ 是 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的角。这就是说，若 p 表示由 O 到 L_{n-1}的距离，则 $p=\rho_1\cos\theta$，而由(11.31)，就推得

$$\left(\sum_{i=2}^{n}\omega_{1i}\right)p^{n-1}=\det(\lambda_{ik})\mathrm{d}u_{n-1}. \tag{11.32}$$

此外，由 $(\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1)=\omega_{11}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_1)=\omega_{11}p$ 和

$$(\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1)=\mathrm{d}p-(\boldsymbol{e}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{b}),$$

利用由(11.29)以及关系 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}_i=0,\boldsymbol{b}^2=1,\boldsymbol{b}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{b}=0$ 所

推得的结果$(e_1 \cdot db) \wedge du_{n-1} = 0$，就得

$$(\omega_{11} \wedge du_{n-1})p = dp \wedge du_{n-1}. \tag{11.33}$$

另一方面，由于$|e_1e_2\cdots e_n| = 1$，矢量$e_1, e_2, \cdots, e_n$所张成的平行超体体积是1，而$e_2, e_3, \cdots, e_n$所构成的平行超体的体积等于$\det(\lambda_{ik})$，可知$\det(\lambda_{ik}) \cdot p = 1$，于是最后得

$$dL_{n-1} = \frac{dp \wedge du_{n-1}}{p^{n+1}}, \tag{11.34}$$

而这就是所求的关于dL_{n-1}的度量意义。我们可以把上面的结果归结为以下定理：

在特殊齐次仿射群$\mathfrak{A}_n^0$下，在线性子空间中，只有点和不经过原点的超平面有不变密度。点密度等于体元。超平面的密度可以写成变量式(11.34)，其中p是从原点到超平面的距离而du_{n-1}表示$n-1$维球面对应于超平面法方向的体元（即对应于超平面的幺法矢的立体角元）。

对凸体的一项应用。设K为E_n里含原点O在内的一个凸体，$p = p(u_{n-1})$表示它相对于O的（支）撑函数，即p等于从O到垂直于方向u_{n-1}的K的撑超（平）面的距离，在K外的超平面集合的测度在$\mathfrak{A}_n^0$上不变，根据(11.34)，它是

$$I(K, O) = m(L_{n-1}; L_{n-1} \cap K \neq \varnothing) = \frac{1}{n}\int_{U_{n-1}} \frac{du_{n-1}}{p^n}, \tag{11.35}$$

其中积分范围是整个$n-1$维幺球面U_{n-1}。积分$I(K, O)$是依赖于K也依赖于O的一个仿射不变量。存在着唯一的点$O_M \in K$，使

$$I(K, O_M) = \min I(K, O) \quad (O \in K).$$

这个事实的一些推论见 Petty[476]。注意：若K^*是K对于O（确定于矢径$1/p$）的配极体，则$I(K, O)$是K^*的体积。关于这个不变量的一些性质，在第一章第6节中已有所阐述。

经过原点的线性子空间。群 $\mathfrak{A}_3^0$ 令原点 O 不变，因而把过原点的线性子空间变为过原点的线性子空间。现在我们考察经过原点的 r 维平面 $L_{r[0]}$ 在 $\mathfrak{A}_3^0$ 下是否有不变密度。

假定 $L_{r[0]}$ 为矢量 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 所确定。这样，若 $L_{r[0]}$ 在映射(11.19)下不变，微分 $de_1, de_2, \cdots, de_r$ 必然是 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 的线性组合，而(11.14)给出

$$\omega_{ji} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r; j = r+1, \cdots, n. \tag{11.36}$$

根据一般理论，r 维平面集合有不变密度的充要条件是 $d\left(\bigwedge \omega_{ji}\right) = 0$，其中外积的下标范围见(11.36)。利用(11.8)和(11.9)，就得

$$d\left(\bigwedge \omega_{ji}\right) = \bigwedge \omega_{ji} \wedge \left(\sum_{r+1}^{n} \omega_{jj} - \sum_{1}^{r} \omega_{ii}\right)$$

$$= -2 \bigwedge \omega_{ji} \wedge \left(\sum_{1}^{r} \omega_{ii}\right). \tag{11.37}$$

但(11.9)是一次式 ω_{ji} 间唯一的关系而且 $r<n$，齐式(11.37)不能等于零。由此可见，在 $\mathfrak{A}_3^0$ 下，经过原点的线性子空间没有不变密度。

现在取经过原点的 m 个线性子空间 $(L_{r_1[0]}, L_{r_2[0]}, \cdots, L_{r_m[0]})$，它们的维是 $r_1, r_2, \cdots, r_m$，而且它们除原点外没有其他公共点，并考虑它们所构成的 m 组的集合。假定这些 m 组在 $\mathfrak{A}_3^0$ 下受到可迁的变换。取动标，使 $L_{r_h[0]}$ 确定于矢量 $e_{r_1+\cdots+r_{h-1}+1}$, $e_{r_1+\cdots+r_{h-1}+2}, \cdots, e_{r_1+\cdots+r_{h-1}+r_h}$ $(h = 1, 2, \cdots, m)$。$\mathfrak{A}_3^0$ 中令这个 m 组不变的元素构成一个闭子群 $\mathfrak{H}(r_1, \cdots, r_m)$，其特征是微分 de_i $(r_1 + \cdots + r_{h-1} + 1 \leqslant i \leqslant r_1 + \cdots + r_h)$ 是 e_s $(r_1 + \cdots + r_{h-1} + 1 \leqslant s \leqslant r_1 + \cdots + r_h)$ 的线性组合。因此，根据(11.14)，对于每一个 $h = 1, 2, \cdots, m$ 和一切在下面范围内的 $i, j, \omega_{ji} = 0$：

$$r_1 + \cdots + r_{h-1} + 1 \leqslant i \leqslant r_1 + \cdots + r_h, \quad 1 \leqslant j \leqslant r_1 + \cdots + r_{h-1},$$

$$r_1 + \cdots + r_h + 1 \leqslant j \leqslant n.$$

对具有这些范围内的下标的一切 ω_{ij} 取外积，我们得到一个

微分齐式 Φ，它构成齐性空间 $\mathfrak{A}_s^0/\mathfrak{H}(r_1+\cdots+r_m)$ 的不变密度．即 m 组 $(L_{r_1[0]},\cdots,L_{r_m[0]})$ 的密度的充要条件是 $d\Phi=0$（根据条件(10.3)）。利用结构方程(11.8)，经过简易运算可知，$d\Phi=\Phi\wedge\sum\omega_{hh}(h=1,2,\cdots,r_1+r_2+\cdots+r_m)$。由于(11.9)是齐式 ω_{ij} 间的唯一关系，$d\Phi=0$成立的充要条件是

$$r_1+r_2+\cdots+r_m=n, \tag{11.38}$$

从而我们得定理：

具有维数 $r_1,r_2,\cdots,r_m$，经过原点而没有其他公共点的线性子空间所构成的 m 组 $(L_{r_1[0]},\cdots,L_{r_m[0]})$ 在 $\mathfrak{A}_s^0$ 下有不变密度的充要条件是(11.38)成立。

在这种情况下，m 组 $(L_{r_1[0]},\cdots,L_{r_m[0]})$ 的密度是一个 $(n-r_1)r_1+\cdots+(n-r_m)r_m$ 次微分齐式。例如在平面上，$n=2$，经过原点的直线集在 $\mathfrak{A}_s^0(2)$ 下没有不变密度；但直线偶 (L_1,L_1') 的密度却存在。若这两条件和 x 轴所作的有向角是 ϕ,ϕ'（假定直角坐标），则这个不变密度可以写成

$$d(L,L')=\text{sim}^{-2}(\phi-\phi')d\phi\wedge d\phi'.$$

3. 对于特殊非齐次仿射群的线性子空间密度

现在我们考察群 $\mathfrak{A}_s$ 或 $\mathfrak{A}_s(n)$：

$$x'=ax+b,\quad \det a=1. \tag{11.39}$$

$\mathfrak{A}_s$的每个元素确定于一个 n 维标架 $(p;e_1,e_2,\cdots,e_n)$ 的位置，其中 $|e_1e_2\cdots e_n|=1$，而 $\mathfrak{A}_s$ 的 Maurer-Cartan 式则可以从(11.4)得到，结构方程是附有条件(11.9)的(11.8)。设 L_r 为 p 点和矢量 $e_1,\cdots,e_r(0\leqslant r\leqslant n)$ 所确定的 r 维平面。由(11.14)可知，令 L_r 不变的仿射子群 $\mathfrak{H}_r$的特征是

$$\omega_i=0,\qquad i=r+1,\cdots,n;$$
$$\omega_{jh}=0,\qquad h=1,\cdots,r;\ j=r+1,\cdots,n. \tag{11.40}$$

这是一般理论中的方程组(10.1)。齐性空间 $\mathfrak{A}_s/\mathfrak{H}_r$ 在 $\mathfrak{A}_s$ 下有不变密度的充要条件是 $d\left(\bigwedge\omega_i\bigwedge\omega_{jh}\right)=0$，其中下标范围见

(11.40)。利用结构方程(11.8)，容易得到，除符号外，

$$d\left(\bigwedge \omega_i \bigwedge \omega_{jh}\right) = \bigwedge \omega_i \bigwedge \omega_{jh} \bigwedge (2(\omega_{r+1,r+1} + \cdots + \omega_{nn}))。\tag{11.41}$$

由于齐式 $\omega_i; \omega_{jh}$ 只受方程(11.9)的约束，(11.41)右边等于零的充要条件是 $r=0$。因此，除点以外，线性子空间L_r在 $\mathfrak{A}_s$ 下没有不变密度。对于点，$r=0$，不变密度是

$$dL_0 = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = db_1 \wedge db_2 \wedge \cdots \wedge db_n,$$

这等于空间的体元。

对于没有公共点的线性空间m组$(L_{r_1},\cdots,L_{r_m})$，仿照群 $\mathfrak{A}_s^0$ 的款，就可以证明下面的定理：

若线性子空间$L_{r_1},\cdots,L_{r_m}$没有公共点，它们的维数r_i满足条件 $r_1+r_2+\cdots+r_m+m \leqslant n+1$，而且在 $\mathfrak{A}_s(n)$下，它们所构成的 m 组$(L_{r_1},\cdots,L_{r_m})$是可迁地变换着，则在 $\mathfrak{A}_s(n)$下，这种m组有不变密度的充要条件是：或者一切 r_i 是零，或者

$$r_1+r_2+\cdots+r_m+m=n+1。\tag{11.42}$$

例如，若点 L_0 不在超平面 L_{n-1} 上，则(L_0, L_{n-1})的集合有一个不变密度，它的度量表达式是$d(L_0, L_{n-1}) = p^{-(n+1)} dL_0 \wedge du_{n-1} \wedge dp$，其中 dL_0 是在 L_0 点的体元，而 du_{n-1}是对应于与L_{n-1}垂直的方向的立体角元，而 p 是从点到超平面的距离。

平行超平面偶的集合的密度。我们将证明：平行超平面偶的集合在$\mathfrak{A}$下有不变密度。由于超平面偶在 $\mathfrak{A}_s$下是可迁地变换着，可以取两个超平面之一经过 p 点而平行于矢量 $e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}$，而另一个则和它平行而经过 e_n 的终点。由(11.14)可知，这个平面偶属于下面方程组的积分簇：

$$\omega_n = 0, \quad \omega_{nh} = 0, \quad h=1,2,\cdots,n。\tag{11.43}$$

根据(10.3)，外积 $d\mathscr{P} = \omega_n \wedge \omega_{n1} \wedge \cdots \wedge \omega_{nn}$是密度的充分条件为 $d(d\mathscr{P})=0$。利用结构方程，我们就有，除符号外，

$$d(d\mathscr{P}) = d\mathscr{P} \wedge \left(\sum_{1}^{n} \omega_{1i}\right) = 0。$$

于是有定理：

对于群 $\mathfrak{A}_s$，平行超平面偶的集合有不变密度

$$d\mathscr{P} = \omega_n \wedge \omega_{n1} \wedge \cdots \wedge \omega_{nn}。\tag{11.44}$$

不难得到 $d\mathscr{P}$ 的一个度量表达式。若 p_1, p_2 表示从原点到两个超平面的距离，而 du_{n-1} 表示对应于与超平面垂直的方向的 $n-1$ 维幺球面的体元，可以证明[577]

$$d\mathscr{P} = \frac{du_{n-1} \wedge dp_1 \wedge dp_2}{|p_1 - p_2|^{n+2}}。\tag{11.45}$$

对凸体的应用。已给欧氏空间 E_n 里的一个凸体 K，设 $\Delta = \Delta(u_{n-1})$ 为 K 对应于 u_{n-1} 方向的宽。一切包含 K 在内的平行超平面偶的测度是

$$\int \frac{du_{n-1} \wedge dp_1 \wedge dp_2}{|p_2 - p_1|^{n+2}} = \frac{1}{n(n+1)} \int_{U_{n-1/2}} \frac{du_{n-1}}{\Delta^n}。\tag{11.46}$$

这个测度引出 K 的仿射不变量

$$J = \int_{U_{n-1/2}} \frac{du_{n-1}}{\Delta^n},\tag{11.47}$$

其中积分的范围是半个 $n-1$ 维幺球面。

若 K 具有一个对称中心，则 J 和(11.35)中的仿射不变量 $I(K,O)$ 之间显然有关系 $nI(K,O) = 2^{n+1}J$。若 K 没有对称中心，J 和 I 没有简单的关系。为了得到它们之间的一个不等式，可以利用不等式

$$x^{-n} + y^{-n} \geq 2(xy)^{-n/2}, \quad (xy)^{n/2} = [(x+y)/2]^n,$$

$$x^{-n} + y^{-n} \geq 2^{n+1}(x+y)^{-n},$$

它对于 $x>0, y>0$ 是成立的，而且只有 $x=y$ 时，等式才适用。现在，设 p_1, p_2 表示在 K 的两个相对的点的撑函数(相对于 K 内部的一点 O)，则利用上述不等式，得

$$2J = \int_{U_{n-1}} \frac{du_{n-1}}{\Delta^n} = \int_{U_{n-1}} \frac{du_{n-1}}{(p_1 + p_2)^n}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \int_{U_{n-1}} \left(\frac{du_{n-1}}{p_1^n} + \frac{du_{n-1}}{p_2^n} \right) = \frac{n}{2^n} I(K, O),$$

因而

$$J \leqslant \frac{n}{2^{n+1}} I(K, O). \tag{11.48}$$

这适用于任意 $O \in K$，而等号适用的充要条件是 K 对于 O 中心对称。我们可以证明不等式

$$\frac{2^{n-1}}{n!(n-1)!} < JV \leqslant \frac{4\pi^n}{2^{n+1}(\Gamma(n/2))^2 n}, \tag{11.49}$$

其中 V 是 K 的体积[577]。达到上界的充要条件是 K 为椭球。下界不是最好的值，而且 $n > 2$ 时，最好的值也尚未知。$n = 2$ 时 Eggleston[161]证明了 $JV \geqslant 3/2$，而等式成立是三角形的特征。

4. 注记与练习

(1) 格点集。设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 R^n 里的线性无关矢量。当 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 为整数时，一切点 $x = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n$ 构成的点集叫做以 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为底的格。当 x_i 为满足 $0 \leqslant x_i < 1$ 的实数时，$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ 所确定的半开平行体叫做格的基本区域（按照第八章第一节的意义），而这个基本区域的体积等于行列式 $|e_1 e_2 \cdots e_n|$，它就称为格的行列式。现在考虑以 $e_i(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$（其中 1 是第 i 个分量）为底的格 $\mathscr{L}_0$ 以及特殊齐次仿射群 $\mathfrak{A}_n^0(n)$。格 $\mathscr{L} = a\mathscr{L}_0$ ($a \in \mathfrak{A}_n^0$) 的行列式是 1，而且倒转来，任意行列式等于 1 的格是 $\mathscr{L}_0$ 在某个 $a \in \mathfrak{A}_n^0$ 下的象。用 $\mathscr{L}$ 表示行列式等于 1 的一切格的集合。若 Γ 表示 $\mathfrak{A}_n^0$ 中使 $\mathscr{L}_0$ 不变的元素所构成的子群，集合 $\mathscr{L}$ 可以和齐性空间 $\mathfrak{A}_n^0/\Gamma$ 同化。由于 Γ 是一个离散群，行列式等于1的格的不变密度 $d\mathscr{L}$ 就是(11.20)所给出的密度 $d\mathfrak{A}_n^0 = dSL(n)$。

我们将令 $d\mathscr{L}=d\mathfrak{A}_1^0$。

有了这个密度，我们可以证明，$\mathscr{L}$的测度是

$$m(\mathscr{L})=\zeta(2)\zeta(3)\cdots\zeta(n),$$

其中$\zeta(n)=1+2^{-n}+3^{-n}+\cdots$。此外，已给$R^n$里一个域$D$，其体积是$v(D)$，而用$N$表示$\mathscr{L}$中属于$D$而具有互素坐标的格点(称为原始格点)的个数，而用$N_t$表示$\mathfrak{L}$中属于$D$的一切格点的总数，就有

$$\int_L N d\mathscr{L}=v(D)\zeta(2)\zeta(3)\cdots\zeta(n-1),$$

$$\int_L N_t d\mathscr{L}=v(D)\zeta(2)\cdots\zeta(n-1)\zeta(n).$$

于是有：

(a) 含于一个具有体积$v(D)$的固定域D内的原始格点数的中值是$E(N)=v(D)/\zeta(n)$;

(b) 含于D内的格点数的中值是$E(N_t)=v(D)$。

取这些中值的范围是一切行列式等于1的格的集合。作为一个推论，我们有下面的 Minkowski与Hlawka 定理：

在R^n里，设D为相对于原点的星状域(即这个域只要含有x点，就含有整个线段$\lambda x, 0\leqslant\lambda\leqslant 1$)，其体积是$v(D)<\zeta(n)$，则存在着一个行列式等于1的格，对于这个格，除原点外，D不含有任何其他格点。

这个定理为 Minkowski 所猜想到，被 Hlawka 在1944 年所最先证明.利用中值$E(N)$和$E(N_t)$的证明是 Siegel[610a]和 Weil[712]作出的. 一个简化的证明以及一些更一般的结果为Macbeath和Rogers[381]所给出。其他类型的证明以及有关的有趣结果，见Cassels[92]和 Lekkerkerker[361]两书，还可以参看[557]。

(2) **仿射空间的平行子空间集**. 第三节关于平行超平面集的结果是下面的定理 (Santaló[578])的特款：

设平行线性子空间$L_{h_1},\cdots,L_{h_q}$的维是$h_1,\cdots,h_q$，而q组H

$(L_{h_1},\cdots,L_{h_q})$在特殊仿射群$\mathfrak{A}_s(n)$下可迁地变换着，则这些q组的集合在$\mathfrak{A}_s$下有不变密度的充要条件是一切维数h_i相等，$h_1=h_2=\cdots=h_q=h$，而且$q=n+1-h$。

两个平行超平面的款对应于$h=n-1$，$q=2$。

当$n=3$时，我们得到的是两个平行平面的款以及三条平行（不共面）直线的款，对于后一款，若用du_2表示幺球面对应于这些直线方向的面元，而用dP_0,dP_1,dP_2表示垂直于这些直线的一个平面上，在其交点的面元，则对于已给凸体区，考虑三条平行线，其凸包含K在内，并计算这样的三条单行线的集合的测度，就导出下面的关于K的仿射不变量：

$$m_1(K)=\frac{1}{64}\int_{U_{2/2}}du_2\int\frac{dP_0\wedge dP_1\wedge dP_2}{T^6},\qquad(11.50)$$

其中T表示三角形$P_0P_1P_2$的面积。这里，第一次积分的范围是在垂直于u_2的平面上，一切含K的投影在内的三角形，而第二个积分范围则是半幺球面。寻求不变量(11.50)和K的其他仿射不变量之间的不等式将是饶有兴味的。

（3）**抛物线、椭圆、双曲线的集合**。考虑仿射平面，抛物线在仿射群$\mathfrak{A}_s(2)$下可迁地变换着。因此，求抛物线集合在$\mathfrak{A}_s(2)$下的不变密度是有意义的。假定抛物线为方程

$$x^2+2bxy+b^2y^2+px+qy+r=0$$

所确定，可以证明，不变密度是[104]

$$dP=\frac{db\wedge dp\wedge dq\wedge dr}{(q-bp)^{8/3}}.$$

同样，假定椭圆为方程

$$x^2+2axy+(a^2+b^2)y^2+2px+2qy+r=0$$

所确定，则在群$\mathfrak{A}(2)$下，椭圆集合有不变密度

$$dE=\frac{b}{\Delta^2}da\wedge db\wedge dp\wedge dq\wedge dr,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & a & p\\ a & a^2+b^2 & q\\ p & q & r\end{vmatrix}.$$

对于由方程

$$x^2+2axy+(a^2-b^2)y^2+2px+2qy+r=0$$

所确定的双曲线，在 $\mathfrak{A}(2)$下的不变密度是

$$\mathrm{d}H=\frac{b}{\Delta^2}\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}b\wedge\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}q\wedge\mathrm{d}r,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & a & p\\ a & a^2-b^2 & q\\ p & q & r\end{vmatrix}.$$

这些密度是Stoka的结果[634,647]。

(4) 实射影群. 设V^{n+1}为实数上的$n+1$维矢空间.用$V_*^{n+1}=V^{n+1}-\{0\}$表示V^{n+1}的一切非零矢的集合. V_*^{n+1}的两个线性相关的矢$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$(即有实数$c\neq 0$，使$\boldsymbol{y}=c\boldsymbol{x}$)称为有关系$\rho$: $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$，这是一个等价关系(比例关系). 商集$V_*^{n+1}/\rho$，即等价类集，称为$n$维射影空间. 若$L_{r+1}^*$是$V^{n+1}$的$r+1$维子空间($r=0,1,\cdots,n$)，则$(L_{r+1}^*-\{0\})/\rho$是$P_n$里的一个$r$维空间. 若$\boldsymbol{x}$为$V_*^{n+1}$的矢量，则一切具形状$cx(c\neq 0)$的矢量都代表同一点$\boldsymbol{x}$. 若非零矢$\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^2$确定$V_*^{n+1}$里一个$r+1$维子空间，则其对应点确定$P_n$里一个$r$维平面.

设$\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n$为$V^{n+1}$的一个底. 则每一个矢量可以写成$\boldsymbol{x}=x_0\boldsymbol{A}_0+x_1\boldsymbol{A}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{A}_n$. 数值$x_0,x_1,\cdots,x_n$称为对应于等价类$cx(c\neq 0)$的点的齐次坐标. 若两点的坐标成比例，则它们重合. 若$x_0\neq 0$，则比值$x_1/x_0,x_2/x_0,\cdots,x_n/x_0$是$x$点的非齐次坐标. 矢空间$V^{n+1}$称为与$P_n$相伴的矢空间，而底$\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n$则构成一个齐次坐标系.

用x表示点$x\in P_n$，同时表示以x的齐次坐标为元素的列矩

阵，即$(n+1)\times 1$矩阵。把P_n变成自己的一个射影变换或直射变换是一个用矩阵方程$x'=Ax$，$\det A\neq 0$的变换，其中$A=(a_{ij})$是一个$(n+1)\times(n+1)$满秩方阵。由于x和cx代表同一点，我们总可以假定$\det A=1$。把P_n变成自己的直射变换构成射影群$\mathfrak{P}_n$。$\mathfrak{P}$的一组 Maurer-Cartan 式是方阵$\Omega=A^{-1}\mathrm{d}A$的一组独立元素而结构方程则是$\mathrm{d}\Omega=-\Omega\wedge\Omega$。用显式表示，若

$$A=(a_{ij}),\quad A^{-1}=(\alpha_{ij}),\quad \Omega=(\omega_{ij}),$$

就有

$$\omega_{ij}=\sum_{h=0}^{n}\alpha_{ih}\mathrm{d}a_{hj}=-\sum_{h=0}^{n}a_{hj}\mathrm{d}\alpha_{ih},$$

$$\mathrm{d}\omega_{ij}=-\sum_{h=0}^{n}\omega_{ih}\wedge\omega_{hj},$$

而取$\det A=1$的微分，就得$\omega_{00}+\omega_{11}+\cdots+\omega_{nn}=0$。

用$\boldsymbol{A}_i$表示V_*^{n+1}中具有分量$(a_{0i},a_{1i},\cdots,a_{ni})$，$i=0,1,\cdots,n$的矢量，可以把方程$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\Omega$写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}_j=\sum_{i=0}^{n}\omega_{ji}\boldsymbol{A}_i, \tag{11.51}$$

因而

$$\omega_{ji}=|\boldsymbol{A}_0\cdots\boldsymbol{A}_{j-1}\mathrm{d}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_{j+1}\cdots\boldsymbol{A}_n| \tag{11.52}$$

P_n的运动密度具有下面的度量表达式。P_n里的一个直射变换被$n+2$个点$Q_0,Q_1,\cdots,Q_{n+1}$所确定，它们是点$(1,0,\cdots,0)$，$(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,0,1),(1,1,\cdots,1)$的象。设$S_h$表示以$Q_0,Q_1,\cdots,Q_{n+1}$（$Q_h$除外）诸点为顶点的单（纯）形的体积，而$\mathrm{d}Q_i$表示在$Q_i$的体元，则$\mathfrak{P}_n$的不变体元（$\mathfrak{P}_n$的运动密度）可以写成[370]：

$$\mathrm{d}\mathfrak{P}_n=\frac{\mathrm{d}Q_0\wedge\mathrm{d}Q_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}Q_{n+1}}{S_0S_1\cdots S_{n+1}}. \tag{11.53}$$

在$\mathfrak{P}_n$下，线性空间的m组是否有不变密度的问题，可以像仿射群的情况那样解决，其结果是下面的定理：

设线性空间$L_{h_1},\cdots,L_{h_m}$没有公共点，它们的维h_i满足条件$h_1+h_2+\cdots+h_m+m\leqslant n+1$，则对于射影群，$m$组$(L_{h_1},\cdots,L_{h_m})$有不变密度的充要条件是

$$h_1+h_2+\cdots+h_m+m=n+1. \tag{11.54}$$

这时候，不变密度是外积$\bigwedge\omega_{ij}$，其中齐式为(11.52)所给出而下标则有以下范围：

$$0\leqslant i\leqslant h_1,\quad h_1+1\leqslant j\leqslant n,$$

$$h_1+1\leqslant i\leqslant h_1+h_2+1,\quad 0\leqslant j\leqslant h_1,\quad h_1+h_2+2\leqslant j\leqslant n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_1+\cdots+h_{m-1}+m-1\leqslant i\leqslant h_1+h_2+\cdots+h_m+m-1,$$

$$0\leqslant j\leqslant h_1+\cdots+h_{m-1}+m-2,\quad h_1+\cdots+h_m+m\leqslant j\leqslant n.$$

$m=2$时，这个结果是Varga[686]得到的。

例1　对于射影直线$(n=1)$，唯一可能的款是$h_1=h_2=0$，即点偶。点偶(A_0,A_1)的不变密度是

$$\begin{aligned}d(A_0,A_1)&=\omega_{01}\wedge\omega_{10}\\&=a_{00}a_{11}da_{10}\wedge da_{01}-a_{00}a_{01}da_{10}\wedge da_{11}\\&\quad-a_{10}a_{11}da_{00}\wedge da_{01}+a_{10}a_{01}da_{00}\wedge da_{11}.\end{aligned}$$

另一方面，A_0和A_1的非齐次坐标是

$$\xi=a_{10}/a_{00},\quad \eta=a_{11}/a_{01},$$

这样，容易算得

$$d\xi\wedge d\eta=(a_{00}a_{01})^{-2}\omega_{10}\wedge\omega_{01}\quad 和\quad (\eta-\xi)^2=(a_{01}a_{00})^{-2}.$$

因此，直线上点偶的射影不变密度是

$$d(A_0,A_1)=(\xi-\eta)^{-2}d\xi\wedge d\eta,$$

其中ξ,η为两点的非齐次坐标。例如，假定(ξ_1,ξ_2)和(η_1,η_2)两个节①没有公共点，则在(ξ_1,ξ_2)内的A_0和在(η_1,η_2)内的A_1所构成的点偶(A_0,A_1)的测度是

① 闭节。——译者

$$m(\xi,\eta;\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2,\eta_1\leqslant\eta\leqslant\eta_2)=\log(\eta_2,\eta_1,\xi_2,\xi_1),$$

其中$(\eta_2,\eta_1,\xi_2,\xi_1)$表示$\eta_2,\eta_1,\xi_2,\xi_1$四点的交比。

例2 对于射影平面($n=2$)，条件(11.52)得到满足的款是

(a) $h_1=h_2=h_3=0$，$m=3$(不共线的三点组)；

(b) $h_1=0,h_2=1,m=2$(不关联的点与直线)。

(a) 由(11.51)，A_0,A_1,A_2为固定点的条件是

$$\omega_{10}=\omega_{20}=0,\ \omega_{01}=\omega_{21}=0,\quad \omega_{02}=\omega_{12}=0,$$

而不变密度化为

$$d(A_0,A_1,A_2)=\omega_{10}\wedge\omega_{20}\wedge\omega_{01}\wedge\omega_{21}\wedge\omega_{02}\wedge\omega_{12}.$$

A_0,A_1,A_2的非齐次坐标是

$$A_0(\xi_0=a_{10}/a_{00},\ \eta_0=a_{20}/a_{00}),$$
$$A_1(\xi_1=a_{11}/a_{01},\ \eta_1=a_{21}/a_{01}),$$
$$A_2(\xi_2=a_{12}/a_{02},\ \eta_2=a_{22}/a_{02}),$$

因而利用(11,52)，就得

$$d(A_0,A_1,A_2)=a_{00}^3a_{01}^3a_{02}^3d\xi_0\wedge d\eta_0\wedge d\xi_1\wedge d\eta_1\wedge d\xi_2\wedge d\eta_2.$$

注意三角形$A_0A_1A_2$的面积是$T=\frac{1}{2}(a_{00}a_{01}a_{02})^{-1}$，就得，除一个常数因子外，

$$d(A_0A_1A_2)=T^{-3}dA_0\wedge dA_1\wedge dA_2,$$

其中$dA_i=d\xi_i\wedge d\eta_i$是在$A_i$点的面元。

(b) 对于点A_0和直线$G=A_1A_2$，不变密度是

$$d(A_0,G)=\omega_{10}\wedge\omega_{20}\wedge\omega_{01}\wedge\omega_{02}.$$

这个密度的度量表达式是

$$d(A_0,G)=\delta^{-3}dA_0\wedge dG,$$

其中dA_0和dG是A和G的度量密度而δ是从A_0到G的距离。

二次超曲面的集合。 在P_n里，一个满秩二次超曲面C的矩阵方程可以写成$x'Qx=0$，其中Q是一个满秩$(n\times1)\times(n+1)$对称

方阵(q_{ij})，而x是以x的齐次坐标为元素的$(n+1)\times 1$矩阵。这样，满秩二次超曲面集合在$\mathfrak{P}_n$下的不变密度可以写成

$$dC=(q^{**})^{-1}dq_{00}\wedge dq_{01}\wedge\cdots\wedge dq_{n-1,n},$$

其中q^{**}是逆方阵Q^{-1}的(n,n)元素，而且我们假定Q已经规范化，使得$\det Q=1$。

若二次超曲面的方程已经规范化为

$$\sum q^*_{ij}x_ix_j=0,$$

其中$q^*_{nn}=1$ $(i,j=0,1,\cdots,n)$，则有

$$dC=\frac{dq^*_{00}\wedge dq^*_{01}\wedge\cdots\wedge dq^*_{n-1,n}}{(n+1)\Delta^{(n+2)/2}},$$

其中$\Delta=\det(q^*_{ij})$。

例如，若把二次曲线的方程写成

$$q_{00}x_0^2+2q_{01}x_0x_1+2q_{02}x_0x_2+q_{11}x_1^2+2q_{12}x_1x_2+x_2^2=0,$$

则二次曲线集合的不变密度是(见[646,647,577])

$$dC=\frac{dq_{00}\wedge dq_{01}\wedge dq_{02}\wedge dq_{11}\wedge dq_{12}}{3\Delta^2}.$$

Luccioni[371]讨论了降秩二次超曲面的款。Stanilow[622]研究了P_{2n+1}是关于令两个平面不变的直射变换的积分几何学。

练习1　在一般仿射群$\mathfrak{A}(2)$下，平面四边形是可迁地变换着，它们有不变密度$F^{-6}dP_0\wedge dP_1\wedge dP_2$，其中$P_0,P_1,P_2$是平行四边形的三个顶点，而$F$是它的面积。

练习2　在特殊仿射群$\mathfrak{A}_s(2)$下，直线偶(G_0,G_1)有不变密度$d(G_0,G_1)=\sin^{-3}\theta dG_0\wedge dG_1$，其中$dG_0$，$dG_1$表示直线的度量密度而$\theta$表示$G_0,G_1$之间的角。

练习3　在相似群(9.95)下，点偶(P_0,P_1)有不变密度

$$d(P_0,P_1)=\delta^{-4}dP_0\wedge dP_1,$$

其中δ是两点间的距离。平行直线(G_0,G_1)有密度

$$d(G_0,G_1)=\Delta^{-2}dG_0\wedge dP_1,$$

其中 Δ 两线之间的距离，p_1是是从原点到G_1的距离。

其他例为 Stoka[634]和Santaló[581]所给出。在已给定点偶或直线偶的密度的情况下求群的逆问题，曾为Lucenko和 Jurtova [374]所探讨。

练习4 下面分别给定了平面中射影变换的一个子群，验证在这个子群下点和线的密度。所缺的密度，表示它们不存在。

(a) $x' = ax$, $y' = by$; $dP = (xy)^{-1}dx \wedge dy$,

$dG = (p\sin\phi\cos\phi)^{-1}dp \wedge d\phi$;

(b) $x' = ax$, $y' = y + h$; $dP = x^{-1}dx \wedge dy$,

$dG = (\sin^2\phi\cos\phi)^{-1}dp \wedge d\phi$;

(c) $x' = x + c$, $y' = cx + y + h$; $dP = dx \wedge dy$,

$dG = \sin^{-3}\phi dp \wedge d\phi$;

(d) $x' = ax$, $y' = ay + h$; $dP = x^{-2}dx \wedge dy$;

(e) $x' = x + \log a$, $y' = ay + h$, $dP = e^{-x}dx \wedge dy$,

$dG = (\cos^2\phi\sin\phi)^{-1}dp \wedge d\phi$;

(f) $x' = x$, $y' = ay + b$, $dG = (\cos^2\phi\sin\phi)^{-1}dp \wedge d\phi$;

(g) $x' = (ax + b)(cx + h)^{-1}$, $y' = (cx + h)^{-1}y$, $ah - bc = 1$;

$dP = y^{-3}dx \wedge dy$, $dG = \sin^{-3}\phi dp \wedge d\phi$.

(h) $x' = ax + b$, $y' = cx + a^{1/2}y + h$, $dG = \sin^3\phi dp \wedge d\phi$.

平面上有的射影群下存在着 n 点组的密度，这种群曾为Lucenko[372]所探讨。

第十二章　E_n 中的运动群

1. 引言

设 $x(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $y(y_1,\cdots,y_n)$ 为 R^n 中两点。若 x 与 y 之间的距离用

$$d(x,y)=[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{1/2}$$

来确定，则 R^n 为度量空间，称为 n 维欧氏空间，用 E_n 表示。一个把 E_n 变为自己的仿射变换若保持距离不变，则称为运动。一切运动构成仿射群的子群 $\mathfrak{M}$，它用方程

$$x'=ax+b,\quad aa^t=e \tag{12.1}$$

来确定，其中 a^t 表示 $n\times n$ 方阵 a 的转置，而 e 则表示 $n\times n$ 幺方阵。条件 $aa^t=e$ 表明 a 是正交方阵。若 $\det a=+1$ 就得到 $\mathfrak{M}$ 的一个子群，叫做特殊运动群。

利用活动标架法（第十一章，第 1 节），容易对 $\mathfrak{M}$ 进行考察。设 $(p_0;e_1^0,\cdots,e_n^0)\equiv(p_0;e_i^0)$ 为固定幺模正交标架（$e_i^0\cdot e_j^0=\delta_{ij}$）。对应于每个运动 $g\in\mathfrak{M}$，有一个幺模正交动标 $(p;e_i)$，它是 $(p_0;e_i^0)$ 在 g 下的象；倒转来，对应于每一个幺模正交标架 $(p;e_i^0)$，有一个运动 g，使得 $(p;e_i)=g(p_0;e_i^0)$。根据方程(11.14)

$$dp=\sum_{i=1}^{n}\omega_i e_i,\quad de_i=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ji}e_j, \tag{12.2}$$

利用关系 $e_i\cdot e_j=\delta_{ij}$，$de_i\cdot e_j+e_i\cdot de_j=0$，我们有

$$\omega_i=dp\cdot e_i,\quad \omega_{ji}=de_i\cdot e_j,\quad \omega_{ji}+\omega_{ij}=0 \tag{12.3}$$

用矩阵 a,b 表示，这些一次式为(11.7)所确定，现在它可以写成

$$\omega_{ij}=\sum_{h=1}^{n}a_{hi}da_{hj},\quad \omega_i=\sum_{h=1}^{n}a_{hi}db_h. \tag{12.4}$$

结构方程是

$$\mathrm{d}\omega_{ij}=-\sum_{h=1}^{n}\omega_{ih}\wedge\omega_{hj},\quad \mathrm{d}\omega_i=\sum_{h=1}^{n}\omega_h\wedge\omega_{ih}。\tag{12.5}$$

我们下面求$\mathfrak{M}$的不变体元和它的一些子群。

平移群．这是用 $x'=x+b$ 确定的子群$\mathfrak{T}\subset\mathfrak{M}$。$\mathfrak{T}$的维是 n 而一次式$\mathrm{d}b_i$构成一组Maurer–Cartan式．由于$\mathscr{T}$是可交换的，它是单模群，而它的不变体元是

$$\mathrm{d}\mathscr{T}=\mathrm{d}b_1\wedge\mathrm{d}b_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}b_n。\tag{12.6}$$

平移群的积分几何曾为Berwald与Varga[30]，Blaschke[44]以及Miles[422]所研究。

绕一点的转动．绕原点的转动群$\mathfrak{M}_{[o]}$用 $x'=ax$ 确定（a 是正交方阵）。它和正交群$O(n)$同构。由条件 $aa'=e$ 可知，对于一切 i,h，$a_{ih}^2\leqslant 1$，因而$\mathfrak{M}_{[o]}$的群流形是有界（而闭）的。所以$\mathfrak{M}_{[o]}$是紧致群，于是根据第九章的第 6 节，可知：绕E_n中一点的转动群$\mathfrak{M}_{[o]}$（正交群$O(n)$）是单模群。不变体元为

$$\mathrm{d}\mathfrak{M}_{[o]}=\bigwedge_{i<j}\omega_{ij}。\tag{12.7}$$

作为(9.63)的一个推论，我们有

$$\mathrm{d}\mathfrak{M}_{[o]}(a)=\mathrm{d}\mathfrak{M}_{[o]}(a^{-1}),$$

即：把转动用它的逆来替代后，不变体元$\mathrm{d}\mathfrak{M}_{[o]}$不受影响。

我们将计算$\mathfrak{M}_{[o]}$的总体积。在绕原点O转动中，矢量$\boldsymbol{e}_i$的终点在以O为中心的幺球U_{n-1}上运动。数积 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\omega_{ji}$等于$\boldsymbol{e}_i$的终点沿$\boldsymbol{e}_j$方向的弧长元素，因此，若用$\mathrm{d}u_{n-1}$表示$U_{n-1}$在$\boldsymbol{e}_1$终点的$n-1$维体元，则

$$\mathrm{d}u_{n-1}=\omega_{21}\wedge\omega_{31}\wedge\cdots\wedge\omega_{n1}。\tag{12.8}$$

根据类似理由，若U_{n-2}为含在垂直于$\boldsymbol{e}_1$的$n-1$维平面内的$n-2$维幺球，则它在$\boldsymbol{e}_2$终点的$n-2$维体元是

$$\mathrm{d}u_{n-2}=\omega_{32}\wedge\omega_{42}\wedge\cdots\wedge\omega_{n2},\tag{12.9}$$

于是通过归纳法就得

$$d\mathfrak{M}_{[O]} = du_{n-1}\wedge du_{n-2}\wedge\cdots\wedge du_1. \qquad (12.10)$$

注意最后的矢量 e_n 有两个可能的正向，e_n 与 $-e_n$，它们分别确定一个 n 棱标架$(O;e_i)$。群$\mathfrak{M}_{[O]}$包括两种可能性，因此在整个群上对(12.10)积分就得

$$m(\mathfrak{M}_{[O]}) = 2O_{n-1}O_{n-2}\cdots O_1, \qquad (12.11)$$

其中 O_i 表示 i 维幺球的面积(1.22)。若只考虑正常转动，则测度(12.11)应除以 2。

$n=3$ 时，绕原点 O 的运动密度可用

$$d\mathfrak{M}_{[O]} = du_2\wedge du_1 = \sin\theta d\theta\wedge d\phi\wedge d\alpha$$

表示。其中θ、ϕ为幺球面 U_2 在 e_3 终点的球面坐标，而 α 则表示绕 e_3 的转角 $(0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$。若确定转动时，采用具有球面坐标 θ_1,ϕ_1 的转动轴以及绕该轴的转角 α_1，则经过坐标变换可得

$$d\mathfrak{M}_{[O]} = 2\sin^2(\alpha_1/2)\sin\theta_1 d\theta_1\wedge d\phi_1\wedge d\alpha_1.$$

这表明，若以为转轴和转角都是均匀地随机选取的，那就猜错了(见[144, 335, 408, 670])。

运动群。 由于$\mathfrak{M}_{[O]}$和 $\mathfrak{T}$ 都是单模群，运动群$\mathfrak{M}$也是单模群，因而它的不变体元可以写成

$$d\mathfrak{M} = d\mathfrak{M}_{[O]}\wedge d\mathfrak{T}. \qquad (12.12)$$

假定用标架$(p;e_i)$确定运动，则根据(12.6)和(12.10)，并注意 E_n 在 p 的体元是 $dP = db_1\wedge db_2\wedge\cdots\wedge db_n$，则不变体元(12.12)可以写成

$$\begin{aligned} d\mathfrak{M} &= dP\wedge d\mathfrak{M}_{[O]} \\ &= dP\wedge du_{n-1}\wedge du_{n-2}\wedge\cdots\wedge du_1. \end{aligned} \qquad (12.13)$$

绕一个 q 维平面的转动。 在 E_n 中，令一个 q 维平面 L_q 内的一切点都不动的运动构成绕 L_q 的转动群 $\mathfrak{M}_{[q]}$。若用一个和 L_q 正交的 $n-q$ 维平面 L_{n-q} 和 L_q 相交，则群 $\mathfrak{M}_{[q]}$ 显然和欧氏空间 L_{n-q} 内绕 $O=L_q\cap L_{n-q}$ 的转动群 $\mathfrak{M}_{[O]}^{n-q}$ 同构。故 $\mathfrak{M}_{[q]}$

是单模群，而根据(12.11)，它的总体积是

$$m(\mathfrak{M}_{(q)})=2O_{n-q-1}O_{n-q-2}\cdots O_1. \qquad (12.14)$$

在以上一切款，若动标$(p;e_i)$的定向和原标架$(p_0;e_i^0)$相同，则 $\det a=1$，我们所得的是正常转动群或正常运动群。总测度(12.11)或(12.14)为其对应的正常群的总测度的两倍。

2. E_n 里线性空间密度

我们要对于 E_n 内的 r 维平面确定一个运动群下不变的测度。设 $\mathfrak{H}_r$ 表示令一个固定的 L_r^0 不变的运动群。显然 $\mathfrak{H}_r$ 在$\mathfrak{M}$内是闭的。若 $g\in\mathfrak{M}$，则对应于每个旁集 $g\mathfrak{H}_r$，有一个 r 维平面 gL_r^0；而反过来，对应于每一个 L_r，有一个旁集 $g\mathfrak{H}_r$，其中 g 是使 $L_r=gL_r^0$ 的一个运动。即：在 E_n 的 r 维平面和齐性空间 $\mathfrak{M}/\mathfrak{H}_r$ 的元素之间有一宗一一对应。求 r 维平面的集合的不变密度问题就等价于求$\mathfrak{M}/\mathfrak{H}_r$ 上的不变密度问题。我们将应用第十章的一般方法。

群 $\mathfrak{H}_r$ 是绕 L_r^0 的转动群 $\mathfrak{M}_{(r)}$ 和 L_r^0 内的运动群 $\mathfrak{M}'^r$ 的直积。由于$\mathfrak{M}_{(r)}$和$\mathfrak{M}'^r$ 是单模群，它们的积 $\mathfrak{H}_r=\mathfrak{M}_{(r)}\times\mathfrak{M}'^r$ 也是单模群。因此，根据第十章第1节的结论(c)，齐性空间 $\mathfrak{M}/\mathfrak{H}_r$ $(r=0,1,\cdots,n-1)$有不变密度。这个不变密度叫做 r 维平面密度，并用 dL_r 表示。我们将算得 dL_r 的显式。设$(p;e_i)$为 E_n 内的一个动标。设 L_r^0 为 p 点以及 r 个幺矢 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 所确定的 r 维空间。若令 L_r^0 固定，则 p 和矢量 $e_1,\cdots,e_r$ 只能在 L_r^0 上变动，因此，

$$dp\cdot e_\alpha=0 \quad (\alpha=r+1,\cdots,n).$$

$$de_i\cdot e_\beta=0 \quad (\beta=r+1,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,r).$$

所以，根据(12.3)，

$$\omega_\alpha=0,\quad \omega_{i\beta}=0, \qquad (12.15)$$

其中指标的范围是

$$\alpha,\beta=r+1,r+2,\cdots,n,\quad i=1,2,\cdots,r. \qquad (12.16)$$

(12.15)是一般理论中的 Pffaf 系。$\mathfrak{M}/\mathfrak{H}_r$ 的不变密度可以写成

$$d(\mathfrak{M}/\mathfrak{h}_r) = \bigwedge \omega_{i\beta} \bigwedge \omega_{\alpha}, \tag{12.17}$$

其中指标范围是(12.16)．虽然我们知道这个微分式对于$\mathfrak{M}/\mathfrak{H}_r$ 是不变密度，我们仍可以作为练习，用结构方程(12.5)验证条件(10.3)得到满足。于是可知：

对于 E_n 里 r 维平面的集合，存在着密度，它用

$$dL_r = \bigwedge_{i,\beta} \omega_{i\beta} \bigwedge_{\alpha} \omega_{\alpha} \tag{12.18}$$

确定，其中 $\omega_{\alpha}, \omega_{i\beta}$ 是(12.3)里的一次式，其指标范围是(12.16)。

除一个常数因子外，密度 dL_r 唯一确定，它是$(n-r)(r+1)$次式；而这是可以预期的，因为 E_n 的 r 维平面所构成的空间维数是$(n-r)(r+1)$。关于齐式(12.18)的不变性的直接证明，见[36,664,274]。

例　考虑 $n=2, r=1$ 的款。我们有

$$dL_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 = (de_1 \circ e_2) \wedge (dp \circ e_2)。$$

若x, y 为 p 的坐标而 $e_1(\cos\theta, \sin\theta), e_2(-\sin\theta, \cos\theta)$，则

$$\omega_{12} = d\theta, \quad \omega_2 = -\sin\theta dx + \cos\theta dy,$$

因而

$$dL_1 = -\sin\theta d\theta \wedge dx + \cos\theta d\theta \wedge dy,$$

而这就是平面上直线密度的齐式(3.11)。

3. 一个微分公式

设 $p, p_1, \cdots, p_r$ 为 L_r 里 $r+1$ 个点．设 p 为动标$(p; e_i)$的原点，而 L_r 为$(p; e_1, e_2, \cdots, e_r)$所确定的 r 维平面，则

$$p_i - p = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} e_j,$$

$$dp_i - dp = \sum_{j=1}^{r} d\lambda_{ij} e_j + \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} de_j \quad (i = 1, \cdots, r)。$$

乘以 e_α $(\alpha = r+1, \cdots, n)$，得

$$dp_i \cdot e_\alpha - dp \cdot e_\alpha = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} e_\alpha \cdot de_j,$$

或

$$dp_i \cdot e_\alpha = \omega_\alpha + \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} \omega_{\alpha j} \quad (\alpha = r+1, \cdots, n).$$

对于 $i = 1, 2, \cdots, r$，取这些量以及 $dp \cdot e_\alpha = \omega_\alpha$ 的外积，得

$$(dp \cdot e_\alpha) \bigwedge_i (dp_i \cdot e_\alpha) = r!S\omega_\alpha \bigwedge_j \omega_{\alpha j} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, r). \tag{12.19}$$

其中

$$r!S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \cdots & \lambda_{rr} \end{vmatrix}, \tag{12.20}$$

即 S 等于含于 L_r 内而以 $p, p_1, \cdots, p_r$ 为顶的单纯形的体积。对于 $\alpha = r+1, \cdots, n$，取(12.19)中诸量的外积，得

$$\bigwedge_\alpha (dp \cdot e_\alpha) \bigwedge_{\alpha, i} (dp_i \cdot e_\alpha) = (r!S)^{n-r} dL_r. \tag{12.21}$$

E_n 在 p_i 的体元可以写作

$$dP_i(E_n) = \bigwedge_h (dp_i \cdot e_h) \quad (h = 1, 2, \cdots, n),$$

而 L_r 在 p_i 的体元是

$$dP_i(L_r) = \bigwedge_j (dp_i \cdot e_j) \quad (j = 1, 2, \cdots, r).$$

因此，取(12.21)和

$$\bigwedge_h (dp \cdot e_h) \bigwedge_{i,j} (dp_i \cdot e_j) \quad (h, i, j = 1, 2, \cdots, r),$$

的外积，就得

$$dP(E_n)\wedge dP_1(E_n)\wedge\cdots\wedge dP_r(E_n)$$
$$=(r!S)^{n-r}dP_1(L_r)\wedge\cdots\wedge dP_r(L_r)\wedge dL_r. \quad (12.22)$$

这是 Blaschke 所得到的很有用的公式。Petkantschin[471]和 Kingman[337]得到了类似公式。Miles[420]把(12.22)应用于随机几何中的问题，例如，用于确定 E_n 中各种异向同性的随机 r 维单纯形($r=1,2,\cdots,n$)的随机体积的一切矩。

作为(12.22)的特款，有

(a) $r=1$。设 P,P_1 为 E_n 中直线 L_1 上两点。若 t,t_1 为它们在 L_1 上的坐标，则 $dP(L_1)=dt$，$dP_1(L_1)=dt_1$，$S=t_1-t$，而(12.22)化为(取 S 的绝对值)

$$dP(E_n)\wedge dP_1(E_n)=|t_1-t|^{n-1}dt\wedge dt_1\wedge dL_1, \quad (12.23)$$

而 $n=2$ 时，这就是公式(4.2)。

(b) $r=n-1$。若 $p,p_1,\cdots,p_{n-1}$ 为超平面 L_{n-1} 的 n 个独立点，则

$$dP(E_n)\wedge dP_1(E_n)\wedge\cdots\wedge dP_{n-1}(E_n)$$
$$=(n-1)!S\,dP(L_{n-1})\wedge dP_1(L_{n-1})\wedge\cdots$$
$$\wedge dP_{n-1}(L_{n-1})\wedge dL_{n-1}. \quad (12.24)$$

4. 绕一个固定 q 维平面的 r 维平面密度

设在 E_n 里，固定一个 q 维平面 L_q^0。我们要求含 L_q^0 在内的 r 维平面 $L_r(r>q)$的密度。假定 L_q^0 为 p 点和幺矢 $e_1,e_2,\cdots,e_q$ 所确定，考虑 L_q^0 和幺矢 $e_{q+1},\cdots,e_r$ 所确定的 r 维平面 L_r^0。一切令 L_r^0 固定的运动所构成的群 $\mathfrak{H}_{r(q)}$，作为一切令 L_q^0 固定的运动群 $\mathfrak{H}_q$ 的子群，确定于

$$\omega_{hi}=0, \quad i=q+1,\cdots,r,\ h=r+1,\cdots,n, \quad (12.25)$$

这是因为 $e_{q+1},\cdots,e_r$ 只能在 L_r^0 内变动。因此，$\mathfrak{H}_q/\mathfrak{H}_{r(q)}$ 的不变体元是 $\bigwedge\limits_{h,i}\omega_{hi}$，而这又等于绕 L_q^0 的 r 维平面的密度，故得

$$dL_{r[q]} = \bigwedge_{h,i} \omega_{hi} \quad (i = q+1, \cdots, r;\ h = r+1, \cdots, n). \quad (12.26)$$

从$\mathfrak{M}$的结构方程(12.5)可知$d(dL_{r[q]}) = 0$。所以，根据(10.3)，空间$\mathfrak{H}_q/\mathfrak{h}_{r[q]}$有不变密度(12.26)，因而可得以下结论：

E_n 里绕一个 q 维平面的r维平面$r(q<r\leqslant n-1)$有不变密度，它用(12.26)表示。

令 $q=0$，我们得到绕一个固定点的 r 维平面的密度

$$dL_{r[0]} = \bigwedge_{i,h} \omega_{hi} \quad (i = 1, 2, \cdots, r;\ h = r+1, \cdots, n), \quad (12.27)$$

这就是 Grassmann 流形 $G_{r,n-r}$ 的不变体元。我们提醒读者，Grassmann 流形 $G_{n,p}$ 是经过 R^{n+p} 的原点的 n 维平面所构成的集合，但带有适当的微分流形结构(例如参看[341a])。

在 r 维平面 $L_{r[0]}$和它们的正交余(空间)$L_{n-r[0]}$之间，有对偶关系

$$dL_{r[0]} = dL_{n-r[0]}, \quad (12.28)$$

这从(12.27)和(12.3)可以立刻看到。

含 L_q^0 在内的一切 L_r 有有限的测度。为了计算这个测度，先考虑 $q=0$ 的款。设 $L_{n-1[0]}$为经过动标$(p; e_i)$的原点 p 而垂直于 e_1 的 $n-1$ 维平面。用 $L_{r-1[0]}$ 表示 $r-1$ 维平面 $L_{r[0]}\cap L_{n-1[0]}$，则 $L_{r-1[0]}$ 在 $L_{n-1[0]}$ 的密度是

$$dL_{r-1[0]}^{(n-1)} = \bigwedge_{h,i} \omega_{hi} \quad (i = 2, \cdots, r;\ h = r+1, \cdots, n). \quad (12.29)$$

由于在 U_{n-1} 上，在 e_1 终点的体元是

$$du_{n-1} = \omega_{21} \wedge \omega_{31} \wedge \cdots \wedge \omega_{n1},$$

由(12.27)和(12.29)，得

$$dL_{r[0]} \wedge \omega_{21} \wedge \omega_{31} \wedge \cdots \wedge \omega_{r1} = dL_{r-1[0]}^{(n-1)} \wedge du_{n-1}. \quad (12.30)$$

若用 du_{r-1} 表示 $L_{r[0]}$ 里 $r-1$ 维幺球的体元，则(12.30)可以写成

$$dL_{r[0]} \wedge du_{r-1} = dL^{[n-1]}_{r-1[0]} \wedge du_{n-1}. \qquad (12.31)$$

取(12.31)两边和 du_{r-2} 的外积，就得(不计较符号)

$$\begin{aligned} dL_{r[0]} \wedge du_{r-1} \wedge du_{r-2} &= dL^{[n-1]}_{r-1[0]} \wedge du_{r-2} \wedge du_{n-1} \\ &= dL^{[n-2]}_{r-2[0]} \wedge du_{n-1} \wedge du_{n-2}. \end{aligned} \qquad (12.32)$$

接连取两边和 $du_{r-3}, \cdots, du_{r-q}$ 的外积，每次利用(12.31)，就得

$$dL_{r[0]} \wedge du_{r-1} \wedge \cdots \wedge du_{r-q} = du_{n-1} \wedge \cdots \wedge du_{n-q}. \qquad (12.33)$$

当 $q = r-1$ 时，由于 $L^{[n-r+1]}_{1[0]} = du_{n-r}$，就有

$$dL_{r[0]} \wedge du_{r-1} \wedge \cdots \wedge du_1 = du_{n-1} \wedge \cdots \wedge du_{n-r}. \qquad (12.34)$$

在幺球 $U_{n-1}, U_{n-2}, \cdots, U_1$ 的半球上取积分，并(由于我们考虑的是不定向的 $L_{r[0]}$)除以 $O_0 = 2$，我们得：

E_n 内，经过一个固定点的不定向 r 维平面的总测度(即 Grassmann 流形 $G_{r,n-r}$ 的体积)是

$$m(G_{r,n-r}) = m(G_{n-r,r})$$

$$= \int_{G_{r,n-r}} dL_{r[0]} = \frac{O_{n-1}O_{n-2}\cdots O_{n-r}}{O_{r-1}O_{r-2}\cdots O_1 O_0}, \qquad (12.35)$$

其中 O_i 是 i 维幺球的表面积(1.22)。

一切 $L_{r,q}$ 的测度，即 E_n 里含一个已给 L_q 的一切 r 维平面的测度，可以从(12.35)推得。设 $L_{n-q[0]}$ 为垂直于 L_q 的一个 $n-q$ 维平面，而令 O 为其交点。每一个 $L_{r,q}$ 可以用交集 $L_{r,q} \cap L_{n-q}$ 确定，而这是经过 O 的一个 $n-q$ 维平面。因此 E_n 里一切 $L_{r,q}$ 的测度等于 $L_{n-q[0]}$ 里一切 $L_{r-q[0]}$ 的测度。于是(12.35)给出

$$\int_{全部} dL_{r,q} = \frac{O_{n-q-1}O_{n-q-2}\cdots O_{n-r}}{O_{r-q-1}O_{r-q-2}\cdots O_1 O_0}. \qquad (12.36)$$

例1 在 E_3 里，经过一点的一切直线的测度对应于 $n=3$，$r=1$，$q=0$，因而由(12.36)可知其值为 2π。

例2 在 E_3 里，经过一条直线的一切平面的测度对应于

$n=3$，$r=2$，$q=1$，因而由(12.36)可知其值为 π。

注意我们所考虑的是不定向 r 维平面。若考虑的是定向 r 维平面，上述测度都得加倍。

5. E_n 里 r 维平面密度的另一式

公式(12.18)所表达的 dL_r 是通过 L_r 里面一点 p 和 r 个正交幺矢量来得到的。有时我们利于引进经过一点定点 O 而垂直于 L_r 的 $n-r$ 维平面内的一些元素来得到 dL_r 的表达式。为此，设 $L_{n-r[0]}$ 为经过 O 而垂直于 L_r 的 $n-r$ 维平面，p 为交点 $L_r \cap L_{n-r[0]}$。设 ρ 为距离 Op。选取正交标架 $(p; e_i)$，设 $p, e_1, \cdots, e_r$ 在 L_r 内，而 e_{r+1} 沿 Op 方向。一次式 $\omega_{r+h}=dp\cdot e_{r+h}$ 是 $L_{n-r[0]}$ 在 p 点沿 e_{r+h} 方向的弧素。于是 $\omega_{r+1}\wedge\omega_{r+2}\wedge\cdots\wedge\omega_n$ 是 $L_{n-r[0]}$ 在 p 的体元；若用 $d\sigma_{n-r}$ 表示这个体元，则

$$d\sigma_{n-r}=\omega_{r+1}\wedge\omega_{r+2}\wedge\cdots\wedge\omega_n. \tag{12.37}$$

由(12.27)和(12.28)，可知 $\bigwedge \omega_{hj}(h=r+1,\cdots,n; j=1,2,\cdots,r)$ 等于 $dL_{n-r[0]}$，因此

$$dL_r=d\sigma_{n-r}\wedge dL_{n-r[0]}. \tag{12.38}$$

例1 $n=2, r=1$。这对应于平面上的直线。这时 $L_{1[0]}$ 是经过 O 而垂直于 L_1 的直线而 $d\sigma_1$ 是 $L_{1[0]}$ 上的弧元。另一方面，$L_{1[0]}$ 是经过 O 的直线的密度，即 $dL_{1[0]}=d\phi$，其中 ϕ 是 $L_{1[0]}$ 和一个固定参考方向所作的角。用这些记号，由(12.38)就得(3.5)。

例2 $r=1$。E_n 里一条 L_1 可决定于它的方向以及它同那个经过 O 而垂直于它的超平面 $L_{n-1[0]}$ 的交点 p。密度 $dL_{n-1[0]}$ 是幺球 U_{n-1} 上在平行于 L_1 的矢量 e_1 的终点的体元，而 $d\sigma_{n-1}$ 是 $L_{n-1[0]}$ 在 p 的体元。我们有

$$dL_1=d\sigma_{n-1}\wedge du_{n-1}. \tag{12.39}$$

例3 $r=n-1$。设 ρ 为从原点 O 到超平面 L_{n-1} 的距离；则 $d\sigma_1=d\rho$。密度 $dL_{1[0]}$ 是幺球 U_{n-1} 在经过 O 而垂直于 L_{n-1} 的矢

量 e_n 终点的体元 du_{n-1}。于是有

$$dL_{n-1}=dp\wedge du_{n-1}。\tag{12.40}$$

$n=2$ 时，我们再次得到平面上直线的密度表达式(3.5)。

6. 线性空间偶

(1) 设 L_{n-1} 和 L^*_{n-1} 为 E_n 里两个超平面。设 dL_{n-2} 为交集

$$L_{n-2}=L_{n-1}\cap L^*_{n-1}$$

的密度，而 $d\phi_1, d\phi_2$ 是 L_{n-1} 和 L^*_{n-1} 绕 L_{n-2} 的密度。我们将通过 dL_{n-1} 和 $d\phi_1, d\phi_2$ 来表达 $dL_{n-1}\wedge dL^*_{n-1}$。

为此目的，我们考虑幺模正交标架$(p; e_1, \cdots, e_n)$，$(p; e_1, e_2, \cdots, e_{n-2}, e^*_{n-1}, e^*_n)$和$(p; e_1, \cdots, e_{n-2}, a, b)$，其中(a) $p; e_1, \cdots, e_{n-2}$ 确定 L_{n-2}；(b) e_{n-1} 在 L_{n-1} 内而 e_n 则是 L_{n-1} 的幺法矢；(c) e^*_{n-1} 在 L^*_{n-1} 内而 e^*_n 则是 L^*_{n-1} 的幺法矢；(d) a 与 b 为固定幺矢。由(12.18)和(12.3)，我们有

$$dL_{n-1}=\bigwedge_i (de_i\cdot e_n)\wedge(dp\cdot e_n)\quad (i=1,2,\cdots,n-1),$$

$$dL^*_{n-1}=\bigwedge_i (de_i\cdot e^*_n)\wedge(de^*_{n-1}\cdot e^*_n)\wedge(dp\cdot e^*_n)$$
$$(i=1,2,\cdots,n-2),$$

$$dL_{n-2}=\bigwedge_i (de_i\cdot a)(de_i\cdot b)\wedge(dp\cdot a)\wedge(dp\cdot b)$$
$$(i=1,2,\cdots,n-2)。\tag{12.41}$$

用 ϕ_1 和 ϕ_2 表示 L_{n-1} 和 L^*_{n-1} 绕 L_{n-2} 的角，它们等于 e_n 和 e^*_n 同 b 所作的角，则

$$e_{n-1}=\cos\phi_1 a+\sin\phi_1 b,\quad e_n=-\sin\phi_1 a+\cos\phi_1 b,$$
$$e^*_{n-1}=\cos\phi_2 a+\sin\phi_2 b,\quad e^*_n=-\sin\phi_2 a+\cos\phi_2 b,$$

因而

$$(de_i\cdot e_n)\wedge(de_i\cdot e^*_n)=\sin(\phi_2-\phi_1)(de_i\cdot a)\wedge(de_i\cdot b),$$

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{n-1}\cdot\boldsymbol{e}_n)=\mathrm{d}\phi_1,\quad (\mathrm{d}\boldsymbol{e}^*_{n-1}\cdot\boldsymbol{e}^*_n)=\mathrm{d}\phi_2,$$

$$(\mathrm{d}p\cdot\boldsymbol{e}_n)\wedge(\mathrm{d}p\cdot\boldsymbol{e}^*_n)=\sin(\phi_2-\phi_1)(\mathrm{d}p\cdot\boldsymbol{a})\wedge(\mathrm{d}p\cdot\boldsymbol{b}). \quad (12.42)$$

由(12.41)和(12.42)，就得，除一个符号外，

$$\mathrm{d}L_{n-1}\wedge\mathrm{d}L^*_{n-1}=\sin^{n-1}(\phi_2-\phi_1)\mathrm{d}\phi_2\wedge\mathrm{d}\phi_1\wedge\mathrm{d}L_{n-2}. \quad (12.43)$$

这就是我们所要得到的公式。$n=2$ 时，我们就得(4.19)。

(2) 我们可以推广(12.43)到满足 $r+s-n\geqslant 0$ 的子空间 L_r, L_s。为此，设 $L_{r+s-n}=L_r\cap L_s$，并考虑以下各组经过 $p\in L_{r+s-n}$ 的正交幺矢：

(a) $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_{r+s-n}$，它们确定 L_{r+s-n}；

(b) $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{2n-r-s}$，它们确定经过 p 而垂直于 L_{r+s-n} 的 $2n-r-s$ 维平面 L_{2n-r-s}；

(c) $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\cdots,\boldsymbol{f}_{n-s}$，它们在 L_r 内而垂直于 L_{r+s-n}；

(d) $\boldsymbol{f}'_1,\boldsymbol{f}'_2,\cdots,\boldsymbol{f}'_{n-r}$，它们与 L_r 正交而垂直于 L_{r+s-n}；

(e) $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_r$，它们在 L_s 内而垂直于 L_{r+s-n}；

(f) $\boldsymbol{g}'_1,\boldsymbol{g}'_2,\cdots,\boldsymbol{g}'_r$，它们与 L_s 正交而垂直于 L_{r+s-n}。

令

$$\boldsymbol{f}_i=\sum_{j=1}^{2n-r-s}a_{ij}\boldsymbol{b}_j,\quad \boldsymbol{f}'_h=\sum_{j=1}^{2n-r-s}a'_{hj}\boldsymbol{b}_j,$$

$$\boldsymbol{g}_h=\sum_{j=1}^{2n-r-s}\beta_{hj}\boldsymbol{b}_j,\quad \boldsymbol{g}'_i=\sum_{j=1}^{2n-r-s}\beta'_{ij}\boldsymbol{b}_j, \quad (12.44)$$

其中下标的范围是

$$i=1,2,\cdots,n-s;\ h=1,2,\cdots,n-r;\ j=1,2,\cdots,2n-r-s. \quad (12.45)$$

根据(12.18)和(12.3)我们有

$$\mathrm{d}L_{r+s-n}=\bigwedge_j(\mathrm{d}p\cdot\boldsymbol{b}_j)\bigwedge_{m,j}(\mathrm{d}\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{b}_j),\quad m=1,2,\cdots,r+s-n,$$

$$\mathrm{d}L_{r[r+s-n]}=\bigwedge_{i,h}(\mathrm{d}\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{f}'_h),\quad \mathrm{d}L_{s[r+s-n]}=\bigwedge_{h,i}(\mathrm{d}\boldsymbol{g}_h\cdot\boldsymbol{g}'_i),$$

$$\mathrm{d}L_r=\bigwedge_h(\mathrm{d}p\cdot\boldsymbol{f}'_h)\bigwedge_{m,h}(\mathrm{d}\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{f}'_h)\bigwedge_{i,h}(\mathrm{d}\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{f}'_h),$$

$$\mathrm{d}L_s = \bigwedge_i (\mathrm{d}p \cdot g_i') \bigwedge_{m,i} (\mathrm{d}e_m \cdot g_h') \bigwedge_{h,i} (\mathrm{d}g_h \cdot g_i').$$

把(12.44)代入以上各式，并引进行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1' \cdot b_1 & f_1' \cdot b_2 & \cdots & f_1' \cdot b_{2n-r-s} \\ f_2' \cdot b_1 & f_2' \cdot b_2 & \cdots & f_2' \cdot b_{2n-r-s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-r}' \cdot b_1 & f_{n-r}' \cdot b_2 & \cdots & f_n' \cdot b_{2n-r-s} \\ g_1' \cdot b_1 & g_1' \cdot b_2 & \cdots & g_1' \cdot b_{2n-r-s} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{n-s}' \cdot b_1 & g_{n-s}' \cdot b_2 & \cdots & g_{n-s}' \cdot b_{2n-r-s} \end{vmatrix} \tag{12.46}$$

就不难获得所求公式

$$\mathrm{d}L_r \wedge \mathrm{d}L_s = \Delta^{r+s-n+1} \mathrm{d}L_{r[r+s-n]} \wedge \mathrm{d}L_{s[r+s-n]} \wedge \mathrm{d}L_{r+s-n}. \tag{12.47}$$

(3) 最后，考虑线性空间偶$(L_r, L_{i+1}^{(r)})$中，$L_{i+1}^{(r)} \subset L_r (i+1<r)$[①]那部分的集合。选择动标$(p; e_1, e_2, \cdots, e_n)$，使$p.e_1, \cdots, e_{i+1}$属于$L_{i+1}^{(r)}$而$p, e_1, \cdots, e_r$属于$L_r$。根据(12.18)，在$L_r$里，$i+1$维平面$L_{i+1}^{(r)}$的密度是

$$\mathrm{d}L_{i+1}^{(r)} = \bigwedge_{j,\beta} \omega_{j\beta} \bigwedge_{\alpha} \omega_\alpha, \tag{12.48}$$

其中

$$j = 1, 2, \cdots, i+1; \quad \alpha, \beta = i+2, \cdots, r. \tag{12.49}$$

另一方面，根据(12.26)，绕$L_{i+1}^{(r)}$的L_r的密度是

$$\mathrm{d}L_{r[i+1]} = \bigwedge_{h,\alpha} \omega_{h\alpha}, \quad h = r+1, \cdots, n, \alpha = i+2, \cdots, r. \tag{12.50}$$

此外，由(12.18)可得

$$\mathrm{d}L_{i+1} = \bigwedge_{j,m} \omega_{jm} \bigwedge_h \omega_h, \quad m, h = i+2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, i+1. \tag{12.51}$$

① 原书作$i+1 \leqslant r$。——译者

由以上结果可得

$$\mathrm{d}L_{r+1}^{(r)} \wedge \mathrm{d}L_r^* = \mathrm{d}L_{r[i+1]} \wedge \mathrm{d}L_{i+1}, \qquad (12.52)$$

其中左边的 r 维平面 L_r 是有向的，因为每一个含 $L_{i+1}^{(r)}$ 在内的不定向 L_r 确定两个不同向而含 $L_{i+1}^{(r)}$ 在内的 $L_{r[i+1]}$。

若只考虑经过 E_n 的一个固定点的线性空间，(12.52)仍然成立，这时它可以写成

$$\mathrm{d}L_{i+1[0]}^{(r)} \wedge \mathrm{d}L_{r\,0}^* = \mathrm{d}L_{r[i+1]} \wedge \mathrm{d}L_{i+1[0]}. \qquad (12.53)$$

Petkantsin[471]获得了像(12.52)和(12.53)那样性质的公式以及更一般的公式。

例　令 $n=3, r=2, i=0$。设 $\mathrm{d}G$ 为 E_3 中直线密度，$\mathrm{d}E$ 为平面密度，$\mathrm{d}E(G)$ 为平面绕 G 的密度，而 $\mathrm{d}G(E)$ 为 E 上的直线密度，则(12.52)化为

$$\mathrm{d}G(E) \wedge \mathrm{d}E^* = \mathrm{d}E(G) \wedge \mathrm{d}G. \qquad (12.54)$$

7. 注记

(1) Stiefel 流形．考虑 E_{r+n} 里经过原点 O 的一切幺模正交标架$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r)$所构成的集合．这个集合可以按一种自然的方式形成一个流形，称为 Stiefel 流形 $S_{r,n}$。若以矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 对于一个固定的幺模正交标架的分量为矩阵的列，就得一个$(n+r)\times r$ 矩阵 A，而 $A^t A = e$($r\times r$ 幺方阵)．这样的矩阵A的集合就是 Stiefel 流形．例如 $S_{r,0}$ 是正交 $r\times r$ 方阵的集合，可以和正交群 $O(r)$等同．一般地，$S_{r,n}$ 可以和齐性空间 $O(r+n)/O(n)$等同．r 维标架集合在绕O的转动群下的不变密度可以按以下方法求得．设$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$为幺模正交标架，它和$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r)$一起构成 E_{r+n} 的一个幺模正交标架．确定 r 维标架$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r)$ 的 Pfaff 系(10.1)是

$$\omega_{ih} = \boldsymbol{e}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{e}_h, \quad \phi_{ah} = \varepsilon_a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{e}_h = 0 \quad (1 \leqslant i, h \leqslant r; \ 1 \leqslant a \leqslant n).$$

因此，Stiefel 流形的体元是

$$dS_{r,n} = \bigwedge_{i<k} \omega_{ih} \bigwedge_{a,k} \phi_{ak} \quad (1 \leqslant i, h, k \leqslant r; \ 1 \leqslant a \leqslant n). \quad (12.55)$$

仿照第 1 节中关于正交群所采用的推理，可以证明，(12.55)可以写作

$$dS_{r,n} = du_{r+n-1} \wedge \cdots \wedge du_n,$$

因而 Stiefel 的总体积是

$$m(S_{r,n}) = \int_{S_{r,n}} dS_{r,n} = O_{r+n-1} O_{r+n-2} \cdots O_n. \quad (12.56)$$

特殊地，$n = 0$ 时，得 $O(r)$的体积 $= M_{r-1}$。

(2) **一些微分公式**。(a) 设 $L_{r[0]}$ 和 $L_{s[0]}$ 为 $\boldsymbol{E}_n$ 中经过O的两个正交的子空间。假定 $r + s \geqslant n$。可以证明

$$dL_{r[0]} \wedge dL_{s[n-r]} = dL_{s[0]} \wedge dL_{r[n-s]}, \quad (12.57)$$

其中 $dL_{s[n-r]}$ 表示 L_s 绕垂直于 L_r 的$(n-r)$维平面的密度，$dL_{r[n-s]}$的意义与此类似。

(b) 设 L^0_{n-p} 为固定$(n-p)$维平面。设 $L_i^{(0)}$ 为一个已给的L_i在 L^0_{n-p} 上的正投影(假定 $i < n-p$)，而令 L_{i+p} 为含 L_i 和 L_i^0 在内而垂直于 L^0_{n-p} 的$(i+p)$维平面，则可以证明

$$dL_i(E_n) = dL_i^0(L^0_{n-p}) \wedge dL_i(L_{i+p}), \quad (12.58)$$

其中 $dL_k(L)$表示 L_k 在 L 里的密度。

(c) 设 L_r 和 L_s 为 E_n 中两个线性子空间，$r + s \geqslant n$。若 $L_{r+s-n} = L_r \cap L_s$，取一个垂直于 L_{r+s-n} 的 $(2n-r-s)$ 维平面 L_{2n-r-s}，并设O为交点 $L_{2n-r-s} \cap L_{r+s-n}$，令 $L^*_{n-s} = L_{2n-r-s} \cap L_r$，$L^*_{n-r} = L_{2n-r-s} \cap L_s$，并考虑 $L_{2n-r-s-1}$ 里以O为中心的幺球 $U_{2n-r-s-1}$。交集 $U_{2n-r-s-1} \cap L^*_{n-s}$ 和 $U_{2n-r-s-1} \cap L^*_{n-r}$ 是 U_{2n-r-s} 的大球。考虑和 U^*_{n-s-1}，U^*_{n-r-1} 都垂直相交的大圆，并令 $\theta_1, \theta_2, \cdots$为各交点之间的球面距离。这些距离 $\theta_1, \theta_2, \cdots$称为 L_r 和 L_s 之间的角。

现在考虑一个固定的 L_s，用 L^0_s 表示，以及一个变动的 L_r。

我们要通过作为 L_s^0 里一个 $(r+s-n)$ 维平面的 $L_{r+s-n}=L_r\cap L_s^*$ 的密度 $dL_{r+s-n}^{(s)}$ 和 L_r 绕 L_{r+s-n} 的密度 $dL_{r[r+s-n]}$ 来表达密度 dL_r。其结果是

$$dL_r=(\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots)^{r+s-n+1}dL_{r+s-n}^{(s)}\wedge dL_{r[r+s-n]}. \quad (12.59)$$

例1 $r=s=1, n=2$。这时(12.59)和(3.7)一致。

例2 $r=1, s=2, n=3$。这时

$$dL_1=\sin\theta\, dP\wedge du_2, \quad (12.60)$$

其中 $dP=dL_0^{(2)}$ 是平面 L_2^0 在交点 $P=L_1\cap L_2^0$ 的面素 du_2 是直线绕 P 的密度，而 θ 是 L_1 和 L_2^0 之间的角。

(3) 通过共生的截痕来表示的体积。设 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 为 E_n 的点，$T(P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, O)$ 为以 $P_1, \cdots, P_{n-1}, O$ 为顶点的单纯形的体积(O是一个作为坐标原点的固定点)。由(12.22)，易得

$$\begin{aligned}&dP_1(E_n)\wedge dP_2(E_n)\wedge\cdots\wedge dP_{n-1}(E_n)\\&\quad=(n-1)!\,T(P_1,\cdots,P_{n-1},O)dP_1(L_{n-1})\\&\qquad\wedge\cdots\wedge dP_{n-1}(L_{n-1})\wedge du_{n-1},\end{aligned} \quad (12.61)$$

其中 L_{n-1} 表示 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, O$ 所确定的 $(n-1)$ 维平面，而 $du_{n-1}=dL_{n-1}$ 表示 $n-1$ 维幺球面 U_{n-1} 上在 L_{n-1} 的幺法矢终点的面积元素。

若 $K_i\ (i=1,2,\cdots,n-1)$ 为 $E_n(n\geqslant 3)$ 里的凸体，而 $K_i(L_{n-1})=K_i^*$ 表示截痕 $K_i\cap L_{n-1}$，则在一切 $P_i\in K_i$ 范围内积分，得

$$\begin{aligned}&V_1V_2\cdots V_{n-1}\\&\quad=\frac{(n-1)!}{2}\int_{U_{n-1}}\left(\int_{K_1^*}\cdots\int_{K_{n-1}^*}T(P_1,\cdots,P_{n-1},O)dP_1(L_{n-1})\right.\\&\qquad\left.\wedge\cdots\wedge dP_{n-1}(L_{n-1})\right)du_{n-1},\end{aligned} \quad (12.62)$$

其中V_i是K_i的体积，而因子$\frac{1}{2}$的出现则是因为在U_{n-1}上取积分时，每一个$K_i(L_{n+1})$计入两次。

若用以O为中心的幺球S_n代替集合$K_{n-h+1},\cdots,K_{n-1}$，则经过一些运算，可由(12.62)获得用体积$T(P_1,\cdots,P_{n-1},O)$表达的关于$V_1V_2\cdots V_{n-h}$的若干公式。例如$h=n-1$时，由(12.62)可得人们已知的公式

$$V_1=\frac{1}{n}\int_{U_{n-1}} r^n \mathrm{d}u_{n-1}, \tag{12.63}$$

其中r是从O沿u_{n-1}方向到∂K_1上的点的距离。计算过程在Busemann [75] 中可以看到。若$V_i^*=V_i(L_{n-1})$表示截痕K_i^*的$(n-1)$维体积，Busemann还证明了不等式

$$V_1V_2\cdots V_{n-1}\geqslant\frac{1}{2}\frac{\kappa_n^{n-1}}{\kappa_{n-1}^n}\int_{U_{n-1}}(V_1^*V_2^*\cdots V_{n-1}^*)^{n/(n-1)}\mathrm{d}u_{n-1}, \tag{12.64}$$

其中κ_i表示i维幺球的体积(1.22)，而只有当K_i是以O_i为中心的同位相似椭球时，等式才成立。特殊地，$n\geqslant3$时，对于凸体K，我们有

$$V^{n-1}\geqslant\frac{1}{n}\frac{\kappa_n^{n-1}}{\kappa_{n-1}^n}\int_{U_{n-1}}(V^*)^n\mathrm{d}u_{n-1}, \tag{12.65}$$

而若$V>0$，其中等式只对于以O为中心的椭球成立。

Petty [473]给出了这些结果以及其他同类关系的解释。

(4) **E_n里的平均密度。** 设有限的质量按函数$\phi(P)$分布于整个E_n，这就是说，$\phi(P)$是E_n中一个可测的非负实函数，它在E_n里每个有界集上是有界的($n\geqslant2$)。ϕ的平均密度$\delta(\phi)$的定义(假定极限存在)是

$$\delta(\phi)=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{S_R}\phi(P)\mathrm{d}P\right)\kappa_n^{-1}(R),$$

其中 $\kappa_n(R)$ 表示半径为 R 的 n 维球体 S_R 的体积。设 $H=L_{n-1}$ 是经过 O 的一个超平面，而 ϕ_H 是把 ϕ 限制于 H 所得的函数。若对于每一个经过 O 的 H，$\delta(\phi_H)$ 存在，则 $\delta(\phi)\geqslant\inf\delta(\phi_H)$，而若 $\delta(\phi)$ 又是有界的，则 $\delta(\phi)\leqslant\sup\delta(\phi_H)$，在这里 inf 和 sup 都是对于经过 O 的超平面集合说的。这是 Groemer [241]的结果。考虑用经过 O 的 r 维平面来代替超平面并对新情况作出分析。

(5) E_3 里的平面密度和直线密度。我们要给出 E_3 里的平面密度和直线密度的各种表达式，它们都容易从一般公式(12.18)和(12.38)通过对其中微分齐式的变数变换得到。为简便起见，我们用 E 表示平面，用 G 表示直线来代替前面所用的一般记号 L_2 和 L_1。

根据(12.40)，平面密度是 $dE=dp\wedge du_2$，其中 p 是从原点到 E 的距离而 $du_2=\sin\theta\, d\phi\wedge d\theta$ 是幺球面 U_2 上，在 E 的幺法矢终点的面元(θ,ϕ 是 U_2 上的极坐标)。

(a) 若 E 用方程 $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ 确定，则

$\alpha=p^{-1}\cos\phi\sin\theta,\quad \beta=p^{-1}\sin\phi\sin\theta,\quad \gamma=p^{-1}\cos\theta,$

而

$$d\alpha\wedge d\beta\wedge d\gamma=p^{-4}\sin\theta\, dp\wedge d\phi\wedge d\theta,$$

故平面密度化为

$$dE=\frac{d\alpha\wedge d\beta\wedge d\gamma}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}. \tag{12.66}$$

(b) 若 a,b,c 为平面在一个直角坐标系的坐标轴上的截距，则 $a=1/\alpha, b=1/\beta, c=1/\gamma$，因而

$$dE=\frac{a^2b^2c^2da\wedge db\wedge dc}{(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)^2}. \tag{12.67}$$

(c) 设 E_0 为 E_3 里固定平面。一个平面可以用直线 $G=E\cap E_0$ 和 E,E_0 之间的角 ψ 来确定。故

$$dE=\sin^2\psi\, dG(E_0)\wedge d\psi, \tag{12.68}$$

其中 $dG(E_0)$ 表示 E_0 上的直线密度。这个公式曾用来解决定下面

关于平面的课题：从空间平面在一个或几个固定平面上的截痕的角分布来得到空间平面的角分布(见[435])。

根据(12.39)，直线G的密度是 $dG=d\sigma_2\wedge du_2$，其中 $d\sigma_2$ 是在一个垂直于G的平面上，在交点的面元，而 du_2 是 U_2 上，在平行于G的幺矢的终点的面元。

(a) 若G用它的方向和它同一个固定平面的交点(x,y)确定，设γ表示G同固定平面法线之间的角，则

$$dG=|\cos\gamma|dx\wedge dy\wedge d\gamma. \qquad (12.69)$$

(b) 若 ν_1,ν_2,ν_3 为G的方向余弦，则 $du_2=(d\nu_1\wedge d\nu_2)/\nu_3$，$\nu_3=\cos\gamma$，于是(12.69)可以写成

$$dG=d\nu_1\wedge d\nu_2\wedge dx\wedge dy. \qquad (12.70)$$

(c) 若在一个直角坐标系里，G用方程 $x=az+m,y=bz+q$ 确定，则它的方向余弦是

$$\nu_1=a(1+a^2+b^2)^{-1/2},\quad \nu_2=b(1+a^2+b^2)^{-1/2},$$
$$\nu_3=(1+a^2+b^2)^{-1/2},$$

它和(x,y)平面的交点是 $x=m,y=q$，于是(12.70)化为

$$dG=(1+a^2+b^2)^{-2}da\wedge db\wedge dm\wedge dq. \qquad (12.71)$$

一个双参数平面族的直线(叫做线汇)有两个不变密度。第一个是直线的球面象的面元。第二个密度更重要，它可以写作

$$dG^*=-\sin\alpha_1 dx\wedge d\alpha_1-\sin\alpha_2 dy\wedge d\alpha_2, \qquad (12.72)$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是在一个直角坐标系(x,y,z)里G和坐标轴所作的角，x,y 是G同(x,y)平面的交点坐标。这个密度是 E.Cartan [85]引进的。参看 Vidal Abascal [695]和 Pohl [481]。Sulanke [663]详细研究了 E_3 里这种线汇的积分几何。关于到 E_n 的推广，参看 Stanilov 与 Sulanke [623]。Blaschke [51]和 Varga[685]给出了平面密度与直线密度之间的关系。关于对矿物学的应用，见[54—56]。

(6) 在一个 n 维球内的距离分布。在一个半径等于R的 n 维球体内，两个随机点 P,Q 点的距离 r 的概率分布曾为 Deltheil

[143]，Hammesley [288]，Lord [369]和 Miles [420]所讨论，还可以参看 [335]。若 $f_n(x)dx$ 表示距离 r 的值在 x 和 $x+dx$ 之间的概率，再令 $r=2R\lambda$，可以证明

$$f_n(\lambda)=2^n n\lambda^{n-1}I_{1-\lambda^2}[(n+1)/2,1/2], \qquad (12.73)$$

其中 $I_x(p,q)$是完全 β 函数，其定义是

$$I_x(p,q)=\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$

$n=1,2,3$ 时，有

$$f_1(\lambda)=2(1-\lambda),$$

$$f_2(\lambda)=16\lambda\pi^{-1}[\arccos\lambda-\lambda(1-\lambda^2)^{1/2}],$$

$$f_3(\lambda)=12\lambda^2(1-\lambda^2)(2+\lambda),$$

它们依次是关于线段、图片以及三维球体的。

由(12.73)可得 r 的第 k 矩

$$\mu_k(n)=\left(\frac{n}{n+k}\right)^2\frac{\Gamma(n+k+1)\Gamma(n/2)}{\Gamma(n+1+k/2)\Gamma((n+k)/2)}R^k. \qquad (12.74)$$

特殊地，在一个半径为R的 n维球体内的第一矩，即距离 PQ 的中值，化为

$$\mu_1(n)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n/2)}{\Gamma(n+3/2)\Gamma((n+1)/2)}R.$$

当 n 变得很大时，可以证明，上述分布趋于正态分布，其中值是$\sqrt{2}R$，方差是$(2n)^{-1}R^2$。由此可见，当 n变得很大时，距离PQ几乎总等于$\sqrt{2}R$，即两个正交半径端点的距离。

Miles[420]给出了一个更一般的结果。设 $P_1,P_2,\cdots,P_i$ 为 n 维幺球体内的独立随机点，而 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_j$ 为它的$(n-1)$维球面上的独立随机点。考虑 $2\leqslant i+j\leqslant n+1$ 的款；这时，上述 $i+j$ 点的凸包几乎必是以这些点为顶点的 r 维单纯形$(r=i+j-1)$。这样，这个随机 r 维单纯形的 r 维体积T 的矩是

$$E(T^k)=\frac{1}{\kappa_n^i O_{n-1}^j}\int T^k dP_1\wedge\cdots\wedge dP_i\wedge dQ_1\wedge\cdots\wedge dQ_j$$

$$=\left(\frac{1}{r!}\right)^{k}\left(\frac{n}{n+k}\right)^{i}\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(r+1)(n+k)-j+i\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(rn+n+rk)-j+1\right]}$$

$$\times\left\{\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n+k)/2]}\right\}^{r}\prod_{h=1}^{r-1}\frac{\Gamma[(n-r+k+h)/2]}{\Gamma[(n-r+h)/2]},\quad(12.75)$$

其中 $dP_1,\cdots,dP_i$ 表示 E_n 中的体元而 $dQ_1,\cdots,dQ_j$ 表示 $n-1$ 维幺球面上的体元；K_n 和 O_{n-1} 的值见(1.22)。

(7) **随机撮**。在 E_3 内考虑满足以下条件的点分布：一个体积 V 含有恰好 δ 个点的概率是 $p_s(\lambda,V)=e^{-\lambda V}(\lambda V)^s/s!$（具有强度 λ 的 Poisson 过程）。若两个点之间的距离在 $2R$ 之内，它们就**称为互相联络的**。一个大小为 n 的撮是指具有如下性质的 n 点的集合：每一点和集中至少另一点相联络，而没有一个点和不属于集合的一点相联络。虽然一个撮中的点的数目的分布和撮大小的期望值决定于两个参数 λ 与 R，但因次分析表明，它们是一个复合参数 $t=\lambda R^3$ 的函数。设 $p_n(t)$ 为撮大小的概率分布而 $E(t)$ 为撮大小的期望值。Roberts 与 Storey [515] 考虑了寻求使得 $E(t)$ 变成无穷大的临界值 $t=t_c$ 的问题，以及寻求使无穷团集出现的 $t>t_c$。他们给出下界 $t_c\geqslant0.0434$ 以及 Monte Carlo 估值 $t_c=0.0889$。Holcomb, Iwarawa 与 Roberts[310] 值计 $t_c=0.070$，而 Domb [149] 经过级数展开，提出的值是 $t_c=0.081$。

Tate [668] 也考虑了 E_3 里的随机点的撮。设 B 为一个正圆柱形，长度为 T，截面积为 A，而选择了单位长，使 $T\geqslant1$，$A\geqslant1$。设 Z,Z' 为幺柱形，即具有单位长和单位截面积的正圆柱形，其轴和 B 的轴平行。设 $\psi_n(\lambda,A,T)$ 为任何幺柱面都不含 n 个或更多个点的概率。落在一个幺柱面里的 k 个点称为构成一个 k 次集。这样，不存在 n 次或更高次集的概率是

$$\psi_n(\lambda,A,T)=\sum_{s=0}e^{-\lambda V}\frac{(\lambda V)^s}{s!}f_n(s,A,T),$$

其中 $V = AT$，而 $f_n(s, A, T)$ 是当 V 含有恰好 s 个位置随机的点时，不存在 n 次或更高次集的概率。只有 $A = 1, n = 2$ 时，$f_n(s, A, T)$ 容易确定，结果是 $f_2(s, 1, T) = (1-(s-1)/T)^s$。一般地，$f_n(s, 1, T)$ 是以 T^{-1} 为变数的 s 次多项式。当 $n > 2$ 时，$\psi_n(s, A, T)$ 的解析推算不能进行，Tate[668]报导了利用 Monte Carlo 方法所获得的一些结果。

第三篇

E_n里的积分几何

第十三章　E_n 里的凸集

1.　凸集与截痕测度积分

E_n 的一个点集，若含有属于它的任意两点所确定的整个线段，则称为**凸集**．我们将始终只考虑有界闭凸集．具有非空内部的凸集叫做**凸体**．一个凸体的边界 ∂K 叫做**凸[曲]面**．

可以证明凸面的以下性质：(a) 一个凸面几乎处处可微，即几乎处处有切面[74，第13页]．(b) 任意凸面可以用解析凸面叙列来逼近，也可以用凸多面形叙列来逼近[63，第 36 页；195]．

一个凸集 K 的一个撑超平面(或者凸面 ∂K 的一个撑超平面)是含有 K 的点但不把 K 任何两点隔离的超平面．若 K 有内点，则撑超平面是含有 ∂K 的点但不含有 K 的内点的超平面．经过凸集的每一个边界点至少有一个撑超平面．若经过一个边界点只有一个撑超平面，则该点叫做**正则点**．

设 K 为凸集，O 为 E_n 里一个固定点．考虑一切经过 O 的 $(n-r)$ 维平面 $L_{n-r[0]}$，并令 K'_{n-r} 为 K 在 $L_{n-r[0]}$ 中的正交投影．这就是说，若经过 K 的每一点作 r 维平面垂直于 $L_{n-r[0]}$，则这些 r 维平面和 $L_{n-r[0]}$ 的一切交点所构成的凸集就是 K'_{n-r}．我们给出这些投影集合的体积 $V(K'_{n-r})$ 中值的定义．

方程(12.27)给出绕固定点 O 的 $n-r$ 维平面的密度 $dL_{n-r[0]}$，即 Grassmann 流形 $G_{n-r,r}$ 的不变体元．于是投影体积 $V(K'_{n-r})$ 的中值是

$$E(V(K'_{n-r}))=\frac{I_r(K)}{m(G_{n-r,r})}=\frac{O_{r-1}\cdots O_1O_0}{O_{n-1}\cdots O_{n-r}}I_r(K),\qquad(13.1)$$

其中 $m(G_{n-r,r})$ 表示(12.35)所给出的 Grassmann 流形 $G_{n-r,r}$ 的体积，而

$$I_r(K) = \int_{G_{n-r,r}} V(K'_{n-r})\,dL_{n-r[0]}$$

$$= \int_{G_{r,n-r}} V(K'_{n-r})\,dL_{r[0]} \qquad (13.2)$$

是凸集 K 的一项重要特征，我们将对它进行考察。方程(13.2)给出了 $r=1,2,\cdots,n-1$ 时 $I_r(K)$ 的定义。为完备起见，我们令

$$I_0(K) = V(K) = K \text{ 的体积。} \qquad (13.3)$$

当 $r=n-1, i+1=r$ 时，公式(12.53)化为

$$dL^{n-1}_{r[0]} \wedge dL^{*}_{n-r[0]} = dL_{n-1[0]} \wedge dL_{r[0]}, \qquad (13.4)$$

而若令 $n \to n-1, i+1 \to r-1$，则上述公式(12.53)化为

$$dL_{r-1[0]} \wedge dL^{*n-1}_{r\;0} = dL^{n-1}_{r[r-1]} \wedge dL^{n-1}_{r-1[0]}. \qquad (13.5)$$

以 $L^r_{r-1[0]}$ 乘(13.4)两边，并利用(13.5)，就得(不计较符号，注意一个有向平面等价于两个无向平面)

$$dL_{n-1[0]} \wedge dL^{n-1}_{r-1[0]} \wedge dL^{n-1}_{r[r-1]}$$

$$= dL_{r[0]} \wedge dL^r_{r-1[0]} \wedge dL_{n-1[r]}. \qquad (13.6)$$

现在我们以 $V(K'_{n-r})$ 乘两边，并对一切线性空间偶 $L_{r[0]}$，$L^r_{r-1[0]}$ 积分。由于 K'_{n-r} 也是凸集 K'_{n-1}(这是 K 在 $L_{n-1[0]}$ 上的正交投影)在 $L_{n-r[0]}$ 上的正交投影，而 $dL_{n-1[0]} = du_{n-1}$ 是幺球面 U_{n-1} 的面元，在左边，我们得

$$\frac{1}{2}O_{n-r-1}\int I'_{r-1}(K'_{n-1})\,du_{n-1},$$

在这里，我们用到了一切 $L^{n-1}_{r[r-1]}$ 的测度是 $\frac{1}{2}O_{n-r-1}$ 的事实，而 $I'_{r-1}(K'_{n-1})$ 则是把 K'_{n-1} 看作 $L_{n-1[0]}$ 里的凸集时的对应积分(13.2)。在右边，我们得 $I_r(K)$ 乘以一切 $L^r_{r-1[0]}$ 的测度 $\left(\text{等于}\frac{1}{2}O_{r-1}\right)$ 和一切 $L_{n-1[r]}$ 的测度 $\left(\text{等于}\frac{1}{2}O_{n-r-1}\right)$。于是就得到递推公式

$$I_r(K)=\frac{2}{O_{r-1}}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}} I'_{r-1}(K'_{n-1})\,du_{n-1}. \tag{13.7}$$

注意幺半球$\frac{1}{2}U_{n-1}$恰恰就是$G_{1,n-1}$，即经过原点O的一切无向直线所构成的流形。

(13.2)给出积分$I_r(K)$同投影体积$V(K'_{n-r})$的期望值的关系；我们常常引用所谓的截[痕]测[度]积分①(quermassintegrale)，或者平均截痕测度②来代替$I_r(K)$，它们是Minkowski引进的，其定义为

$$W_r(K)=\frac{(n-r)O_{n-1}}{nO_{n-r-1}}E(V(K'_{n-r}))$$

$$=\frac{(n-r)O_{r-1}\cdots O_0}{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}I_r(K). \tag{13.8}$$

这样，(13.7)就化为

$$W_r(K)=\frac{2(n-1)}{nO_{n-2}}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}} W'_{r-1}(K'_{n-1})\,du_{n-1}, \tag{13.9}$$

它称为Kubota公式([348]；还可以参考Bonnesen与Fenchel[63，第49页]，和Hadwiger[274，第209页])。为完备起见，我们令

$$W_0(K)=I_0(K)=V(K),\quad W_n(K)=O_{n-1}/n, \tag{13.10}$$

其中最后一式可从(13.8)得到，为此，只须假定W_n是只依赖于n的常数。

值得指出，由(13.8)可知，K的平均宽度是

$$E(V(K'_1))=(2n/O_{n-1})W_{n-1}(K). \tag{13.11}$$

容易证明，截测积分是在凸集所构成的空间上的连续泛函([274，第211页]；还可以参看[243])。关于它们到任意可测点集的推广，见[460，461]。

① Quemassintegrale.——译者

② Mean cross-sectional measures.——译者

2. Cauchy 公式

先假定K是一个凸多面形区域。设f_i是∂K的一个面的面积，而f'_i是它在$L_{n-1[0]}$上的正交投影面积。则$f'_i = |\cos\theta_i| f_i$，其中$\theta_i$是$L_{n-1[0]}$的法方向$u_{n-1}$和$\partial K$的向外法线之间的角。由于这些投影面积的总和等于$K$的投影面积$V(K'_{n-1})$的两倍，我们有

$$2V(K'_{n-1}) = \sum_1^m |\cos\theta_i| f_i, \qquad (13.12)$$

其中m是∂K的面的个数。

乘以du_{n-1}，并在幺半球上取积分，得

$$2\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}} V(K'_{n-1})\,d u_{n-1} = \frac{O_{n-1}}{n-1}F, \qquad (13.13)$$

其中F表示∂K的$n-1$维面积。在这里，我们应用了这样的事实：在$\frac{1}{2}U_{n-1}$上，$\int|\cos\theta_i|du_{n-1}$等于$\frac{1}{2}U_{n-1}$在一个直径超平面上的投影，即$n-1$维幺球体积$\kappa_{n-1}=O_{n-2}/(n-1)$的体积。

方程(13.13)可以写成

$$F = \frac{2(n-1)}{O_{n-2}}\int_{\frac{1}{2}U_{n-1}} V(K'_{n-1})du_{n-1} = nW_1, \qquad (13.14)$$

这叫做关于凸多面形的 Cauchy 公式。由于任意凸集都可以作为凸多面形叙列的极限，这公式适用于任意凸集[93,63,274]。关于这公式到n维幺球面的子集的推广，见[188]。

$n=3$的款。$n=3$时，若F_u表示K在一个垂直于u_2的平面上的正交投影面积，Cauchy 公式可以写成

$$F = \frac{1}{\pi}\int F_u du_2, \qquad (13.15)$$

其中F是∂K的面积。F_u的期望值是

$$E(F_*) = F/4. \tag{13.16}$$

这个公式提供一种度量一个小凸体的面积的实际方法。若 E_{12} 和 E_{20} 依次表示 K 在一个十二面体和一个二十面体的面的平均投影面积，Moran 证明了

$$0.2294 \leqslant E_{12} \leqslant 0.2696, \quad 0.2390 \leqslant E_{20} \leqslant 0.2618.$$

也可以证明关于曲线的一个类似结果。若 Γ 是长度为 L 的曲线，则在一个平面上的投影长的期望值是 $E(L_*) = (\pi/4)L$，而曲线在一个十二面体或一个二十面体的面的平均投影长就给出 L 的近似值。若这两个平均投影长是 L_{12} 和 L_{20}，则有

$$0.229 \leqslant L_{12}/\pi L \leqslant 0.269, \quad 0.244 \leqslant L_{20}/\pi L \leqslant 0.252.$$

概率密度函数 $f(F_*)$（这个函数的意义是：$f(F_*)$ 在由 a 到 b 的节 $[a,b]$ 内的积分给出 F_* 在该节内的概率）的表达式一般是复杂的，它和 K 的形状有关。但在若干特款，它是可以推算到的。例如，设 K 为正圆柱形，其高是 h，半径是 r。若一个平面的法线和圆柱形的轴作 θ 角，则 K 在这个平面上的正交投影面积是（图13.1）

$$F_\theta = \pi r^2 \cos\theta + 2rh\sin\theta. \tag{13.17}$$

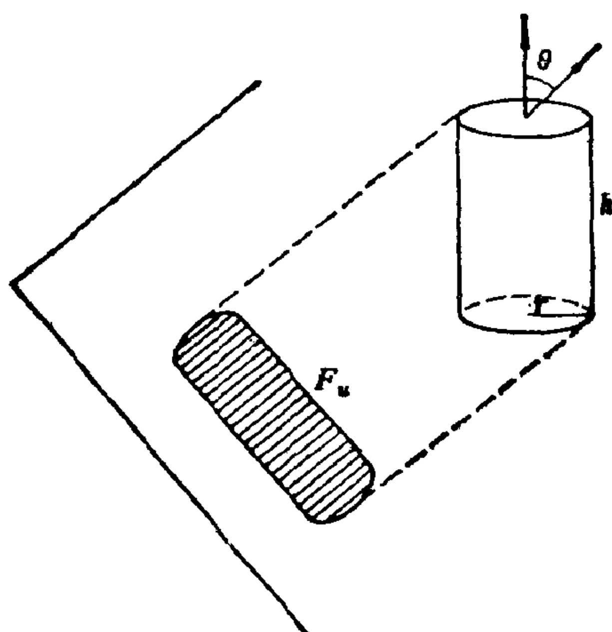


图 13.1

最大投影面积对应于 $\theta=\arctan(2h/\pi r)$。其值是 $F_M=r(\pi^2r^2+4h^2)^{1/2}$。所得分布函数是：$\min(\pi r^2, 2rh)<F_u<\max(\pi r^2, 2rh)$ 时，

$$f(F_u)=\frac{1}{F_M^2}\left[\frac{2rhF_u}{(F_M^2-F_u^2)^{1/2}}\pm\pi r^2\right], \tag{13.18}$$

而 $\max(\pi r^2, 2rh)<F_u<F_M$ 时，

$$f(F_u)=\frac{1}{F_M^2}\,\frac{4\pi hF_u}{(F_M^2-F_u^2)^{3/2}}. \tag{13.19}$$

在(13.18)里：当 $\pi r^2>2rh$ 时，用正号；而当 $\pi r^2<2rh$ 时，用负号。例如，$\pi r^2<2rh$ 时，我们有

$$\int_{\pi r^3}^{F_M} f(F_u)\mathrm{d}F_u=1,$$

$$E(F_u)=\int_{\pi r^2}^{F_M} F_u f(F_u)\,\mathrm{d}F_u=\frac{\pi r^2}{2}+\frac{\pi rh}{2}, \tag{13.20}$$

这和上面的结果是吻合的。第二矩是

$$\int_{\pi r^2}^{F_M} F_u^2 f(F_u)\mathrm{d}\,F_u=\frac{4rh}{3}(2rh+\pi r^2)+\frac{\pi^2r^4}{3}. \tag{13.21}$$

这些公式，还有关于正平行六面体的类似公式，是 A.G. Walters[707]的结果。

3. 平行凸集；Steiner 公式

设 K 为凸集，以 K 的每一点为中心作以 ρ 为半径的球体，则一切这样球体的并集，叫做距离为 ρ 的，K 的平行凸集。边界 ∂K_ρ 叫做距离为 ρ 的，∂K 的平行曲面。

我们要证明关于 K_ρ 的体积公式

$$V(K_\rho)=\sum_0^n\binom{n}{i}W_i(K)\rho^i, \tag{13.22}$$

它对于任意 $\rho\geqslant 0$ 成立，称为关于凸集的 Steiner 公式。

我们采用归纳法。$n=1$ 时，(13.22)化为

$$V(K_\rho)=V(K)+2\rho;$$

这是对的，因为K是长度为$V(K)$的线段而K_ρ是长度为$V(K)+2\rho$的线段。假定(13.22)对于E_{n-1}内的凸集成立。设K'为K在L_{n-1}上的投影，并把(13.22)应用于K'，就得

$$V'(K'_\rho)=\sum_0^{n-1}\binom{n-1}{i}W'_i(K')\rho^i. \qquad (13.23)$$

设du_{n-1}为幺球面U_{n-1}上在垂直于L_{n-1}的幺矢的终点的面元，以du_{n-1}乘(13.23)两边并在整个U_{n-1}上积分，利用Kubota公式和Cauchy公式，得

$$F(K_\rho)=\sum_0^{n-1}n\binom{n-1}{i}W_{i+1}(K)\rho^i. \qquad (13.24)$$

另一方面，

$$V(K_\rho)=V(K)+\int_0^\rho F(K_\rho)d\rho,$$

故

$$V(K_\rho)=V(K)+\sum_0^{n-1}\binom{n}{i+1}W_{i+1}(K)\rho^{i+1}.$$

根据(13.10)，可以令$W_0(K)=V(K)$，于是经过指标更换$i+1\to i$就得所求公式。

由于平行体$K_{\rho+\alpha}$就是K_ρ的平行体$(K_\rho)_\alpha$，可以获得一个更一般的公式。我们有

$$\sum_0^n\binom{n}{i}W_i(K_\rho)\alpha^i=\sum_0^n\binom{n}{h}W_h(K)(\rho+\alpha)^h, \qquad (13.25)$$

或

$$\sum_0^n\binom{n}{i}W_i(K_\rho)\alpha^i=\sum_{h=0}^n\binom{n}{h}W_h(K)\sum_{i=0}^h\binom{h}{i}\rho^{h-i}\alpha^i. \qquad (13.26)$$

对于任意$\alpha\geqslant0$，这个等式都成立，因此，可以令α^i在两边

的系数相等，于是经过指标更换 $h-i\to i$ 后，得

$$W_i(K_\rho)=\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}W_{i+j}(K)\rho^j, \qquad (13.27)$$

这对于 $i=0,1,\cdots,n$ 成立。

4. 关于凸集在线性空间上投影的积分公式

设 K 为凸集而 K'_{n-r} 为它在经过原点 O 的 $n-r$ 维线性空间 $L_{n-r[0]}$ 上的投影。公式（13.8）用 $W_r(K)$ 来表达 K'_{n-r} 的平均体积。我们将求不变量 $W_i(K_{n-r})$ 的平均值。

为此，对凸体 K_ρ 应用（13.8）。我们得

$$W_r(K_\rho)=\frac{(n-r)O_{r-1}\cdots O_0}{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}\int_{G_{r,n-r}}V(K'_\rho)_{n-r}\mathrm{d}L_{r[0]}.$$

(13.28)

根据（13.27），

$$W_r(K_\rho)=\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}W_{r+j}(K)\rho^j, \qquad (13.28)$$

于是对 $(K'_\rho)_{n-r}$ 应用 Steiner 公式，注意 $(K'_\rho)_{n-r}=(K'_{n-r})_\rho$，就得

$$V(K'_\rho)_{n-r}=\sum_{j=0}^{n-r}W'_j(K'_{n-r})\rho^j. \qquad (13.30)$$

把(13.30)和(13.29)代入(13.28)，然后令两边 ρ^j 的系数相等，就得

$$\int_{G_{r,n-r}}W'_j(K'_{n-r})\mathrm{d}L_{r[0]}=\frac{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1}\cdots O_0}W_{r+j}(K),$$

(13.31)

这个公式对于 $0\leqslant j\leqslant n-r\leqslant n-1$ 成立。考察 $j=0,1$ 两款。若 $j=0$，则 $W'_0=V(K'_{n-r})$ 是投影 K'_{n-r} 的体积，而（13.31）和（13.8）一致，即

$$\int_{G_{r,n-r}} V(K'_{n-r})\,dL_{r[0]} = \frac{nO_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1}\cdots O_0} W_r(K)。\quad (13.32)$$

若$j=1$，根据（13.9）和（13.14），$W'_1(K'_{n-r}) = F(K'_{n-r})/(n-r)$，其中$F(K'_{n-r})$表示$\partial K'_{n-r}$的面积。这时（13.31）化为

$$\int_{G_{r,n-r}} F(K'_{n-r})\,dL_{r[0]} = \frac{O_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}{O_{r-1}\cdots O_0} nW_{r+1}(K)。\quad (13.33)$$

5。 中曲率积分

若凸集K的边界∂K是一个C^2类曲面，截测积分W_r可以用∂K的中曲率积分表达。我们知道，在一个超曲面Σ上一点，有$n-1$个主方向和$n-1$个主曲率$\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_{n-1}$。若$d\sigma$表示$\Sigma$的面元，则中曲率的第$r$个积分$M_r(\Sigma)$的定义是

$$M_r(\Sigma) = \binom{n-1}{r}^{-1} \int_\Sigma \{\kappa_{i_1}, \kappa_{i_2}, \cdots \kappa_{i_r}\}\,d\sigma, \quad (13.34)$$

其中$\{\kappa_{i_1}, \kappa_{i_2}, \cdots, \kappa_{i_r}\}$表示主曲率的第$r$个初等对称函数。乘积$\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_{n-1}$叫做 Grauss-Kronecker 曲率，它和Σ的球面象的面元du_{n-1}之间有关系

$$\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_{n-1}\,d\sigma = du_{n-1}。\quad (13.35)$$

我们指出：Σ的球面象是映射$\Sigma \to U_{n-1}$，它令Σ上一点对应于经过原点O而平行于Σ在P的法矢的幺矢终点。

若$R_i = 1/\kappa_i (i=1, 2, \cdots, n-1)$是主曲率半径，则（13.34）可以写成

$$M_r(\Sigma) = \binom{n-1}{r}^{-1} \int_{U_{n-1}} \{R_{i_1}, R_{i_2}, \cdots, R_{i_r}\}\,du_{n-1}, \quad (13.36)$$

其积分域是幺球U_{n-1}。

若Σ是紧致可定向C^2类超曲面，而$n-1$是偶数，则$M_{n-1}(\Sigma)$等于球面象的总体积，它是Σ的一个拓扑不变量，和 Euler–

Poincaré 特征数 $\chi(\Sigma)$的关系是

$$M_{n-1}(\Sigma)=\frac{1}{2}O_{n-1}\chi(\Sigma)\qquad (n-1\text{为偶数})。\tag{13.37}$$

若Σ是一个域D的边界，则对于任意n，

$$M_{n-1}(\partial D)=O_{n-1}\chi(D)。\tag{13.38}$$

例如，若D是一个拓扑球，特殊地若D是凸体，我们知道$\chi(D)=1$，因而

$$M_{n-1}(\partial D)=O_{n-1}。\tag{13.39}$$

最后，我们指出，若一个紧致可微m维流形Σ_m具有有尽单形分割而a_i表示i维单纯形的个数，则

$$\chi(\Sigma_m)=a_0-a_1+a_2+\cdots+(-1)^m a_m。\tag{13.40}$$

把这个公式应用于一个n维单纯形，容易得知，对于E_n里的拓扑球D，

$$\chi(D)=1,\quad \chi(\partial D)=1-(-1)^n。\tag{13.41}$$

关于 Euler–Poincaré 特征数的公理性定义见Hadwiger[272, 274]，Groemer[243]和Lenz[363]。

6. 中曲率积分与截痕测度积分

设K为凸集，并假设∂K为C^2类超曲面。若R_i为∂K的主曲率半径，则∂K_ρ的主曲率半径是$R_i+\rho$，而∂K_ρ的面元$d\sigma_\rho$是(利用(13.35))

$$d\sigma_\rho=(R_1+\rho)(R_2+\rho)\cdots(R_{n-1}+\rho)du_{n-1}。\tag{13.42}$$

因此，∂K_ρ的面积是

$$\begin{aligned}F(K_\rho)&=\int_{U_{n-1}}(R_1+\rho)\cdots(R_{n-1}+\rho)du_{n-1}\\&=\sum_{r=0}^{n-1}\int\{R_{i_1},\cdots,R_{i_{n-1-r}}\}\rho^r du_{n-1}\\&=\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}M_r(\partial K)\rho^r。\end{aligned}\tag{13.43}$$

关于 K_ρ 的体积，则有

$$V(K_\rho) = V(K) + \int_0^\rho F(K_\rho)\mathrm{d}\rho$$

$$= V(K) + \sum_{r=0}^{n-1}\frac{\rho^{r+1}}{r+1}\binom{n-1}{r}M_r(\partial K). \qquad (13.44)$$

把这式和 Steiner 公式（13.22）比较，得

$$M_r(\partial K) = nW_{r+1}(K). \qquad (13.45)$$

注意 $W_{r+1}(K)$ 对于任意凸集都是确定的，而 $M_r(\partial K)$ 的定义（13.34）则只有当 ∂K 属于 C^2 类时才有意义。但是，我们可以取(13.45)作为 $M_r(\partial K)$ 的定义，而我们此后就这样做，因而对于任意凸集 K，都有确定的中曲率积分

$$M_r(\partial K), \quad r = 0, 1, \cdots, n-1.$$

反过来，等式（13.45）还可以用来计算 $W_{r+1}(K)$。这是因为，平行凸集 K_ρ 的边界 ∂K_ρ 是光滑的，而 $M_r(\partial K_\rho)$ 可以直接用(13.34)计算，于是令 $\rho\to 0$ 就得到 $M_r(\partial K_\rho)$ 的极限值，即 $nW_{r+1}(K)$. 下面我们对于某些 E_n 的特殊凸集列举一些 $W_r(K)$ 的值。

(a) 半径为 R 的球：

$$W_r(\text{球}) = (O_{n-1}/n)R^{n-r}, \quad r = 0, 1, \cdots, n. \qquad (13.46)$$

(b) 棱长为 $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的立方体：

$$W_r(\text{立方体}) = \frac{O_{r-1}}{r\binom{n}{r}}\{a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-r}}\}, \qquad (13.47)$$

其中 $\{a_{i_1}, \cdots, a_{i_{n-r}}\}$ 是 a_i 的第 $n-r$ 个初等对称函数。例如，对于棱长为 a 的立方体，

$$W_r(\text{矩方体}) = (O_{r-1}/r)a^{n-r}. \qquad (13.48)$$

(c) 长度为 s 的线段：

$n\geqslant 2$ 时，

$$W_i = 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n-2),$$

$$W_{n-1} = \frac{O_{n-2}}{n(n-1)}s, \qquad W_n = \frac{O_{n-1}}{n}.$$

$n=1$时，

$$W_0 = s, \qquad W_1 = 2. \tag{13.50}$$

(d) 凸柱面：

在E_n里，设A_p, B_{n-p}为凸域，依次含于互相正交的平面L_p和L_{n-p}内。若 $x \in A_p, y \in B_{n-p}$，一切点 $x+y$ 构成凸集 $A_p \times B_{n-p}$，称为A_p和B_{n-p}的 Minkowski和。这时，

$$\begin{aligned} & W_i(A_p \times B_{n-p}) \\ & = \frac{O_{i-1}}{\binom{n}{i}} \sum_{\nu=1}^{i-1} \frac{\nu(1-\nu)}{O_{\nu-1}O_{i-\nu-1}} \binom{p}{\nu}\binom{n-p}{i-\nu} W_\nu^{(p)}(A_p) W_{i-\nu}^{(n-p)}(B_{n-p}) \\ & \quad + \frac{1}{\binom{n}{i}} \left[\binom{n-p}{i} W_0^{(p)}(A_p) W_i^{(n-p)}(B_{n-p}) \right. \\ & \quad \left. + \binom{p}{i} W_i^{(p)}(A_p) \quad W_0^{(n-p)}(B_{n-p}) \right] \end{aligned} \tag{13.51}$$

其中，$W_\nu^{(p)}(A_p)$ 表示作为L_p的凸集的第ν个截测积分，而$W_{i-\nu}^{(n-p)}(B_{n-p})$则表示作为$L_{n-p}$的凸集的$B_{n-p}$的第$i-\nu$个截测积分。

特殊地，若 $p=1$ 而 A_1 是长度为 h 的线段，而B_{n-1}是半径为 a 的 $n-1$ 维球体，则(13.51)是半径为a，高度为h的迴转柱面的截测积分，即 $i \geqslant 2$时

$$W_i(\text{柱面}) = \frac{O_{n-2}}{n(n-1)} \left[\frac{(i-1)O_{i-1}}{O_{i-2}} a^{n-i} + (n-i) a^{n-i-1} h \right], \tag{13.52}$$

而

$$W_0 = \frac{O_{n-2}}{n-1} a^{n-1} h, \quad W_1 = \frac{O_{n-2}}{n(n-1)} (2a^{n-1} + (n-1)a^{n-2} h). \tag{13.53}$$

(e) 迴转椭球：

若K是半轴为a与λa(a=赤道半径)的椭球，则

$$W=(O_{n-1}/n)\lambda^{r+1}a^{n-r}F[(n+1)/2,r/2,\ n/2;\ 1-\lambda^2],$$

(13.54)

其中 F 为超比函数。以上诸值摘自 Hadwiger的书[274，第 220—221页]。

(f) 值得指出：

利用（13.45），可得 ∂K 的（距离为ρ的）平行曲面的中曲率积分

$$M_i(\partial K_\rho)=\sum_{j=0}^{n-i-1}\binom{n-i-1}{j}M_{i+j}(\partial K)\rho^j,\quad i=0,1,\cdots,n-1.$$

(13.55)

(g) $n=3$的款：

对于E_3里的凸体K，中曲率积分是$M_0=F$(∂K的面积)；$M_1=M$(∂K的中曲率积分)；$M_2=4\pi$。于是利用(13.45)，(13.11) 和（13.33），易得

$$M=\frac{1}{2\pi}\int_{U_2}L_u\mathrm{d}u_2=\frac{1}{2}\int_{U_2}\Delta\mathrm{d}u_2,\qquad(13.56)$$

其中 L_u 表示K在垂直于方向 u_2 的平面的正交投影周长，而Δ 则是K 在 u_2 方向的宽度，即垂直于 u_2 而包含K 在内的两个撑平面的距离。于是有中值

$$E(L_u)=M/2,\quad E(\Delta)=M/2\pi.\qquad(13.57)$$

由最后等式可知，除一个常数因子2π外，M等于平行撑平面之间的平均距，在技术书中，它也叫做“平均测径”[166]。

为了求 $M(K)$，有时可以先计算 $M(K_\rho)$，再取 $\rho\to0$ 时的极限。通过这个方法，可得以下结果。

(a) 对于一个棱长为a_i，其对应二面角为 α_i 的多面体，

$$M=\frac{1}{2}\sum(\pi-\alpha_i)a_i,\qquad(13.58)$$

其中取总和的范围是 ∂K 的一切棱。

(b) 对于高为h，半径为 a 的正圆柱体，

$$M = \pi h + \pi^2 r. \tag{13.59}$$

特殊地，对于长度为 h 的线段 $(r=0)$，$M=\pi h$。

(c) 对于平面凸集，作为 E_3 里压平了的凸体，

$$M = (\pi/2)L, \tag{13.60}$$

其中 L 是凸集周长。

计算距离为 ρ 的平行曲面的M然后取 $\rho\to 0$时的极限的方法也可以用于非凸集的边界。例如，若一个正柱面Z的高为 h，其截面的周长为L，总曲率为c（在图13.2里，$c(Z)=-2\pi$），则

$$M(Z) = \frac{1}{2}(\pi L + ch). \tag{13.61}$$

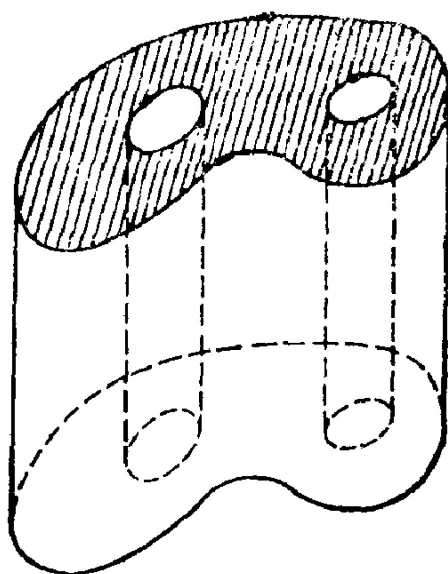


图 13.2

7. 压平了的凸体的中曲率积分

设在 E_n里，K^r为含在一个 r 维平面内的凸体，其边界 ∂K^r，作为 L_r的点集，是L_r的一个$n-1$维流形；我们假定它两次可微。设

$M_q^{(r)}(\partial K^r)(q=0,1,\cdots,r-1)$是作为 L_r 的凸面的中曲率积分。若把 K^r 看作 $E_n(n>r)$内的压平了的凸体，其中曲率积分$M_q^{(n)}(\partial K^r)$可按以下方法计算：把 K^r 看作 E_n 的凸体，取距离为 ε 的平行凸体 K_ε^r，计算它的中曲率积分，再取 $\varepsilon\to 0$时的极限。我们叙述下面结果而不加证明；这些结果是不难得到的(见[574],[274])。

(a) 若$q\geqslant n-r$，则

$$M_q^{(n)}(\partial K^r)=\frac{\binom{r-1}{q-n+r}}{\binom{n-1}{q}}\frac{O_q}{O_{q-n+r}}M_{q-n+r}^{(r)}(\partial K^r),$$

$$q\geqslant n-r. \tag{13.62}$$

(b) 若$q=n-r-1$，则

$$M_{q=n-r-1}^{(n)}(\partial K^r)=\binom{n-1}{n-r-1}^{-1}O_{n-r-1}V_r(K^r), \tag{13.63}$$

其中 $V_r(K^r)$表示 K^r的 r 维体积。

(c) 若$q<n-r-1$，则

$$M_q^{(n)}(\partial K^r)=0,\quad q<n-r-1. \tag{13.64}$$

由这些中曲率积分可以通过(13.45)来得到截测积分。

例1 在普通空间 E_3，有以下可能性。

(a) $r=1$。K^1 退化成长度为 s 的线段。中曲率积分是

$$M_0^{(3)}=0,\qquad M_1^{(3)}=\pi s,\qquad M_2^{(3)}=4\pi. \tag{13.65}$$

(b) $r=2$。$K^{(2)}$是平面凸域 设 u 为其周长，f 为其面积，则

$$M_0^{(3)}=2f,\quad M_1^{(3)}=(\pi/2)M_0^{(2)}=(\pi/2)u,\quad M_2^{(3)}=2M_1^{(2)}=4\pi. \tag{13.66}$$

例2 对于半径为R 的 r 维球，作为 E_n 的凸体，$q=n-r$，$n-r-1,\cdots,n-1$时，

$$M_q^{(n)} = \frac{\binom{n-1}{q-n+r}}{\binom{n-1}{q}} \frac{O_q}{O_{q-n+r}} \frac{O_{r-1}}{O_r} R^{n-q-1}, \tag{13.67}$$

而$q = n - r - 1$时，

$$M_q^{(n)} = \frac{1}{r\binom{n-1}{q}} O_{n-r-1} O_{r-1}. \tag{13.68}$$

$q < n - r - 1$时，

$$M_q^{(n)} = 0.$$

例3 对于棱长为a的r维正方体，作为E_n的凸体，$q = n - r, \cdots, n - 1$时，

$$M_q^{(n)} = \frac{\binom{r-1}{q-n+r}}{\binom{n-1}{q}} \frac{O_r}{q-n+r+1} a^{n-q-1}; \tag{13.69}$$

$q = n - r - 1$时，

$$M_q^{(n)} = \binom{n-r}{}^{-1} O_{n-r-1} a^r; \tag{13.70}$$

$q < n - r - 1$时，

$$M_q^{(n)} = 0.$$

例4 对于E_n里长度为s的线段，$q = 0, 1, \cdots, n - 3$时，$M_{n-1}^{(n)} = O_{n-1}$，$M_q^{(n)} = 0$，而

$$M_{n-2}^{(n)} = \frac{O_{n-2}}{n-1} s. \tag{13.71}$$

8. 注记

（1）E_3中不同形状的凸体的体积，面积和中曲率积分。

(a) 对于外接球面半径为R的正多面体，我们有下列体积V，面积F和中曲率积分M[270]。

四面体

$$V=(8\sqrt{3}/27)R^3,\qquad F=(8\sqrt{3}/3)R^2,$$

$$M=2\sqrt{6}\ R\arccos(-1/3).$$

立方体

$$V=(8\sqrt{3}/9)R^3,\qquad F=8R^2,\qquad M=2\sqrt{3}\pi R.$$

八面体

$$V=(4/3)R^3,\qquad F=4\sqrt{3}R^2,\qquad M=6\sqrt{2}\ R\arccos(1/3)$$

十二面体

$$V=(2/9)\sqrt{15}(\sqrt{5}+1)R^3,\qquad F=(200-40\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}R^2.$$

$$M=5\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)R\arctan 2.$$

二十面体

$$V=(40+8\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}R^3/3,\qquad F=\sqrt{3}(10-2\sqrt{5})R^2,$$

$$M=(450-90\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}\ R\arcsin(2/3).$$

(b) 对于其三个共点棱长为 a_1,a_2,a_3 的长方体,

$$V=a_1a_2a_3,F=2(a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3),$$

$$M=\pi(a_1+a_2+a_3).$$

(c) 对于高为 h 半径为 R 的迴转锥体,

$$V=(1/3)\pi R^2h,\qquad F=\pi R^2+\pi R(h^2+R^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$M=\pi R^2+\pi R-\pi R\arctan(h/R).$$

(d) 对于高为 h, 半径为 R 的圆柱体,

$$V=\pi R^2h,\qquad F=2\pi R(h+R),\qquad M=\pi(h+\pi R)$$

(e) 对于半径为 R 的半球体,

$$V=(2/3)\pi R^3,\qquad F=2\pi R^2,\qquad M=2\pi R(1+\pi/4).$$

(f) 对于半轴为 $a,a,\lambda a$ 的迴转椭球面, $0<\lambda<1$ 时,

$$V=(4/3)\pi\lambda a^3,$$

$$F=2\pi[1+\lambda^2(1-\lambda^2)^{1/2}\log\{[1+(1-\lambda^2)^{1/2}]\lambda^{-1}\}]a^2,$$

$$M=2\pi[\lambda+(1-\lambda^2)^{-1/2}\arccos\lambda]a;$$

而 $1<\lambda<\infty$ 时,

$$V=(4/3)\pi\lambda a^3,$$

$$F = 2\pi[1 + \lambda^2(\lambda^2 - 1)^{-1/2} \arccos(1/\lambda)]a^2,$$
$$M = 2\pi\{\lambda + (\lambda^2 - 1)^{-1/2} \log[\lambda + (\lambda^2 - 1)^{1/2}]\}a.$$

(g) 关于E_3中凸体的一些其他几何量以及这些量的上下估计 见[490].

(2) 关于E_3中凸体的积分公式. 设K为E_3里的凸集. 用G_s表示和K相交的直线, G_e为在K外的直线. 用P_1, P_2表示G_s和∂K的交点, 同时又表示经过G_e的, K的撑平面的切点. 设k_1, k_2为∂K在P_1, P_2的Gauss曲率, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$为∂K在该两点的面元. 设s为弦$G_s \cap K = P_1P_2$的长, α_1, α_2为G_s和∂K在P_1, P_2的外向法线所作的角. 设ω为经过G_e的, K的撑平面之间的角, t_1, t_2为从P_1, P_2到G_e的距离[1]. 这样, 下列关系成立

$$dG_s = \frac{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{s^2} d\sigma_1 \wedge d\sigma_2, \qquad dG_e = \frac{k_1 k_2 t_1 t_2}{\sin^2\omega} d\sigma_1 \wedge d\sigma_2,$$

$$dG_e = \frac{k_1 k_2 t_1 t_2 s^2}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin^2\omega} dG_s, \qquad dG_e = \frac{k_1 k_2 s^4}{\sin^4\omega} dG_s.$$

利用这些关系, 可以证明以下积分公式, 其中积分范围是一切在K外的直线G_e和一切问K相交的G_s:

$$\int \frac{\sin^m\omega}{t_1 t_2} dG_e = 4\pi^{3/2} \frac{\Gamma(m/2)}{\Gamma((m+1)/2)},$$

$$\int (2\omega - \sin 2\omega)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right) dG_e = 16\pi M,$$

$$\int \frac{\sin^2\omega}{k_1 k_2 t_1 t_2} dG_e = \left(\frac{\pi}{2}\right) F^2, \qquad \int \frac{\sin^4\omega}{k_1 k_2 s^4} dG_e = \left(\frac{\pi}{2}\right) F,$$

$$\int \frac{\sin^4\omega}{k_1 k_2 s^3} dG_e = 2\pi V, \qquad \int \frac{\sin^4\omega}{k_1 k_2} dG_e = bV^2,$$

---

1) 原书没有明确指出P_1, P_2和G_e的关系, 译文补上, 同时把各定义次序作了调整. ——译者

$$\int \frac{k_1 k_2 s^2}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2} \mathrm{d}G_s = 8\pi^2, \qquad \int \frac{s^2}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2} \mathrm{d}G_s = \frac{F^2}{2},$$

$$\int \frac{(k_1 + k_2) s^2}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2} \mathrm{d}G_s = 4\pi F,$$

$$\int \left(\frac{f_1}{\cos\alpha_1} + \frac{f_2}{\cos\alpha_2} \right) \mathrm{d}G_s = 2\pi \int_{\partial K} f \mathrm{d}\sigma,$$

$$\int \left(\frac{f_1}{\cos\alpha_1} + \frac{f_2}{\cos\alpha_2} \right) s^3 \mathrm{d}G_s = 3V \int_{\partial K} f \mathrm{d}\sigma,$$

其中 f_1, f_2表示∂K上的函数 f 在P_1, P_2的值。见[395,397,546]。

（3）Ambarcumjan 的一个不等式。① 设G 为和凸体 K 相交的直线。设 s 为弦 $G \cap K$的长，而 $\mathrm{d}\sigma_1, \mathrm{d}\sigma_2$为$\partial K$在交点 $G \cap \partial K$ 的面元。Ambarcumjan[7]证明了不等式（对于一切整数 $n \geqslant 0$）

$$\int_{G \cap K \neq \varnothing} s^n \mathrm{d}G \leqslant \frac{n}{\pi(n+2)} \int_{\partial K \times \partial K} s^{n-2} \mathrm{d}\sigma_1 \wedge \mathrm{d}\sigma_2.$$

$n = 2$时，就有 $I_2 \leqslant F^2/2\pi$②。

（4）凸集的q维撑平面。设想在E_3里按以下方法作一族 q 维平面：取以原点为中心的幺球U_{n-1}，对于每一个和U_{n-1}相切的L_q，在O和L_q所确定的L_{q+1}里，令L_q平移到一个 q 维撑平面 L'_q。试问所得的族$\{L_q'\}$构成某一个凸集K 的全部撑 q 维平面的充要条件是什么？在这里，L'_q是K 的 q 维撑平面，是指 $L'_q \cap K$ 是 ∂K 的一个非空子集。$q = 0$和$q = n - 1$两款是经典的成果[63，第26页]。Firey[194]给出了答案，那是一组关于从O到 L_q^{-1} 的距离 r 的条件。把$n/(n-q)^{1/2} = h_q$称作K 的 q 维撑函数，Firey还给出了用h_q表达K 的截测积分的公式。

（5）Chakerian等周不等式。（a）设K 为 E_n里的凸集，而ΔK为K 在方向u 的幅度。设$u_1, \cdots, u_p (p \geqslant 1)$为固定的矢量，它们

① 在E_3里．——译者

② I_2表示Ambarcumjan不等式左边的积分．——译者

不一定正交，但构成一个 p 维标架。假定这个标架绕原点 O 运动，其运动密度为 $d\mathfrak{M}_{[0]}$ (12.7)。考虑幅度 $\Delta(u_i)$ 之积的平均值，

$$J_p=(2O_1\cdots O_{n-1})^{-1}\int\Delta(u_1)\cdots\Delta(u_p)d\mathfrak{M}_{[0]},$$

其中积分范围是整个群 $\mathfrak{M}_{[0]}$（第十二章，第 1 节）。Chakerian [98] 证明了以下不等式：

$$J_p\geqslant 2^p nW_{n-p}O_{n-1}^{-1}\quad(1\leqslant p\leqslant n);\qquad J_p\geqslant\binom{p}{n}2^p nI_{p-n}O_{n-1}^{-1},$$

其中 W_{n-p} 是 K 的第 $n-p$ 个截测积分，而 I_h 的定义则是 $\int_K r^h dP$，其中 r 是从 K 中一点 P 到 ∂K 的距离。$p=1$ 时，两个不等式中的等号只当 K 为 n 维球时成立。

(b) 设 K 为 E_n 中凸体，其体积是 V，面积是 F，第 i 个截测积分是 W_i。设 K_u 为 K 在垂直于方向 u 的超平面 L_{n-1} 上的正交投影。设 σ_u 为 K_u 的 $n-1$ 维体积而 λ_u 为 K_u 相对于 L_{n-1} 的平均幅度。Chakerian[99]得到了不等式

$$2W_{n-1}\geqslant W_{n-2}\lambda_u^{-1}+n^{-1}O_n\lambda_u,$$

$$F\geqslant(n-1)\left[\frac{(n-1)\sigma_u}{O_{n-1}}\right]^{-1/(n-1)}V+\left[\frac{(n-1)O_n}{nO_{n-1}}\right]\sigma_u.$$

在幺球上积分，还可以获得其他不等式。$n=2$ 时，有关不等式是D.C.Benson[26]的结果。

第十四章　线性子空间，凸集，紧致流形

1.　和一个凸集相交的 r 维平面的集合

设 K 为 E_n 里的凸集。我们试求一切和 K 相交的 r 维平面 L_r 的测度．应用关于 dL_r 的表达式(12.38)并利用(13.2)，可知这个测度等于 $I_r(K)$，或者，用截测积分(13.8)表示

$$M(L_r;L_r\cap K\neq\varnothing)=\int_{L_r\cap K\neq\varnothing}dL_r$$

$$=\frac{nO_{n-2}O_{n-3}\cdots O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1}\cdots O_1O_0}W_r(K). \tag{14.1}$$

于是得结论：

在 E_n 里，一切和一个凸集相交的 r 维平面的测度 $(r=1,2,\cdots,n-1)$ 由(14.1)确定。

$r=0$ 时，K 的点的测度等于 K 的体积 $V(K)$。

利用关系(13.45)，还可以把(14.1)写成

$$m(L_r;L_r\cap K\neq\varnothing)=\frac{O_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1}\cdots O_0}M_{r-1}(\partial K). \tag{14.2}$$

若 K 为含于一个 L_q 内的凸体，则(14.1)和(14.2)里的 W_r 和 M_{r-1} 须用第十三章第 7 节里的相应值代入。

$n=3$ 时，就得

$m(L_1;L_1\cap K\neq\varnothing)=(\pi/2)F$，　$m(L_2;L_2\cap K\neq\varnothing)=M_1$，

这些是 E_3 里和一个凸集相交的直线测度和平面测度．直接的证明见[586,335,144]。

其次，在和 K 相交的一切 L_r 的范围上，试求截测积分

$W_i^{(r)}(K\cap L_r)$。为此，我们利用(12.52)，即

$$dL_{i+1}^{(r)}\wedge dL_r^* = dL_{r[i+1]}\wedge dL_{i+1},\qquad i+1\leqslant r. \tag{14.3}$$

考虑积分

$$I=\int_{L_{i+1}^{(r)}\cap K\neq\varnothing} dL_{i+1}^{(r)}\wedge dL_r^*. \tag{14.4}$$

令 L_r 固定，对 $dL_{i+1}^{(r)}$ 求积，利用(14.1)，得

$$I=\frac{rO_{r-2}\cdots O_{r-i-2}}{(r-i-1)O_i\cdots O_1O_0}\int_{L_r\cap K\neq\varnothing} W_{i+1}^{(r)}(K\cap L_r)\,dL_r^*. \tag{14.5}$$

另一方面，根据(14.3)和(12.36)，

$$I=\int_{L_{i+1}\cap K\neq\varnothing} dL_{i+1}\int_{\text{全体}} dL_{r[i+1]}$$

$$=\frac{2O_{n-i-2}\cdots O_{n-r}}{O_{r-i-2}\cdots O_0}\int_{L_{i+1}\cap K\neq\varnothing} dL_{i+1}, \tag{14.6}$$

其中因子 2 的出现是由于假定 L_r 是有向的．因此若假定 L_r 是无向的，则根据(14.1)和(14.5)，

$$\int_{L_r\cap K\neq\varnothing} W_{i+1}^{(r)}(K\cap L_r)\,dL_r$$

$$=\frac{(r-i-1)O_{n-i-2}O_{n-2}\cdots O_{n-r}n}{(n-i-1)O_{r-i-2}O_{n-r}\cdots O_1O_0r}W_{i+1}(K), \tag{14.7}$$

或者，根据恒等式

$$2\pi O_{i-2}=(i-1)O_i, \tag{14.8}$$

可得

$$\int_{L_r\cap K\neq\varnothing} W_{i+1}^{(r)}(K\cap L_r)\,dL_r$$

$$=\frac{O_{n-2}\cdots O_{n-r}O_{n-i}n}{O_{r-2}\cdots O_0O_{r-i}r}W_{i+1}(K). \tag{14.9}$$

注意 $i=r-1$ 时，根据(13.10)，$W_r^{(r)}=O_{r-1}/r$ 而(14.9)和

(14.1)一致。

利用(13.15)，可以把(14.9)写成用中曲率积分表达的形式

$$\int_{L_r\cap K\neq\emptyset} M_i^{(r)}(\partial(K\cap L_r))\mathrm{d}L_r$$

$$=\frac{O_{n-2}\cdots O_{n-r}O_{n-i-1}}{O_{r-2}\cdots O_0 O_{r-i-1}}M_i(\partial K)\text{。}\qquad(14.10)$$

本节的公式为 Santaló[565,572]和 Hadwiger [274]所给出。

2. 几何概率

由以上公式可以得出几何概率中下面一些典型问题的解。

(1) 设 K_0, K_1 为 E_n 里的凸集而 $K_1\subset K_0$。一个和 K_0 相交的随机 r 维平面($r=1,2,\cdots,n-1$)也和 K_1 相交的概率是

$$p(L_r\cap K_1\neq\emptyset)=\frac{W_r(K_1)}{W_r(K_0)}=\frac{M_{r-1}(\partial K_1)}{M_{r-1}(\partial K_0)}\text{。}\qquad(14.11)$$

这个结果可以从(14.1)和(14.2)直接推得。

(2) 设 K 为 E_n 里的凸集，假定 $p+q\geqslant n$，而 L_p 和 L_q 为 E_n 里和 K 相交的两个子空间。求 $L_p\cap L_q$ 和 K 相交的概率。

解　我们需要求下面积分的值

$$m(L_p,L_q;L_p\cap L_q\cap K\neq\emptyset)=\int_{L_p\cap L_q\cap K\neq\emptyset}\mathrm{d}L_p\wedge\mathrm{d}L_q\text{。}\qquad(14.12)$$

令 L_q 固定，然后对于一切和 $L_q\cap K$ 相交的 L_p 求积，得

$$m=\frac{O_{n-2}\cdots O_{n-p-1}}{(n-p)O_{p-1}\cdots O_0}\int_{L_q\cap K\neq\emptyset}M_{p-1}(L_q\cap\partial K)\mathrm{d}L_q\text{。}\qquad(14.13)$$

为了计算最后的积分，我们分两款来考虑：

(a) $p+q\geqslant n+1$。根据(13.62)，得

$$M_{p-1}=\frac{\binom{q-1}{p+q-n-1}}{\binom{n-1}{p-1}}\frac{O_{p-1}}{O_{p+q-n-1}}M^{(q)}_{p+q-n-1}, \quad (14.14)$$

而根据(14.10)，

$$\int_{L_q\cap K\neq\varnothing}M^{(q)}_{p+q-n-1}(L_q\cap\partial K)\mathrm{d}L_q$$

$$=\frac{O_{n-2}\cdots O_{n-q}O_{2n-p-q+1}}{O_{q-2}\cdots O_0O_{n-p+1}}M_{p+q-n-1}(\partial K).$$

(14.15)

把(14.14)和(14.15)代入(14.13)，就得满足$L_p\cap L_q\cap K\neq\varnothing$的一切子空间偶$L_p,L_q$的测度．一切和$K$相交的子空间偶$L_p,L_q$的测度等于(14.2)所给出的$m(L_p;L_p\cap K\neq\varnothing)$和$m(L_q;L_q\cap K\neq\varnothing)$之积。相除，就得所求概率

$p(L_p\cap L_q\cap K\neq\varnothing,\ p+q>n)$

$$=\frac{2(p-1)!(q-1)!O_{p-1}O_{q-1}O_{2n-p-q+1}}{(p+q-n-1)!(n-1)!O_{n-p+1}O_{n-q+1}O_{p+q-n-1}}$$

$$\times\frac{M_{p+q-n-1}(\partial K)}{M_{p-1}(\partial K)M_{q-1}(\partial K)}. \quad (14.16)$$

(b) $p+q=n$，这时，(13.63)给出

$$M_{p-1}=\binom{n-1}{p-1}^{-1}O_{n-q-1}\sigma_q(L_q\cap K), \quad (14.17)$$

其中$\sigma_q(L_q\cap K)$表示$L_q\cap K$的q维体积．此外，利用关于$\mathrm{d}L_q$的表达式(12.38)，并取K在$L_{n-q\,[0]}$上的投影K'_{n-q}上的积分$\sigma_q(L_q\cap K)\mathrm{d}\sigma_{n-q}$，则因这个积分等于$K$的体积$V(K)$，得

$$\int_{L_q\cap K\neq\varnothing}\sigma_q(L_q\cap K)\mathrm{d}L_q=V(K)\int_{G_{n-q,q}}\mathrm{d}L_{n-q\,[0]}$$

$$=\frac{O_{n-1}\cdots O_{n-q}}{O_{q-1}\cdots O_0}V(K). \quad (14.18)$$

故这时

$$m(L_p, L_q; L_p \cap L_q \cap K \neq \varnothing)$$

$$= \frac{O_{n-2} \cdots O_{n-p-1} O_{n-q-1}}{(n-p) O_{p-1} \cdots O_0 \binom{n-1}{p-1}} \frac{O_{n-1} \cdots O_{n-q}}{O_{q-1} \cdots O_0} V(K), \tag{14.19}$$

而所求概率是

$$p(L_p \cap L_q \cap K \neq \varnothing,\ p+q=n)$$

$$= \frac{p!\,q!\,O_{n-1} V(K)}{(n-1)!\,M_{p-1}(\partial K) M_{q-1}(\partial K)}. \tag{14.20}$$

例 (a) $p=1$, $q=n-1$ 时，

$$p = \frac{O_{n-1} V(K)}{F(\partial K) M_{n-2}(\partial K)}, \tag{14.21}$$

其中 $F(\partial K)$ 表示 ∂K 的面积。

(b) 若 K 为球体，(14.21) 给出 $p=1/n$。于是得：和一个球体相交的超平面和直线彼此在球内相交的概率是 $1/n$。

(3) 上面方法给出以下一般问题的解：已给 h 个和凸集 K 相交的随机子空间 L_{r_i} $(i=1,2,\cdots,h)$，其维数满足 $r_1+r_2+\cdots+r_h \geqslant (h-1)n$，求

$$L_{r_1} \cap L_{r_2} \cap \cdots \cap L_{r_h} \cap K \neq \varnothing$$

的概率。

一般公式是复杂的，但把上面方法用于每个特款，就都容易得到解答。例如在 E_3 里，三个和 K 相交的平面的公共点在 K 内的概率是 $\pi^4 V/M^3$。

3. E_n 里的 Crofton 公式

我们试把第四章中 E_2 里的两个经典的 Crofton 公式推广到 E_n。

弦公式。设 P_1,P_2 为 E_n 里两点，G 为它们所确定的直线，t_1,t_2 为 P_1,P_2 在 G 上的坐标。若 $d\sigma_{n-1}$ 表示在 P_1 垂直于 G 的超平面上的体元，则 E_n 在 P_1 的体元可以写成 $dP_1=d\sigma_{n-1}\wedge dt_1$。另一方面，$E_n$ 在 P_2 的体元可以写成 $dP_2=t^{n-1}du_{n-1}\wedge dt_2$，其中 $t=|t_2-t_1|$ 而 du_{n-1} 表示对应于 G 的方向的 $n-1$ 维立体角元①。于是

$$dP_1\wedge dP_2=t^{n-1}dG\wedge dt_1\wedge dt_2. \qquad (14.22)$$

对于一个凸集 K 内的一切点偶 P_1,P_2 求积，并利用关系

$$\int_0^\sigma\int_0^\sigma|t_1-t_2|^{n-1}dt_1\wedge dt_2=\frac{2}{n(n+1)}\sigma^{n+1}, \qquad (14.23)$$

其中 σ 表示 K 在 G 上的弦长，就得

$$\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma^{n+1}dG=\frac{n(n+1)}{2}V^2, \qquad (14.24)$$

其中 V 是 K 的体积。

Crofton 弦公式到 E_n 的这个推广是 Hadwiger [269] 的结果（参看[337]）。由于和 K 相交的直线的测度是 $[O_{n-2}/2(n-1)]F$（根据(14.2)），σ^{n+1} 的中值是

$$E(\sigma^{n+1})=\frac{n(n^2-1)}{O_{n-2}}\frac{V^2}{F}.$$

更一般地，用 t 的一个幂乘(14.22)两边并像上面那样求积，就得关系

$$2I_m=n(m-1)J_{m-n-1}, ② \qquad (14.25)$$

其中

$$I_m=\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma^m dG, \qquad J_m=\int_{P_1,P_2\in K}t^m dP_1\wedge dP_2. \qquad (14.26)$$

在 I_m 和 J_m 之间有类似第四章中所给出的对于 E_2 的不等式。

---

① 即 $n-1$ 维么球面上的体元。——译者

② 应为 $m\geq 2$。——译者

Hadwiger[269]证明了

$$F^2 \geqslant 2(n-1)(n-2)J_{-2},$$

其中等号只适用于球体。

由(14.25)和(14.26)可知一个凸集的两点间距离的中值是

$$E(r)=\frac{2I_{n+1}}{(n+1)(n+2)V^2}.$$

对于半径为R的三维球体，经直接计算可得

$$I_m=\frac{2^{m+2}}{m+2}\pi^2 R^{m+2}.$$

$n=3$时，已经知道的关于I_3之间的不等式有

$$8I_0^3-9\pi^2 I_1^2\geqslant 0,\qquad 4I_0^3-3\pi^4 I_4\geqslant 0,\qquad 3^4 I_1^4-2^6\pi^2 I_2^3\geqslant 0,$$

$$2^5 I_1^3-5^3\pi^4 I_3^3\geqslant 0,\qquad 2^6\pi^8 I_2^3-3^7 I_1^7\geqslant 0,$$

其中等号对于球体而且只对于球体成立(见[35.81])①。

---

① 译者证明了：在E_3，若令$f_m=(m+2)^3\pi^{2m-2}I_m^3-3m^{m+3-8}I_1$，则下列一组等式和不等式成立：

$f_0\geqslant 0$，$f_1=0$，$f_2\leqslant 0$，$f_3\leqslant 0$，$f_4=0$，$m\geqslant 5$时，$f_m\geqslant 0$。其中$f_0\geqslant 0$就是经典的等周不等式$O^3-2^2 3^4\pi V^2\geqslant 0$，$f_1$本身是0，$f_4=0$就是$n=3$时的Crofton公式(14.24)，即$I_4=6V^2$，而且所有不等式里的等号对于球体，而且只对于球体成立。书中第一、第三、第四和第五不等式就是$f_0\geqslant 0$，$f_2\leqslant 0$，$f_3\leqslant 0$和$f_5\geqslant 0$，而书中第二不等式则可以由$f_0\geqslant 0$和$f_4=0$得到。

任德麟把这一组等式和不等式推广到$E_n(n\geqslant 2)$。引进以下记号：

n	m	Δ_m
偶	奇	$I_m-2^{m+\frac{n}{2}-1}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{m!}{(m+n-1)!}O_{n-1}\left(\frac{2m}{O_{n-1}^2}I_1\right)^{\frac{m+n-1}{n}}$
偶	偶	$I_m-2^{m+\frac{n}{2}-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}\frac{m!}{(m+n-1)!}O_{n-1}\left(\frac{2m}{O_{n-1}^2}I_1\right)^{\frac{m+n-1}{n}}$
奇	奇偶	$I_m-2^{m+\frac{n-1}{2}-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{m!}{(m+n-1)!}O_{n-1}\left(\frac{2m}{O_{n-1}^2}\right)^{\frac{m+n-1}{n}}$

则

$$\Delta_0\geqslant 0,\quad \Delta_1=0,\quad \Delta_2,\Delta_3,\cdots,\Delta_n\leqslant 0,$$

$$\Delta_{n+1}=0,\quad \Delta_{n+2},\Delta_{n+3},\cdots\geqslant 0,$$

其中不等式中的等号对于球体，而且只对于球体成立。——译者

角公式。其次，我们试推广 Crofton 公式(4.23) 到 E_n. 设 L_{n-1} 和 L^*_{n-1} 为两个和凸集 K 相交的超平面。这样的超平面偶的测度是

$$\int_{\substack{L_{n-1}\cap K\neq\varnothing \\ L^*_{n-1}\cap K\neq\varnothing}} dL_{n-1}\wedge dL^*_{n-1} = M^2_{n-2}(\partial K). \qquad (14.27)$$

我们计算其交集 $L_{n-1}\cap L^*_{n-1}$ 和 K 相交的超平面偶 L_{n-1}, L^*_{n-1}。利用 $p=n-1, q=n-1$ 时的(11.13),(14.14),(14.15)(假定 $n>2$),得

$$M(L_{n-1}\cap L^*_{n-1}\cap K\neq\varnothing)=\frac{n-2}{n-1}\frac{O^2_{n-2}}{O_{n-3}}\frac{\pi}{4}M_{n-3}(\partial K). \qquad (14.28)$$

另一方面，考虑和 K 相交但其交集不和 K 相交的超平面偶，为了计算它们的测度，我们利用公式(12.43)。令 ϕ 表示 K 的两个经过 L_{n-2} 的撑超平面之间的角，并令

$$\Phi_{n-1}(\phi)=\int_0^\phi\int_0^\phi|\sin^{n-1}(\phi_2-\phi_1)|d\phi_1\wedge d\phi_2, \qquad (14.29)$$

则所求测度等于 $\int\Phi_{n-1}(\phi)dL_{n-2}$，其中积分范围是一切在 K 外的 L_{n-2}。由于这个测度和(4.28)之和必须等于(14.27)，我们得

$$\int_{L_{n-2}\cap K\neq\varnothing}\Phi_{n-1}(\phi)dL_{n-2}$$
$$=M^2_{n-2}(\partial K)-\frac{n-2}{n-1}\frac{O^2_{n-2}}{O_{n-3}}\frac{\pi}{4}M_{n-3}(\partial K). \qquad (14.30)$$

这就是 $n>2$ 时 Crofton 公式到 E_n 的推广。$n=2$ 的款已经在第四章直接讨论了。$\Phi_{n-1}(\phi)$ 的值如下：

(a) $n-1$ 为偶数时，

① 原书作(4.26)，下同。——译者

$$\Phi_{n-1}(\phi) = -\frac{2}{n-1}\Bigg[\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}\phi$$

$$+\sum_{i=1}^{n-3}\frac{(n-1)\cdots(n-2i)}{(n-3)\cdots(n-1-2i)}\sin^{n-1-2i}\phi\Bigg]$$

$$+\frac{(n-2)\cdot\cdots3\cdot1}{(n-1)\cdot\cdots4\cdot2}\phi^2. \qquad (14.31)$$

(b) $n-1$为奇数时，

$$\Phi_{n-1}(\phi) = -\frac{2}{n-1}\Bigg[\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}\phi$$

$$+\sum_{1}^{n-2}\frac{(n-2)\cdots(n-2i)}{(n-3)\cdots(n-1-2i)}\sin^{n-1-2i}\phi$$

$$-\frac{(n-2)\cdot\cdots4\cdot2}{(n-3)\cdot\cdots3\cdot1}\phi\Bigg]. \qquad (14.32)$$

公式(14.30)是 Santaló[565]给出的。$n=3$时，有

$$\int_{L_1\cap K\neq\varnothing}(\phi^2-\sin^2\phi)\,dL_1 = 2M^2-(\pi^{3/2})F, \qquad (14.33)$$

这是 Herglotz[51,306]的结果。

4. 线性子空间密度之间的一些关系

设O为固定点(原点)，并设$L_{q[0]}$为经过O的一个固定q维平面。设$L_{r[0]}$为经过O的变动r维平面，而且$q+r>n$，这样，$L_{q[0]}\cap L_{r[0]}$一般是经过O的$r+q-n$维平面，用$L_{r+q-n[0]}$表示。我们将用$dL_{r[r+q-n]}$(L_r绕$L_{r+q-n[0]}$的密度)和$dL^{[q]}_{r+q-n[0]}$($L_{r+q-n[0]}$作为固定的$L_{q[0]}$的子空间的密度)之积来表达$dL_{r[0]}$。为此目的，考虑下面两个幺模正交动标：

动标 I

(a) $e_1, e_2, \cdots, e_{r+q-n}$确定$L_{q[0]}\cap L_{r[0]}$；

(b) $e_{r+q-n+1},\cdots,e_r$ 在 $L_{r[0]}$ 里；

(c) $e_{r+1},\cdots,e_n$，补足幺模正交动标 I 的任意幺矢。

动标 II

(a) $e_1,e_2,\cdots,e_{r+q-n}$确定 $L_{q[0]}\cap L_{r[0]}$；

(b) $b_{r+q-n+1},\cdots,b_r$ 为垂直于 $L_{q[0]}$ 的 $n-q$ 维平面 $L_{n-q[0]}$ 里的常矢；

(c) $b_{r+1},\cdots,b_n$在 $L_{q[0]}$ 里，它们和 $e_1,\cdots,e_{r+q-n}$ 一起构成 $L_{q[0]}$里的一个幺模正交标架。

有了以上记号之后，根据(12.27)和(12.3)，就有

$$\mathrm{d}L_{r[0]}=\bigwedge_{\alpha,i}(e_{r+\alpha},\mathrm{d}e_i)\bigwedge_{\alpha,h}(e_{r+\alpha},\mathrm{d}e_h),\tag{14.34}$$

其中下标范围如下：

$$\alpha=1,2,\cdots,n-r;\qquad i=1,2,\cdots,r+q-n;$$
$$h=r+q-n+1,\cdots,r,\tag{14.35}$$

这些范围在本节中都适用。

根据(12.26)，我们有

$$\mathrm{d}L_{r[r+q-n]}=\bigwedge_{\alpha,h}(e_{r+\alpha},\mathrm{d}e_h),\tag{14.36}$$

$$\mathrm{d}L^{(q)}_{r+q-n[0]}=\bigwedge_{\alpha,i}(b_{r+\alpha},\mathrm{d}e_i).\tag{14.37}$$

令

$$e_{r+\alpha}=\sum_h u_{r+\alpha,h}b_h+\sum_k u_{r+\alpha,k}b_k,\tag{14.38}$$

其中 h 的范围见(14.35)而 $k=r+1,r+2,\cdots,n$。

由于 b_h是常矢，$(b_h\cdot\mathrm{d}e_i)=-(e_i\cdot\mathrm{d}b_h)=0$，故

$$(e_{r+\alpha}\cdot\mathrm{d}e_i)=\sum_k u_{r+\alpha,k}(b_k\cdot\mathrm{d}e_i).\tag{14.39}$$

由(14.34)和(14.39)，就得所求公式

$$\mathrm{d}L_{r[0]}=\Delta^{r+q-n}\mathrm{d}L_{r[r+q-n]}\wedge\mathrm{d}L^{(q)}_{r+q-n[0]},\tag{14.40}$$

其中

$$\Delta = \det(e_{r+\alpha} \cdot b_k). \tag{14.41}$$

在一切$L_{r[0]}$上对(14.40)求积，在左边得到已知的值(12.35)，而在右边，由于Δ只和$L_{r[r+q-n]}$有关，可以对于$n \to q$，$r \to r+q-n$利用同一个公式(12.35)来积分$dL_{r+q-n[0]}^{(q)}$。其结果是

$$\int \Delta^{r+q-n} dL_{r[q+r-n]} = \frac{O_{n-1}O_{n-2}\cdots O_q}{O_{r-1}O_{r-2}\cdots O_{r+q-n}}, \tag{14.42}$$

其中积分范围是一切$L_{r[q+r-n]}$。

可以把这个公式写成另一种有用的形式。注意$dL_{r[q]} = dL_{r-q[0]}^{(n-q)}$(第十二章，第4节)，它可以写成

$$dL_{r[r+q-n]} = dL_{n-q[0]}^{(2n-r-q)}, \tag{14.43}$$

因而(14.42)化为

$$\int_{G_{n-q,\,n-r}} \Delta^{r+q-n} dL_{n-q[0]}^{(2n-r-q)} = \frac{O_{n-1}\cdots O_q}{O_{r-1}\cdots O_{r+q-n}}. \tag{14.44}$$

改变记号，令$r+q-n=N$，$2n-r-q=\nu$，$n-q=\rho$，就得

$$\int_{G_{\rho,\,\nu-\rho}} \Delta^N dL_{\rho[0]}^{(\nu)} = \frac{O_{N+\nu-1}\cdots O_{N+\nu-\rho}}{O_{N+\rho-1}\cdots O_N}. \tag{14.45}$$

注意行列式Δ的意义：经过原点O，有ρ个固定幺模正交矢量$e_1^0, e_2^0, \cdots, e_\rho^0$，又有幺模正交矢量$e_1, e_2, \cdots, e_\rho$所张成的变动中的$L_{\rho[0]}$。这样，$\Delta = \det(e_i^0, e_j)$，其中$1 \leqslant i, j \leqslant \rho$。

试考察从(14.40)可得的其他结果。考虑固定的$L_{q[0]}$和一个变动的L_r，$r+q>n$。设x为交集$L_r \cap L_{q[0]}$的一点，并考虑以x为始点的上述动标Ⅰ和Ⅱ。为了应用(14.40)，注意

$$dL_{n-r[0]} = dL_{r[0]} = dL_{r[x]},$$

$$d\sigma_{n-r} = (dx \cdot e_{r+1}) \wedge \cdots \wedge (dx \cdot e_n).$$

于是

$$dL_r = dL_{r[x]} \bigwedge_\alpha (dx \cdot e_{r+\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, \cdots, n-r. \tag{14.46}$$

由于矢量 $\boldsymbol{b}_h(h=r+q-n+1,\cdots,r)$ 垂直于 $L_r\cap L_{q[0]}$，而 $x\in L_r\cap L_{q[0]}$，我们有 $dx\cdot\boldsymbol{b}_h=0$，因而由(14.38)得

$$dx\cdot\boldsymbol{e}_{r+a}=\sum_k u_{r+a,k}(dx\cdot\boldsymbol{b}_k). \tag{14.47}$$

由此可知

$$\bigwedge_a(dx\cdot\boldsymbol{e}_{r+a})=\Delta\bigwedge_k(dx\cdot\boldsymbol{b}_k),\qquad k=r+1,\cdots,n. \tag{14.48}$$

但 $dL^{(q)}_{r+q-n}=dL^{(q)}_{r+q-n[0]}\bigwedge_k(dx\cdot\boldsymbol{b}_k)$，故由最后几个关系和(14.39)，得

$$dL_r=\Delta^{r+q-n+1}dL_{r[r+q-n]}\wedge dL^{(q)}_{r+q-n}. \tag{14.49}$$

设 $F(L_r)$ 为只决定于 $L^{(q)}_{r+q-n}=L_r\cap L_{q[0]}$ 的可积函数，就有

$$\int F(L_r)dL_r=\int\Delta^{r+q-n+1}dL_{r[r+q-n]}\int F(L^{(q)}_{r+q-n})dL^{(q)}_{r+q-n}, \tag{14.50}$$

其中积分范围是被积函数的一切可能的值。根据(14.43)，

$$\int\Delta^{r+q-n+1}dL_{r[r+q-n]}=\int\Delta^{r+q-n+1}dL^{(2n-r-q)}_{n-q[0]}, \tag{14.51}$$

又把(14.45)应用于 $N=r+q-n+1$，$\rho=n-q$，$\nu=2n-r-q$ 的款，就得

$$\int\Delta^{r+q-n+1}dL_{r[r+q-n]}=\frac{O_nO_{n-1}\cdots O_{q-1}}{O_rO_{r-1}\cdots O_{r+q-n+1}} \tag{14.52}$$

以及最后

$$\int F(L_r)dL_r=\frac{O_nO_{n-1}\cdots O_{q+1}}{O_rO_{r-1}\cdots O_{r+q-n+1}}\int F(L^{(q)}_{r+q-n})dL^{(q)}_{r+q-n}. \tag{14.53}$$

公式(14.44)和(14.53)是陈省身[112]的工作。

作为(14.53)的一个应用，设 K_q 为含在 $L_{q[0]}$ 里的凸集，而 F 为一个函数，当 $L_r \cap K_q \neq \varnothing$ 时，它等于 1，否则等于 0。这样，(14.53)左边是和 K_q 相交的一切 L_r 的测度。于是根据(14.2)，就有

$$\int_{L_r \cap K_q \neq \varnothing} dL_r = \frac{O_{n-2} \cdots O_{n-r-1}}{(n-r) O_{r-1} \cdots O_1 O_0} M_{r-1}^{(n)}, \qquad (14.54)$$

其中 $M_{r-1}^{(n)}$ 表示作为 E_n 的凸体的 K_q 的第 $r-1$ 个中曲率积分。(14.53)右边的积分是 $L_{q[0]}$ 里一切和 K_q 相交的 $L_{r+q-n}^{(q)}$ 的测度。因此，根据同一个公式(14.2)，就有

$$\int_{L_{r+q-n}^{(q)} \cap K_q \neq \varnothing} dL_{r+q-n}^{(q)}$$

$$= \frac{O_{q-2} \cdots O_{n-r-1}}{(n-r) O_{r+q-n-1} \cdots O_0} M_{r+q-n-1}^{(q)}, \qquad (14.55)$$

其中 $M_{r+q-n-1}^{(q)}$ 是作为 $L_{q[0]}$ 的凸体的 K_q 的第 $r+q-n-1$ 个中曲率积分。于是(14.53)给出

$$M_{r-1}^{(n)} = \frac{O_{r+q-n} O_n O_{n-1}}{O_r O_q O_{q-1}} M_{r+q-n-1}^{(q)}. \qquad (14.56)$$

这个公式应当和(13.62)一致。为了验证这一点，只须利用(1.22)中 O_i 的值以及下面关于 γ 函数的已知性质：

$$\Gamma(z) = (z-1)!, \qquad \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\pi^{1/2}\Gamma(2z).$$

$$(14.57)$$

5. 和一个流形相交的线性子空间

设 $(x; e_i)$ 为变动的幺模正交标架，并设 L_r 为 $x, e_1, e_2, \cdots, e_r$ 所确定的 r 维平面。根据(12.18)，L_r 的密度是

$$dL_r = \bigwedge_i \omega_i \bigwedge_{h,j} \omega_{hj}, \qquad i, h = r+1, \cdots, n, \quad j = 1, 2, \cdots, r.$$

$$(14.58)$$

外积 $\bigwedge \omega_i = \bigwedge (\mathrm{d}x \cdot e_i)$ $(i = r+1, \cdots, n)$ 等于垂直于 L_r 的 $n-r$ 维平面 $L_{n-r[x]}$ 在 x 的体元 $\mathrm{d}\sigma_{n-r}(x)$。外积

$$\bigwedge_{h,j} = \bigwedge (e_j \cdot \mathrm{d}e_h)$$

是绕 x 的 r 维平面的体元。故有(参看(12.38))

$$\mathrm{d}L_r = \mathrm{d}\sigma_{n-r}(x) \wedge \mathrm{d}L_{r[x]}. \tag{14.59}$$

设 M^q 为嵌在 E_n 里的一个 q 维紧致可微流形，并假定它是逐段(块)光滑的。假定 $r+q \geqslant n$，并考虑和 M^q 有交点的 r 维平面的集合。交集 $L_r \cap M^q$ 一般是 $r+q-n$ 维流形。选取标架 $(x; e_i)$，其中 $x \in L_r \cap M^q$，而 $e_1, e_2, \cdots, e_{r+q-n}$ 是 $L_r \cap M^q$ 的幺模正交切矢。设 $b_{r+1}, b_{r+2}, \cdots, b_n$ 为一组幺模正交矢量，而且 $e_1, \cdots, e_{r+q-n}$, $b_{r+1}, \cdots, b_n$ 张成 M^q 在 x 的切空间。由于我们只考虑和 M^q 相交的 r 维平面，对于(14.59)中的 x，可以假定

$$\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{r+q-n} \lambda_i e_i + \sum_{k=r+1}^{n} \beta_k b_k, \tag{14.60}$$

其中 λ_i 和 β_k 是一次微分齐式。于是

$$\omega_{r+\alpha} = \mathrm{d}x \cdot e_{r+\alpha} = \sum_{k=r+1}^{n} \beta_k (b_k \cdot e_{r+\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, \cdots, n-r, \tag{14.61}$$

因而

$$\mathrm{d}\sigma_{n-r}(x) = \bigwedge_{\alpha=1}^{n-r} \omega_{r+\alpha} = \Delta \bigwedge_k \beta_k, \quad k = r+1, \cdots, n, \tag{14.62}$$

其中 $\Delta = \det(b_k, e_{r+\alpha}) = \det(\cos\phi_{k,r+\alpha})$，而 $\phi_{k,r+\alpha}$ 则是 b_k 和 $e_{r+\alpha}$ 之间的角。

在 x，若 $\mathrm{d}\sigma_{r+q-n}(x)$ 表示 $L_r \cap M^q$ 的体元而 $\mathrm{d}\sigma_q(x)$ 表示 M^q 的体元，则因 $\bigwedge \beta_k$ 是 M^q 中垂直于 $L_r \cap M^q$ 的 $n-r$ 维体元，得

$$\bigwedge_{k=r+1}^{n}\beta_k\bigwedge \mathrm{d}\sigma_{r+q-1}(x)=\mathrm{d}\sigma_q(x),\qquad (14.63)$$

因而从(14.59)，(14.62)和(14.63)，就得

$$\mathrm{d}\sigma_{r+q-n}(x)\mathrm{d}L_r=\Delta\mathrm{d}\sigma_q(x)\wedge\mathrm{d}L_{r[x]}.\qquad (14.64)$$

注意：

(a) Δ 决定于 L_r 相对于 M^q 在 x 的 q 维平面的位置，但与 x 无关。

(b) 若 $r+q-n=0$，公式(14.64)仍然正确，并化为

$$\mathrm{d}L_r=\Delta\mathrm{d}\sigma_q(x)\wedge\mathrm{d}L_{r[x]},\qquad r+q=n.\qquad (14.65)$$

用 $\sigma(M^q)$ 表示 M^q 的 q 维体元。对一切和 M^q 相交的 r 维平面求(14.64)两边的积分，得

$$\int_{L_r\cap M^q\neq\varnothing}\sigma_{r+q-n}(M^q\cap L_r)\mathrm{d}L_r=c\sigma_q(M^q),\qquad (14.66)$$

其中

$$c=\int\Delta\mathrm{d}L_{r[x]}$$

是需要计算的一个常数。为此，我们将对于 E_n 里的 q 维幺球 U_q 直接计算(14.66)的左边。用 $L_m^{(q+1)}$，$m\leqslant q$ 表示含 U_q 在内的 $q+1$ 维平面里的 m 维平面。先考虑积分

$$\int\sigma_{m-1}(U_q\cap L_m^{(q+1)})\mathrm{d}L_m^{(q+1)},\qquad (14.67)$$

积分范围是一切和 U_q 相交的 L_m^{q+1}。若 O 是 U_q 的中心而 ρ 表示从 O 到 $L_m^{(q+1)}$ 的距离，则 $U_q\cap L_m^{(q+1)}$ 是一个 $m-1$ 维球，其半径是 $(1-\rho^2)^{1/2}$。因而

$$\sigma_{m-1}(U_q\cap L_m^{(q+1)})=(1-\rho^2)^{(m-1)/2}O_{m-1}.$$

另一方面，由于经过 O 而垂直于 $L_m^{(q+1)}$ 的 $q+1-m$ 维平面在它和 $L_m^{(q+1)}$ 的交点的体元是 $\rho^{q-m}\mathrm{d}u_{q-m}\wedge\mathrm{d}\rho$，我们就有

$$\mathrm{d}L_m^{(q+1)}=\rho^{q-m}\mathrm{d}u_{q-m}\wedge\mathrm{d}\rho\wedge\mathrm{d}L_{q+1-m[O]}^{(q+1)}.$$

注意

$$\int_0^1 \rho^{q-m}(1-\rho^2)^{(m-1)/2}\mathrm{d}\rho = O_{q+1}(O_{q-m}O_m)^{-1},$$

再应用对于 Grassmann 流形 $G_{q+1-m,m}$的公式(12.35)，就得

$$\int_{L_m^{(q+1)} \cap U_q \neq \varnothing} \sigma_{m-1}(U_q \cap L_m^{(q+1)})\mathrm{d}L_m^{(q+1)}$$

$$= \frac{O_{q+1}O_q \cdots O_{m+1}O_{m-1}}{O_{q-m}O_{q-m-1}\cdots O_0}. \tag{14.68}$$

现在回到 E_n里的一般 L_m的情况。我们令公式(14.58)里的F等于$U_q \cap L_m$的体积，然后应用该公式。由于U_q是含在一个固定的 $q+1$ 维平面里，我们用 q 代替 $q+1$，然后令 (14.68) 中的 $m \to r+q+1-n$，就得

$$\int_{U_q \cap L_r \neq \varnothing} \sigma_{r+q-n}(U_q \cap L_r)\mathrm{d}L_r = \frac{O_n O_{n-1} \cdots O_{r-1} O_{r+q-n}}{O_{n-r-1}\cdots O_1 O_0}.$$

和(14.66)比较，就得常数 c 的值。代入(14.66)，就得最后结果

$$\int_{M^q \cap L_r \neq \varnothing} \sigma_{r+q-n}(M^q \cap L_r)\mathrm{d}L_r = \frac{O_n \cdots O_{n-r} O_{r+q-n}}{O_r \cdots O_0 O_q}\sigma_q(M^q). \tag{14.69}$$

值得注意的是，这个公式适用于任意常曲率空间，即欧氏和非欧空间(见[561,565])。$r+q=n$ 时，(14.69)化为

$$\int_{M^{n-r} \cap L_r \neq \varnothing} N(M^{n-r} \cap L_r)\mathrm{d}L_r = \frac{O_n \cdots O_{n-r+1}}{O_r \cdots O_1}\sigma_q(M^{n-r}), \tag{14.70}$$

其中$N(M^{n-r} \cap L_r)$表示交集$M^{n-r} \cap L_r$所含的点的个数。

公式(14.69)包括大量的特款。我们指出下列结果。

例1 对于平面，$n=2$，有两种可能：

(a) $r=1$，$q=1$。这M^1是曲线，$\sigma_1(M^1)$是它的长，而$\sigma_0(M^1$

$\cap L_1$)是M^1和直线L_1的交点数。公式(14.69)化为(3.17)。

(b) $r=1$，$q=2$。这时M^2是平面域，面积是$\sigma_2(M^2)$。被积函数$\sigma_1(M^2\cap L_1)$是弦$M^2\cap L_1$的长，因而(14.69)和(3.6)一致。

例2　对于空间$n=3$，有下列诸款：

(a) $r=1$，$q=2$。L_1是和一个面积的F为固定曲面M^2相交的直线，而(14.69)化为

$$\int_{L_1\cap M^2\neq\varnothing} N\mathrm{d}L_1=\pi F, \tag{14.71}$$

其中N是L_1和M^2的交点数。

(b) $r=1$，$q=3$。L_1是和一个固定域D相交的直线。若σ_1表示弦$L_1\cap D$的长，就得

$$\int_{L_1\cap D\neq\varnothing}\sigma_1\mathrm{d}L_1=2\pi V,\ V=D\text{ 的面积。} \tag{14.72}$$

(c) $r=2$，$q=1$。L_2为和长度等于L的曲线C相交的平面。这时有

$$\int_{L_2\cap C\neq\varnothing} N\mathrm{d}L_2=\pi L, \tag{14.73}$$

其中N是L_2和C的交点数。我们已经证明，这个公式(14.73)对于逐段光滑曲线是成立的，但它对于任意有长曲线也是正确的。

(d) $r=2$，$q=2$。L_2为和一个固定曲面M^2相交的平面。这时(14.69)给出

$$\int_{L_2\cap M^2\neq\varnothing}\lambda\mathrm{d}L_2=(\pi^2/2)F, \tag{14.74}$$

其中λ是$L_2\cap M^2$的长，F是M^2的面积。

White[721]给出了一些积分公式，这些公式表达了经过一个固定点的平面同一个曲面的交线的长和总曲率与曲面不变量之间的关系。

(e) $r=2$, $q=3$. L_2是和一个体积等于V的固定域D相交的平面。这时(14.69)化为

$$\int_{L_2\cap D\neq\varnothing}\sigma_2 dL_2 = 2\pi V, \tag{14.75}$$

其中σ_2是交集$L_2\cap D$的面积.

由(14.74)和(14.75)，利用$m(L_2; L_2\cap K\neq\varnothing)=M$的事实，可得以下(关于凸体$K$)的中值：

$$E(\lambda)=\pi^2 F/2M,\quad E(\sigma_2)=2\pi V/M. \tag{14.76}$$

例3　设$\omega^{(n-r)}$为一个在M^{n-r}上确定的$n-1$次齐式。则(14.70)可以推广到如下形状的积分公式：

$$\int_{L_r\cap M^{n-r}\neq\varnothing}\left(\sum_i \omega^{(n-r)}(P_i)\right)dL_r = c\int_{M^{n-r}}\omega^{(n-r)},$$

其中P_i为$M^{n-r}\cap L_r$中的交点，c为常数。这类公式可用来证明Stokes公式

$$\int_{\partial M^{n-r}}\omega=\int_{M^{n-r}}d\omega$$

(例如 Maak[379]和 Horneffer[312,313])。

6. 超曲面与线性空间

我们试把公式(14.10)推广到一个不限于凸的体Q和同它相交的变动的r维平面。假定∂Q是属于C^2类的超曲面。设L_r为同Q相交的r维平面，而$x\in L_r\cap\partial Q$。这时$q=n-1$，公式(14.64)化为

$$d\sigma_{r-1}(x)\wedge dL_r = \Delta d\sigma_{n-1}(x)\wedge dL_{r[x]}. \tag{14.77}$$

设$\rho_1,\cdots,\rho_{r-1}$为$r-1$维流形$\partial Q\cap L_r$在x的主曲率。以$\{1/\rho_{h_1},\cdots,1/\rho_{h_i}\}$乘(14.77)两边，并对一切变量值求积，则在左边，得到积分

$$\binom{r-1}{i}\int M_i^{(r)}\mathrm{d}L_r,$$

其积分范围是一切令 $L_r\cap\partial Q\neq\varnothing$ 的 L_r。为了计算右边的积分，注意主曲率$1/\rho_h(h=1,2,\cdots,r-1)$可以用 ∂Q 在 x 的主曲率 $1/R_s$ $(s=1,2,\cdots,n-1)$以及第 5 节的矢量 e_h 和 b_s 之间的角$\phi_{h,s}$ 表示（因为Euler和Meusnier 关于曲面的经典定理对于超曲面也以一种类似的方式适用，见[465]）。因此，令

$$\{1/\rho_{h_1},\cdots,1/\rho_{h_i}\}\Delta=F(1/R_s,\phi_{h,s}),$$

就可以看出，对于一切经过 x 的L_r所取的积分$\int F\mathrm{d}L_{r[x]}$只同 R_1, $R_2,\cdots,R_{n-1}$ 有关。直接计算这个积分看来是困难的。但是我们知道，对于凸体，它(除了一个常数因子外)等于对称函数$\{1/R_{h_1},\cdots,1/R_{h_s}\}$(14.10)，而这个局部结果不会受$\partial Q$ 的整体性质所影响，因此(14.10)普遍成立。换句话说，对于任意其边界∂Q 属于C^2类的 Q，可以写出公式

$$\int_{Q\cap L_r\neq\varnothing}M_i^{(r)}(\partial Q\cap L_r)\mathrm{d}L_r$$

$$=\frac{O_{n-2}\cdots O_{n-r}O_{n-i}}{O_{r-2}\cdots O_0O_{r-i}}M_i(\partial Q). \tag{14.78}$$

若Q为凸体而取$i=r-1$，就得$M_{r-1}^{(r)}=O_{r-1}$，而(14.78)就和(14.2)一致。对于任意不一定是凸的体Q，利用(13.78)，有

$$\int_{Q\cap L_r\neq\varnothing}\chi(Q\cap L_r)\mathrm{d}L_r$$

$$=\frac{O_{n-2}\cdots O_{n-r}O_{n-r+1}}{O_{r-2}\cdots O_0O_{r-1}}M_{r-1}(\partial Q)$$

$$=\frac{O_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}{(n-r)O_{r-1}\cdots O_0}M_{r-1}(\partial Q). \tag{14.79}$$

若令 $M_r(\partial Q)=nW_{r+1}(Q)$，(14.79)可以作为非凸体的 $W_{r+1}(Q)$的定义[274，第240页]。

7. 注记

(1) Favard 测度与维数。若A为E_n的一个子集而k为小于n的正整数。则A的k维Favard测度的定义是

$$M_F^k(A)=\frac{O_{n-k}\cdots O_1}{O_n\cdots O_{k+1}}\int_{L_{n-k}\cap A\neq\varnothing}N(A\cap L_{n-k})\mathrm{d}L_{n-k},$$

其中$N(A\cap L_{n-k})$表示$A\cap L_{n-k}$的点的个数(可能无限大)。若s和n是整数，$n>0$，$0\leqslant s\leqslant n$，而$m_F^s(A)=0$，则 $\dim A\leqslant s-1$。

可以证明下面公式(可与(14.69)比较)

$$M_F^k(A)=\frac{O_{n-k+h}\cdots O_0O_k}{O_n\cdots O_{k-h}O_h}\times\int_{L_{n-k+h}\cap A\neq\varnothing}m_F^h(A\cap L_{n-k+h})\mathrm{d}L_{n-k+h}.$$

Favard测度的性质，它和其他测度(Caratheodory, Hausdorff)的关系，以及它和维数的关系，在Federer[174,175]的重要论文中有论述。

(2) 支撑一个凸体的r维平面集合。设ω为E_n里代表一切方向的幺球面上的一个点集。设K为E_n里一个凸体，取K的撑超平面中，其向外法线方向落在ω里的那一部分，再取K的边界点中属于至少一个这样撑超平面的那一部分，设$S(K;\omega)$表示这些点的集合的$n-1$维面积。若B为幺球体而$\lambda\geqslant 0$，则$S(K+\lambda B;\omega)$是含λ的一个多项式，其系数确定K的所谓面积函数$S_{n-q-1}(K;\omega)$，$q=0,1,\cdots,n-1$。对于每一个$u\in U$，有唯一的具有向外法矢的$K+\lambda B$的撑超平面。在这个超平面里，设$C_q(u,\lambda)$为一切和$K+\lambda B$有公共点的q维平面。对于每一个ω和每一个$\eta>0$，设

$$F_q(K;\omega,\eta)=\bigcup C_q(u,\lambda)\quad(u\in\omega,\ 0<\lambda<\eta).$$

设$\mu_q(K;\omega,\eta)$为$F_q(K;\omega,\eta)$作为E_n里一个q维平面集合的不变测度。Firey[193]证明了

$$\lim_{\eta\to 0^+}(F(K;\omega,\eta)/\eta)=S_{n-q-1}(K;\omega).$$

若$\omega=U$，则$S_{n-q-1}(K;U)=nW_{q+1}(K)$，其中$W_{q+1}(K)$是$K$的第$q+1$截测积分。因此，本来(除一个常数因子外)等于和$K$相交的$q+1$维平面的测度$W_{q+1}(K)$也可以看作"支撑"$K$的$q$维平面的测度。

(3) **关于n维椭圆面的一个积分几何公式。** 设K为中心在原点的一个n维椭图面，$G_{r,n-r}$表示经过E_n原点的r维平面所构成的Grassmann流形。Furstenberg与Tzkoni[209a]给出了公式其

$$c_{n,r}m(G_{r,n-r})(\sigma_n(K))^r$$
$$=\int_{G_{r,n-r}}[\sigma_r(K\cap L_{r[0]})]^n\mathrm{d}L_{r[0]},$$

中$m(G_{r,n-r})$是Grassmann流形$G_{r,n-r}$的测度(12.35)，σ_h表示h维测度，而

$$c_{n,r}=[\Gamma(n/2)(n/2)]^r[\Gamma(r/2)(r/2)]^n.$$

这个公式可以经过多重扩张以得到关于标志流形①，即一切m平面组$L_{s_1}\subset L_{s_2}\subset\cdots\subset L_{s_m}$所构成的流形的公式。有关结果见Miles[421]和Guggenheimer[259]。

(4) **带的集合。** E_n里两个距离为a的平行超平面之间的部分空间叫做带，a叫做它的宽。具有已给宽度的带B的位置可以用居中的超平面来确定，因而带的密度和超平面相同，$\mathrm{d}B=\mathrm{d}p\wedge\mathrm{d}u_{n-1}$(12.40)。

设K为E_n里的凸集。对于平行于K，距离为$a/2$的凸体$K_{a/2}$，中曲率积分是$M_{n-2}(\partial K)+(O_{n-1}/2)a$(13.55)，故

$$m(B;B\cap K\neq\varnothing)=M_{n-2}(\partial K)+(O_{n-1}/2)a.\tag{14.79a}$$

① flag manifold. ——译者

若K的直径小于a①，则又有

$$m(B;B\supset K)=(O_{n-2}/2)a-M_{n-2}(\partial K).$$

设K_0是常宽为D_0的凸集，则$M_{n-2}(\partial K_0)=(O_{n-2}/2)D_0$。设$K_1$为凸集，$K_1\subset K_0$。现在不假定$B$变动而假定有一个固定的平行带$B$的序列，各带间的距离为$D_0$(图5.3)然后把连同$K_1$在内的$K_0$随机地放在空间里，由于$K_0$总要和唯一的一个带$B$相交，而且我们知道每一个直径等于$D_0$的凸集是一个常宽为$D_0$的集的子集[63,第130页]，所以得以下结论：

设E_n里有一组平行带，带宽为a，各带间距离为D_0，而把一个凸集K_1随机地放在空间里，K_1直径$D_1\leqslant D_0$，则K_1和其中一个带相交的概率是

$$p=\frac{2M_{n-2}(\partial K_1)+O_{n-1}a}{O_{n-1}(D_0+a)}.$$

特殊地，若$a=0$，则

$$p=\frac{2M_{n-2}(\partial K_1)}{O_{n-1}D_0},$$

而若K_1是一条长度为b的线段，则

$$p=\frac{2O_{n-2}b}{(n-1)O_{n-1}D_0}.$$

这些公式把经典的Buffon针问题(第五章，第2节)推广到E_n。另一种途径见Stoka[649]和Ambarcumjan[11]。

(5) 关于凸多面体的中值。(a) 由(14.1)和(14.73)，可见若一个已给凸多面体被随机平面截成多边形，这些多边形顶点数的平均值是$E(\nu)=\pi L/M$，其中M是中曲率积分而L是多面体的棱的总长。

(b) 设Q为凸多面体，$A_i(i=1,\cdots,N)$是它的顶点数。设Φ_i表示Q在A_i的内立体角。经过A_i的一条直线若和Q只有公共点

① 原书作a小于K的直径。——译者

A_i，就叫做在Q外的直线。显然，经过A_i的一条随机直线在Q外的概率是$1-\phi_i/2\pi$。Q在一个平面E上的垂直投影是一个多边形，其顶点数等于经过A_i而垂直于E的Q外直线数。这样，Q在一个随机平面上的垂直投影多边形的顶点数期望值是

$$E(\nu_1)=N-(1/2\pi)\sum_{1}^{N}\phi_i.$$

这个结果可推广到E_n(见[412])。

(6) **关于空间曲线的积分公式。** 我们叙述[481]所获得的关于E_3里的曲线的一些结果。

设Γ为E_3里的有向①闭曲线，它是可微的，属于C^3类，没有尖点或重点。对于每条直线G，设$\lambda(G)$表示G受到Γ的环绕数(Γ环绕G的次数)，而对于每个平面E，设$P_1,P_2,\cdots$表示$E\cap\Gamma$的点。令$r(P_i,P_j)$为由P_i到P_j的距离，ι_{P_j}表示E和Γ的交点数(若曲线在P_j的切矢和定向平面E上两个右旋矢量构成右手系，则交点数为$+1$，否则为-1)。Pohl证明了积分公式

$$\pi\int\lambda^2 dG=-\int\Big(\sum_{i,j}r(P_i,P_j)\,\iota_{P_i}\iota_{P_j}\Big)dE,\qquad(14.80)$$

其中左边积分范围是E_3的一切直线而右边积分范围是E_3的一切平面。

(14.80)右边可以按以下方法写成另一形状。对于Γ每个有序点偶P,Q，取从P到Q的幺矢$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}(P,Q)$和距离$r(P,Q)$。设$\boldsymbol{t}(P),\boldsymbol{t}(Q)$依次表示$\Gamma$在$P,Q$的切矢，而$\sigma_P,\sigma_Q$表示角$(\boldsymbol{t}(P),\boldsymbol{e})$，$(\boldsymbol{t}(Q),\boldsymbol{e})$。设$\tau(P,Q)$表示$(\boldsymbol{t}(P),\boldsymbol{e})$和$(\boldsymbol{t}(Q),\boldsymbol{e})$所确定的有向平面之间的角。设$ds$表示弧元素，并设

$$dI=-r^{-1}\cos\tau\sin\sigma_P\sin\sigma_Q ds(P)\wedge ds(Q),\qquad(14.81)$$

在这里，我们假定了式中各量有确定值，而这条件不满足时，令$dI=0$。于是

---

① “有向”是译者所加。——译者

$$-\int\Big(\sum_{i,j} r(P_i,P_j)\Big)\mathrm{d}E = (\pi/2)\int_{\Gamma\times\Gamma} r\,\mathrm{d}I. \qquad (14.82)$$

Pohl的另一个积分公式是

$$2L = \int_{\Gamma\times\Gamma}\mathrm{d}I, \qquad (14.83)$$

其中 L 是Γ的长。

对于平面曲线，(14.81)和(14.82)给出

$$2\pi\int_{E_2} w^2\mathrm{d}P = \int_{\Gamma\times\Gamma} r\,\mathrm{d}I, \qquad (14.84)$$

其中$\mathrm{d}P$是E_2里的面元而w是P被Γ围绕数(曲线Γ围绕P的次数)．这些公式都可推广到E_n[481]。

作为练习，证明 $\mathrm{d}I = \mathrm{d}G^*$(12.72)。

(7) **空间曲线的环绕数**①．设Γ,Γ'为E_3里两条没有公共点的属于C^1类的有向闭曲线。假定Γ是一个单连通曲面D的边界，并规定D的正向使它和Γ的正向相配。D和Γ'的交点数叫做环绕数$L(\Gamma,\Gamma')$，它是一个整数．为了给出关于环绕数的一个积分公式，对于每一对点$P\in\Gamma,Q\in\Gamma'$，取从P到Q的幺矢$\boldsymbol{e}$,并用$\mathrm{d}u_2$表示幺球面U_2上对应于矢量$\boldsymbol{e}$的方向的面元。这样就可以证明，L可用下面的Gauss积分确定：

$$L(\Gamma,\Gamma') = (1/4\pi)\int_{\Gamma\times\Gamma'}\mathrm{d}u_2. \qquad (14.85)$$

设$t_1=t_1(P),t_2=t_2(Q)$依次表示Γ,Γ'在P,Q的幺切矢。通过简单计算可知(14.85)右边可以写成

$$L(\Gamma,\Gamma') = (1/4\pi)\int_{\Gamma\times\Gamma'} r^{-2}\,(\boldsymbol{e}\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2)\mathrm{d}s_1\wedge\mathrm{d}s_2, \qquad (14.86)$$

① Linking number". ——译者

其中ds_1,ds_2依次表示Γ,Γ'在P,Q的弧元，而($\boldsymbol{e}\boldsymbol{t}_1\ \boldsymbol{t}_2$)表示矢量$\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{t}_1$,$\boldsymbol{t}_2$的三矢数积。

Calugareanu[77—79]提出一个问题：若$\Gamma\equiv\Gamma'$，$L(\Gamma,\Gamma')$的意义为何？他取Γ的一个平行曲线，和Γ距离为ε(适当地给了这条曲线的定义)并令$\varepsilon\to 0$，这样，若Γ属于C^3类而且有不等于零的曲率，他发现

$$(1/4\pi)\int_{\Gamma\times\Gamma} du_2 + (1/2\pi)\int_{\Gamma} \tau ds = SL(\Gamma) \qquad (14.87)$$

是一个整数，其中τ为Γ的挠率。整数 SL(Γ)叫做Γ的自绕数。

Pohl[483]给出了 Calugareanu 公式一个简化的证明以及它有关的拓扑问题。White[720]把这些结果推广到高维空间里可微流形的子流形。

(8) Banchoff 与 Pohl 等周不等式。第五章第5节1里的Banchoff与Pohl不等式可以推广到任意维数和余维数。设M为E_n里一个紧致m维有向流形。设P_1,P_2为M的两点，$r=r(P_1,P_2)$表示由P_1到P_2的弦长。设dP_1,dP_2依次为M上在P_1,P_2的体元。这样，Banchoff与 Pohl[20]得到了不等式

$$\int_{M\times M} r^{-m+1} dP_1 \wedge dP_2 - (1+m) O_m c_{m,n} \int \lambda^2 dL_{n-m-1} \geqslant 0,$$

其中λ是L_{n-m-1}受M的环绕数，$c_{m,n}$是一个常数($c_{m,n}=k_{m,m+2}k_{m,m+3}\cdots k_{m,n}$，其中$k_{m,j}=\pi^{-(m+1)/2}\Gamma((j+1)/2)\Gamma((j-m)/2)$)。第二个积分范围是$E_n$里一切$n-m-1$维平面。等号只在下列的款成立：$M$是一个或几个同向叠合球面，或者($m=1$)①它是一个或几个同向叠合圆，每个描绘一定次数。

最后的积分

① 原书作$n=1$。——译者

$$A(M)=c_{m,n}\int\lambda^2 dL_{n-m-1}$$

有下列性质：(a) $n=m+1$时，$A(M)$就是M所包围的体积。(b) 若$M\subset E_n\subset E_N$，则M无论作为E_n或作为E_N的子流形，$A(M)$都相同。(c) $A(M)$具有所谓的再生性：

$$\int A(M\cap L_q)dL_q=b_{m,n,q}A(M),$$

其中$b_{m,n,q}$是常数。细节和其他类似结果见[20]。

(9) **中值和曲率**。设M^n为E_{n+N}里一个(没有边界的) n维紧致可微流形。对于每一点$P\in M^n$，取在P的第q切纤维，即矢量$\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n$；$\partial^2/\partial x_1^2,\partial^2/\partial x_1\partial x_2,\cdots,\partial^2/\partial x_n^2$；$\partial^q/\partial x_1^q,\cdots,\partial^q/\partial x_n^q$所张成的平面，其中$x_i$是$P$的一个邻域里的局部坐标，这个切纤维的维数是

$$\rho(n,q)=\sum_{i=1}^{q}\binom{n+i-1}{i}.$$

$$K^{(1)}_{1,n}(M^n)=\frac{2}{O_{2n-1}}\int_{P_{2n-1}}\nu_{n-1}(y)d\sigma_{2n-1}(y),$$

假定$1\leqslant r\leqslant n+N-1$，$\rho\leqslant n+N-1$，则$M^n$的第$r$个$q$阶全绝对曲率定义如下：

(a) $1\leqslant r\leqslant\rho$的款。设$O$为$E_{n+N}$的固定点，并取一个经过$O$的$n+N-r$维平面$L_{n+N-r[0]}$。设$\Gamma_r$表示$E_{n+N}$里含在某个纤维内而经过纤维基点$P$的$r$维平面$L_r$的集合。交集$\Gamma_r\cap L_{n+N-r[0]}$是一个在$L_{n+N-r[0]}$内的紧致簇，其维数是$\delta=r\rho+n-r(n+N)$。设$\mu(\Gamma_r\cap L_{n+N-r[0]})$为这个簇作为欧氏空间$L_{n+N-r[0]}$的子簇的维数；若$\delta=0$，则$\mu$表示$\Gamma_r$和$L_{n+N-r[0]}$的交点个数；若$\delta<0$，我们令$\mu=0$。这样，对于一切$L_{n+N-r[0]}$的测度$\mu$的中值就叫做$E_{n+N}$里的$M^n$的第$r$个$q$阶全绝对曲率；利用(12.35)，这就是

$$K^q_{r,N}(M^n)=\frac{O_1\cdots O_{n+N-r-1}}{O_r\cdots O_{n+N-1}}$$

$$\times\int_{G_{n+N-r,r}}\mu(\Gamma_r\cap L_{n+N-r[0]})\mathrm{d}L_{n+N-r[0]}.$$

注意右边的系数可代以 $O_1\cdots O_{r-1}/O_{n+N-r}\cdots O_{n+N-1}$，而且它和(12.35)相差一个因子 2，因为现在讨论的是无向 $n+N-r$ 维平面。

(b) $p\leqslant r\leqslant n+N-1$ 的款。现在不考虑含在某第 q 切纤维内的 L_r 集合，而考虑含某个这样的切纤维在内而和 $L_{n+N-r[0]}$ 正交的 L_r 集合。同上面一样，用 Γ_r 表示这个集合，而把那同一个中值叫做 M^n 的第 r 个 q 阶全绝对曲率。这时 $\Gamma_r\cap L_{r+N-r[0]}$ 的维是 $\delta=rp+n-r(n+N)$。

我们考虑一些特款：

(a) $n=N$，$r=1$，$q=1$ 的款有如下的几何解释。设 U_{2n-1} 表示中心在 O 的 $2n-1$ 维幺球面。设 $L_{n[0]}$ 为经过 O 而平行于 M^n 在 $P(\in M^n)$ 的切空间 T_P 的 n 维平面。交集 $U_{2n-1}\cap L_{n[0]}$ 是 U_{2n-1} 的一个 $n-1$ 维大圆。把 U_{2n-1} 的对极点粘合，就得到 $2n-1$ 维椭圆空间 P_{2n-1}，而交集 $U_{2n-1}\cap L_{n[0]}$ 构成 P_{2n-1} 里一个 n 参数 $n-1$ 维平面族，用 C_{n-1} 表示。设 $y\in P_{2n-1}$，而 $\nu_{2n-1}(y)$ 表示 C_{n-1} 中经过 P 的 $n-1$ 维平面的个数；设 η 为 P_{2n-1} 里的超平面而 ν_{2n-1} 表示 C_{n-1} 中含在 η 里的 $n-1$ 维平面的个数。设 $\mathrm{d}\sigma_{2n-1}$ 为 P_{2n-1} 在 y 的体元而 $\mathrm{d}L_{2n-1}(\eta)$ 为 P_{2n-1} 在 η 的超平面密度（见第十七章，第3节）。这样，上述曲率显然等于

$$K^{(1)}_{2n-1,n}=\frac{2}{O_{2n-1}}\int_{L_{2n-1}\subset P_{2n-1}}\nu_{2n-1}(\eta)\mathrm{d}L_{2n-1}(\eta).$$

$n=2$，$N=2$，$r=1$ 时，我们就有 P_3 里的一个线汇 C_1，而在一定意义下，上述两曲率就是线汇 C_1 的平均“阶”和平均“级”

(b) $r=n+N-1$ 时，所得曲率就是陈省身与 Lashof[116]所给了定义的曲率。

(c) 曲线的款，$n=1$。对于曲线，$n=1$，有两种可能：$p=$

N，$r=1$和$\rho=1$，$r=N$，$\rho=N$，$r=1$时，其相应曲率是

$$K^{(N)}_{1,N}(M^1)=\frac{1}{O_N}\int_{G_{N,1}}\nu_1 \mathrm{d}L_{N\,[0]},$$

其中ν_1是E_{N+1}是含在曲线M^1的某第N个切纤维内而和$L_{N\,[0]}$正交的直线数。注意$G_{N,1}$是幺球面U_N而$\mathrm{d}L_{N\,[0]}$是U_N的面元。若$e_1,\cdots,e_N$是M^1的主法矢，不难看出，最后方程右边，除一个因子$1/\pi$外，等于球面曲线$e_{N+1}(s)$（$s=M^1$的弧长参数）的长。这就是，若κ_N为M^1的第N曲率（见[165，第107页]），则

$$K^{(N)}_{1,N}=\frac{1}{\pi}\int_{M^1}|\kappa_N|\mathrm{d}s.$$

对于E_3里的曲线，κ_N是曲线挠率。

在$\rho=1$，$r=N$的有款，有曲率

$$K^{(1)}_{N,N}=\frac{1}{O_N}\int_{G_{1,N}}\nu_N \mathrm{d}L_{1\,[0]},$$

其中ν_N是E_{N+1}里经过M^1某条切线而垂直于$L_{1\,[0]}$的超平面L_N的个数。最后的方程右边，除因子$1/\pi$外，等于曲线$e_1(s)$（M^1的球面象）的长。因此，若κ_1表示M^1的第一曲率，则

$$K^{(1)}_{N,N}(M^1)=\frac{1}{\pi}\int_{M^1}|\kappa_1|\mathrm{d}s.$$

如果我们考虑到，对于每个方向$L_{1\,[0]}$，至少有两个超平面经过M^1的一条切线而垂直于$L_{1\,[0]}$，就可知中值$K^{(1)}_{N,N}\geqslant 2$，因而

$$\int_{M^1}|\kappa_1|\mathrm{d}s\geqslant 2\pi,$$

而这就是一个经典的 Fenchel 不等式[187]。若垂直于任意方向$L_{1\,[0]}$至少有四个超平面经过M^1的一条切线（E_3里有结曲线就是如此），中值$K^{(1)}_{N,N}$就$\geqslant 4$，于是有不等式

$$\int |\kappa_1| ds \geqslant 4\pi,$$

而这是 Fáry[168]的结果。关于细节和补充见[588,590,591]。Slavskii[614]得到与此有关的一些结果。

设M^h为E_n里的一个h维可微紧致流形，它包围在一个半径等于r的球内。一个问题是：求M^h的面积和它的全绝对曲率之间的不等式。例如$n=3$，$h=2$时，就有$F \leqslant (4/\pi) r^2 K$，其中$F$是$M^2$的面积而$K$是它的全绝对曲率(Gauss 曲率)。这个不等式是 Fáry[169]的结果。与此有关，参看[96,97]。

第十五章　E_n 里的运动密度

1.　关于密度的公式

在第十二章的第1节里，我们给出了 E_n 里运动群的体元定义。现在，我们考察正常运动群的细节：正常运动群就是运动群 $x' = ax + b$，其中 a 是正交方阵，而且 $\det a = +1$。像通常那样，这个群的运动密度将用 $\mathrm{d}K$ 表示，它的公式是

$$\mathrm{d}K = \bigwedge_i \omega_i \bigwedge_{j<h} \omega_{jh}, \tag{15.1}$$

其中 $\omega_i = \mathrm{d}x \cdot e_i$，$\omega_{jh} = e_j \cdot \mathrm{d}e_h = -e_h \cdot \mathrm{d}e_j (i,j,h = 1,2,\cdots,n)$ (12.3)。

用 $\mathrm{d}P = \bigwedge \omega_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 表示 E_n 在点 x 的体元，$\mathrm{d}K_{[x]}$ 表示绕 x 的正常转动群（和 SO(n) 同构）的运动密度，就有 (12.13)

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}K_{[x]}. \tag{15.2}$$

注意 $\mathrm{d}K_{[x]}$ 和 $\mathrm{d}\mathfrak{M}_{[x]}$ (12.7)① 是相同的微分齐式。唯一的差别在于 $\mathfrak{M}_{[x]}$ 的总测度为正常转动群总测度的两倍。

设 M^q 为固定 q 维流形，M^r 为作运动的 r 维流形。它们都假定是逐段光滑而属于 C^1 类的，并依次具有有限体积 $\sigma_q(M^q)$ 和 $\sigma_r(M^r)$。设 $q+r \geqslant n$ 并考虑使 $M^q \cap M^r \neq \varnothing$ 的 M^r 的位置。设 $x \in M^q \cap M^r$，并选取正交幺矢 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，使其中 $e_1, e_2, \cdots, e_{r+q-n}$ 和 $M^q \cap M^r$ 相切，$e_{r+q-n+1}, \cdots, e_r$ 和 M^r 相切。设 $b_1, \cdots, b_{n-r}$ 为正交幺矢，而且 $e_1, e_2, \cdots, e_{r+q-n}, b_1, \cdots, b_{n-r}$ 在 x 张成 M^q 的 q 维切平面。由于 $x \in M^q$，我们有

---

① 原文这里用的记号是 $\mathrm{d}M_{[x]}$，据(12.7)改。——译者

$$\mathrm{d}x = \sum_{h=1}^{r+q-n} \alpha_h e_h + \sum_{j=1}^{n-r} \beta_j b_j, \tag{15.3}$$

其中 α_h 和 β_j 是一次齐式。于是

$$\omega_{r+h} = \mathrm{d}x \cdot e_{r+h} = \sum_{j=1}^{n-r} \beta_j (b_j \cdot e_{r+h}), \quad h = 1, 2, \cdots, n-r, \tag{15.4}$$

而

$$\bigwedge_{h=1}^{n-r} \omega_{r+h} = \Delta \bigwedge_{j=1}^{n-r} \beta_j, \tag{15.5}$$

其中 Δ 是 $n-r$ 阶行列式

$$\Delta = |(b_j \cdot e_{r+h})| \quad (j, h = 1, 2, \cdots, n-r). \tag{15.6}$$

外积 $\bigwedge \beta_j (j = 1, 2, \cdots, n-r)$ 是 M^q 上在与 $M^q \cap M^r$ 正交的 $n-r$ 维切平面方向的 $n-r$ 维体元。因此，若用 $\mathrm{d}\sigma_{q+r-n}(x)$ 表示 $M^q \cap M^r$ 在 x 的体元，则可令

$$\mathrm{d}\sigma_{q+r-n}(x) \bigwedge_{j=1}^{n-r} \beta_j = \mathrm{d}\sigma_q(x), \tag{15.7}$$

其中 $\mathrm{d}\sigma_q(x)$ 是 M^q 在 x 的 q 维体元。

另一方面，外积 $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_r$ 是 M^r 在 x 的体元。故若用 $\mathrm{d}\sigma_{r+q-n}(x) \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r$ 乘(15.5)，则利用(15.7)，得

$$\mathrm{d}\sigma_{r+q-n}(x) \bigwedge_{i=1}^{q} \omega_i = \Delta \mathrm{d}\sigma_q(x) \wedge \mathrm{d}\sigma_r(x). \tag{15.8}$$

再乘以 $\mathrm{d}K_{[x]} = \bigwedge \omega_{jh} \ (j<h; j, h = 1, 2, \cdots, n)$，就得

$$\mathrm{d}\sigma_{r+q-n}(x)\mathrm{d}K = \Delta \mathrm{d}\sigma_q(x) \wedge \mathrm{d}\sigma_r(x) \wedge \mathrm{d}K_{[x]}. \tag{15.9}$$

这是和(14.64)类似的很有用的微分公式。当 $r+q-n=0$ 时，我们有

$$\mathrm{d}K = \Delta \mathrm{d}\sigma_q(x) \wedge \mathrm{d}\sigma_r(x) \wedge \mathrm{d}K_{[x]}. \tag{15.10}$$

注意 Δ 只依赖于幺矢 e_{r+h} 和 b_j $(h, j = 1, 2 \cdots, n-r)$，间之的角而与 x 点无关。

下面是另一个重要的微分公式。设 L_h 为经过 x 而为 $e_1, \cdots, e_h$ 所张成的 h 维平面。我们有

$$\mathrm{d}L_h = \bigwedge_i \omega_i \bigwedge_{j,k} \omega_{jk} \quad (i = 1, 2, \cdots, h;\ j, k = h+1, \cdots, n). \tag{15.11}$$

设 $\mathrm{d}K^h$ 表示 L_h 里的运动密度，即

$$\mathrm{d}K^h = \bigwedge_j \omega_j \bigwedge_{s<m} \omega_{sm}, \qquad j, s, m = 1, 2, \cdots, h, \tag{15.12}$$

并令 $\mathrm{d}K^{n-h}_{[x]}$ 表示在垂直于 L_h 的 $n-h$ 维平面里绕 x 的运动密度（按(12.7)所给定的转动密度）。则

$$\mathrm{d}K^{n-h}_{[x]} = \bigwedge_{i<k} \omega_{ik}, \qquad i, k = h+1, \cdots, n. \tag{15.13}$$

由(15.1)，(15.11)，(15.12)，(15.13)可得

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}L^*_h \bigwedge \mathrm{d}K^h \bigwedge \mathrm{d}K^{n-h}_{[x]}, \tag{15.14}$$

这些用于 $h = 1, 2, \cdots, n-1$。我们用了记号 L^*_h 来表示 L_h 应假定是"有向的"，因而当积分(15.14)右边时，将出现因子 2。

我们留给读者去证明类似(15.14)的下述公式。设 $L_{h[0]}$ 为经过 O 的 h 维平面，它平行于 $(x, e_1, \cdots, e_h)$ 所确定的 h 维平面，而 $L_{n-h[0]}$ 为经过 O 而垂直于 $L_{h[0]}$ 的 $n-h$ 维平面。则

$$\mathrm{d}K = L^*_{h[0]} \bigwedge \mathrm{d}K^h \bigwedge \mathrm{d}K^{n-h}, \tag{15.15}$$

其中 $\mathrm{d}K^h$ 和 $\mathrm{d}K^{n-h}$ 依次表示在 $L_{h[0]}$ 和 $L_{n-h[0]}$ 上的运动密度。

2. 体积 $\sigma_{r+q-n}(M^r \cap M^q)$ 的积分

对于 M^r 的一切位置对(15.9)积分，得

$$\int_{M^q \cap M^r \neq \varnothing} \sigma_{r+q-n}(M^q \cap M^r)\mathrm{d}K = c\sigma_q(M^q)\sigma_r(M^r), \tag{15.16}$$

其中 c 是一个常数（与 x 无关，与流形 M^q, M^r 也无关），它决定于维数 q 与 r，并且为

$$c=\int \Delta \mathrm{d}K_{[x]}$$

所确定，这个积分的范围是绕 x 的一切 M^r 的位置。为了计算 c，假设 M^r 是 r 维平面 L_r 里的一个有界域。由(15.14)可得

$$\int_{M^q\cap M^r\neq\varnothing}\sigma_{r+q-n}(M^q\cap M^r)\mathrm{d}L_r^*\wedge \mathrm{d}K^r\wedge \mathrm{d}K_{[x]}^{n-r}$$

$$=c\sigma_q(M^q)\sigma_r(M^r), \tag{15.17}$$

其中我们可以令 $\mathrm{d}K^r=\mathrm{d}P^r\wedge \mathrm{d}K_{[x]}^r$，而 $\mathrm{d}P^r$ 则是 L_r 在 x 的体元。令 L_r 和 x 固定并应用(12.10)，记住右边须除以 2，就得

$$\int \mathrm{d}K_{[x]}^r=O_{r-1}\cdots O_1,\qquad \int \mathrm{d}K_{[x]}^{n-r}=O_{n-r-1}\cdots O_1, \tag{15.18}$$

其中积分范围都是绕 x 的一切 M^r 的位置。此外，$\mathrm{d}P^r$的积分(L_r 固定时)是体积 $\sigma_r(M^r)$，故(15.17)化为

$$O_{r-1}\cdots O_1O_{n-r-1}\cdots O_1\int_{M^q\cap M^r\neq\varnothing}\sigma_{r+q-n}(M^q\cap M^r)\mathrm{d}L_r^*$$

$$=c\sigma_q(M^q). \tag{15.19}$$

于是应用(14.69)，就得 $c=O_n\cdots O_1O_{r+q-n}(O_rO_q)^{-1}$，而最后结果是

$$\int_{M^q\cap M^r\neq\varnothing}\sigma_{r+q-n}(M^r\cap M^q)\mathrm{d}K$$

$$=\frac{O_n\cdots O_1O_{r+q-n}}{O_qO_r}\sigma_q(M^q)\sigma_r((M^r). \tag{15.20}$$

当 $r+q-n=0$ 时，$\sigma_{r+q-n}(M^q\cap M^r\ )$表示 $M^q\cap M^r$的交点数，这时(15.20)可以写成

$$\int_{M^q\cap M^r\neq\varnothing}N(M^r\cap M^{n-r})\mathrm{d}K$$

$$=\frac{O_n\cdots O_1O_0}{O_rO_{n-r}}\sigma_r(M^r)\sigma_{n-r}(M^{n-r}). \tag{15.21}$$

多个动流形的情况. 设 M^q 为 E_n 里固定 q 维流形, 并考虑 h 个动流形 $M^{r_1},\cdots,M^{r_h}$, 其维数依次是 $r_1,\cdots,r_h$. 假定 $q+r_1+\cdots+r_h-nh\geqslant 0$, 并用 $\mathrm{d}K_i$ 表示 M^{r_i} 的运动密度, 通过归纳法, 我们推得

$$\int \sigma_{q+r_1+\cdots+r_h-nh}(M^q\cap M^{r_1}\cap\cdots\cap M^{r_h})\mathrm{d}K_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}K_h$$

$$=\frac{(O_n\cdots O_1)^h O_{q+r_1+\cdots+r_h-nh}}{O_q O_{r_1}\cdots O_{r_h}}$$

$$\times\sigma_q(M^q)\sigma_{r_1}(M^{r_1})\cdots\sigma_{r_h}(M^{r_h}), \tag{15.22}$$

其中积分范围是令 $M^q\cap M^{r_1}\cap\cdots\cap M^{r_h}\neq\varnothing$ 的一切 M^{r_i} 的位置.

考虑运动中的超球面的款是有意义的. 设 $r_1=r_2=\cdots=r_h=n-1$, 并设每个 M^{r_i} 是半径等于 R 的超球面 Σ_i. 可以取超球面的中心 P_i 为各动标原点. 于是由 $\mathrm{d}K_i=\mathrm{d}P_i\wedge\mathrm{d}K_{i[x]}$, 并由于 $\mathrm{d}K_{i[x]}$ 的积分等于 $O_{n-1}\cdots O_1$(12.10), 得

$$\int\sigma_{q-h}(M^q\cap\Sigma_1\cap\cdots\cap\Sigma_h)\mathrm{d}P_1\wedge\mathrm{d}P_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}P_h$$

$$=\frac{O_n^h O_{q-h}}{O_q}R^{(n-1)h}\sigma_q(M^q). \tag{15.23}$$

这个公式适用于 $h=1,2,\cdots,q$. 当 $h=q$ 时, 被积函数

$$\sigma_0(M^q\cap\Sigma_1\cap\cdots\cap\Sigma_h)\text{ 是 }M^q\cap\Sigma_1\cap\cdots\cap\Sigma_h$$

的交点数, 可以用 $N_{12\cdots q}$ 表示, 而(15.23)变成

$$\int N_{12\cdots q}\mathrm{d}P_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}P_q$$

$$=(2O_n^q/O_q)R^{q(n-1)}\sigma_q(M^q), \tag{15.24}$$

其中积分范围是整个空间 $E_n\times E_n\times\cdots\times E_n$($q$ 个因子), 而当

$M^q \cap \Sigma_1 \cap \cdots \cap \Sigma_q = \varnothing$时，$N_{12\cdots q} \neq 0$。下面是一些特款：

(a) $n=2$，$q=1$。这时 M^1是平面上一条曲线而(15.24)化为

$$\int N_1 \mathrm{d}P_1 = 4LR,$$

其中 L 表示 M^1 的长。

(b) $n=3$，$q=1$。这时 M^1 是三维空间的曲线而(15.24)化为

$$\int N_1 \mathrm{d}P_1 = 2\pi R^2 L.$$

我们假定了 M^q 是逐段光滑而属于 C^1 的流形。反过来，可以利用(15.24)来得到 E_n 里一个闭联集 M^q 的 q 维测度 $\sigma_q(M^q)$ 的定义，即通公式

$$\sigma_q(M^q) = \frac{O_q}{2O_n^q R^{q(n-1)}}\int N_{12\cdots q}\mathrm{d}P_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}P_q, \quad (15.25)$$

只要右边积分存在。应用积分几何来给出闭联集的 q 维测度的有 **Federer**[174,175]，**Hadwiger**[274]，Nöbeling[452, 453]，Santaló[559]和 Maak[380](见 Federer 的书[178])。

若 M^r 是单位长线段($r=1$)而 M^{n-1} 是含于 E_n 的一个区域内，则按照(15.21)，$M^1 \cap M^{n-1}$ 中交点数的期望值是 $E(N) = (O_n/\pi O_{n-1})\sigma_{n-1}(M^{n-1})/V$。Kulle 与 Reich[350] 曾经用这个公式来给出一个超曲面的面积定义。

3. 一个微分公式

积分几何中一个最重要的结果是所谓的基本公式，在第 7 章中，我们已经看到它在平面的款。在这里，我们的目的是把它推广到 n 维欧氏空间。我们在下节将给出Chern(陈省身)[108]的证明，它是 Blaschke 对 $n=3$的款证明[42]的推广(参见[586])。但我们首先要证明一个有趣的微分公式。

设 S_0 和 S_1 为 E_n 里两个超曲面，它们逐段光滑而属于 C^2 类。假设 S_0 固定而 S_1 在运动．其运动密度是 dK_1。考虑 $S_0\cap S_1$ 是 $n-2$ 维流形时的 S_1 的一个一般位置。设 $x\in S_0\cap S_1$，并考虑幺模正交标架$(x;e_1,\cdots,e_n)$，其中 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-2}$ 张成 $S_0\cap S_1$ 的 $n-2$ 维切平面，而 e_{n-1},e_n 依次是 S_1 在 x 的切矢和法矢．设幺矢 e'_{n-1},e'_n 依次是 S_0 在 x 的切矢和法矢，而且$(x;e_1,\cdots,e_{n-2},e'_{n-1},e'_n)$是以 x 为原点的另一个幺模正交标架。运动密度

$$dK_1=\bigwedge_i(dx\cdot e_i)\bigwedge_{h<j}(de_h\cdot e_j),\qquad i,j,h=1,2,\cdots,n-1。\tag{15.26}$$

由于我们总是考虑密度的绝对值，符号问题不存在。作为定义，我们令 S_1 上的运动密度(即标架集合 $(x;e_1,\cdots,e_{n-1},e_n)$ 的密度，其中 e_n 是 S_1 的幺法矢)为

$$dT_1=\bigwedge_i(dx\cdot e_i)\bigwedge_{h<j}(e_h\cdot de_j)\quad i,h,j=1,2,\cdots,n-1,\tag{15.27}$$

因而

$$dK_1=dT_1\wedge(dx\cdot e_n)\wedge(de_1\cdot e_n)\wedge\cdots\wedge(de_{n-1}\cdot e_n).\tag{15.28}$$

与此类似，S_0 上的运动密度(即和 S_0 相切的标架$(x;e_1,\cdots,e_{n-2},e_{n-1},e_n)$的密度)的定义是

$$dT_0=\bigwedge_i(dx\cdot e_i)\bigwedge_{h<j}(e_h\cdot de_j)\wedge(dx\cdot e'_{n-1})\wedge(de_1\cdot e'_{n-1})\wedge\cdots\wedge(de_{n-2}\cdot e'_{n-1}),\tag{15.29}$$

其中下标 $i,h,j=1,2,\cdots,n-2$。

在 $S_0\cap S_1$ 上的运动密度(即附着于 $S_0\cap S_1$ 的标架$(x;e_1,\cdots,e_{n-2})$的密度)是

$$dT_{01}\bigwedge_i(dx\cdot e_i)\bigwedge_{h<j}(e_h\cdot de_j),\qquad i,h,j=1,2,\cdots,n-2.\tag{15.30}$$

于是 dT_0 可以写成

$$dT_0 = dT_{01} \wedge (dx \cdot e'_{n-1}) \wedge (de_1 \cdot e'_{n-1}) \wedge \cdots \wedge (de_{n-2} \cdot e'_{n-1}). \tag{15.31}$$

设 ϕ 为 e'_n 和 e_n 之间的角. 在 e_n 和 e'_n 所确定的垂直于 $S_0 \cap S_1$ 的平面上,

$$e_n = \sin\phi e_{n-1} + \cos\phi e'_n, \qquad e_{n-1} = \cos\phi e'_{n-1} - \sin\phi e'_n, \tag{15.32}$$

因而 $\quad dx \cdot e_n = \sin\phi(dx \cdot e'_{n-1}) + \cos\phi(dx \cdot e'_n)$,

$$de_i \cdot e_n = \sin\phi(de_i \cdot e_{n-1}) + \cos\phi(de_i \cdot e'_{n-1}),$$

$$i = 1, 2, \cdots, n-2,$$

$$de_{n-1} \cdot e_n = -d\phi - e'_{n-1} \cdot de'_n. \tag{15.33}$$

由于 e'_n 垂直于 S_0, 故 $dx \cdot e'_n = 0$, 又由于 S_0 是固定超曲面, 故幺矢 e'_n 与 S_1 的位置无关, 因而

$$de_i \cdot e'_n = -e_i \cdot de'_n = 0, \qquad de'_{n-1} \cdot e'_n = 0.$$

于是, 若不计较符号, 由(15.28), (15.33)可得

$$dK_1 = \sin^{n-1}\phi d\phi \wedge dT_1 \wedge (dx \cdot e'_{n-1}) \wedge (de_1 \cdot e'_{n-1}) \wedge \cdots \wedge (de_{n-2} \cdot e'_{n-1}). \tag{15.34}$$

用 dT_{01} 乘这式两边, 利用(15.31), 就得

$$dT_{01} \wedge dK_1 = \sin^{n-1}\phi d\phi \wedge dT_1 \wedge dT_0, \tag{15.35}$$

这就是所要求的公式. 注意对于一切令 $S_0 \cap S_1 \neq \varnothing$ 的 S_1 位置积分, 就得关于 $r = q = n-1$ 的款的(15.20).

4. 运动基本公式

现在可以按照陈省身的方法来证明运动基本公式了. 设 D_0, D_1 为 E_n 的两个域, 假定其边界为属于 C^3 类的超曲面 $\partial D_0, \partial D_1$. 假定 D_0 固定而含 D_1 作运动, 还假定 D_0 和 D_1 有下面的性质: 对于 D_1 的一切位置, 交集 $D_0 \cap D_1$ 有有限多个分支. 这样, 若用 dK_1 表示 D_1 的运动密度, 而 M_i^0, M_i^1 依次是 ∂D_0 和 ∂D_1 的第 i 个中曲率积分, 则 E_n 里的运动主要公式是

$$\int_{D_0 \cap D_1 \neq \varnothing} \chi(D_0 \cap D_1) \mathrm{d}K_1$$

$$= O_1 \cdots O_{n-2}\Big[O_{n-1}\chi(D_0)V_1 + O_{n-1}\chi(D_1)V_0$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}M_h^0 M_{n-h-2}^1\Big], \qquad (15.36)$$

其中 χ 表示 Enler-Poincaré 示性数而 V_0, V_1 依 次 为 D_0, D_1 的体积。

为了证明(15.36)，我们用到(13.38)，即

$$\chi(D_0 \cap D_1) = (1/O_{n-1})M_{n-1}(\partial(D_0 \cap D_1)), \qquad (15.37)$$

其中 $M_{n-1}(\partial(D_0 \cap D_1))$是 $\partial(D_0 \cap D_1)$的 球 面 象 的 体 积. 边 界 $\partial(D_0 \cap D_1)$包含有尽多块超曲面 $\partial D_0 \cap D_1$ 和 $D_0 \cap \partial D_1$，它们在$\partial D_0 \cap \partial D_1$ 里相遇，而 $\partial D_0 \cap \partial D_1$ 则是$n-2$维棱(曲面)所构成。我们有

$$M_{n-1}(\partial(D_0 \cap D_1)) = M_{n-1}(\partial D_0 \cap D_1) + M_{n-1}(D_0 \cap \partial D_1)$$
$$+ M_{n-1}(\partial D_0 \cap \partial D_1). \qquad (15.38)$$

右边最后项对应于 $\partial D_0 \cap \partial D_1$ 的一些法线的球面象，这 些法线都是在 $\partial D_0 \cap \partial D_1$ 的点处，∂D_0 和 ∂D_1的向外法线所作的角中. 为了计算这个球面象的体积，我们采用上节记号并进行如下。设 $\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{e}'_n$ 依次为 ∂D_0 和∂D_1 的幺法矢，并用 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 表示它们夹角的二等分线方向的两个幺矢。设 ϕ 为 $\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}'_n$ 间的角，则

$$\boldsymbol{e}_n = \left(\cos\frac{\phi}{2}\right)\boldsymbol{v} - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{e}'_n = \left(\cos\frac{\phi}{2}\right)\boldsymbol{v} + \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)\boldsymbol{w},$$
$$(15.39)$$

因而

$$\boldsymbol{v} = [2\cos(\phi/2)]^{-1}(\boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{e}'_n), \qquad \boldsymbol{w} = [2\sin(\phi/2)]^{-1}(\boldsymbol{e}'_n - \boldsymbol{e}_n).$$
$$(15.40)$$

设 ξ 为 $\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{e}'_n$ 之间的幺变矢。设 α 表示 ξ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的角，而且对于 $-\phi/2 \leqslant \alpha \leqslant \phi/2$，令幺矢 η 确定于

$$\xi = \cos\alpha\boldsymbol{v} + \sin\alpha\boldsymbol{w}, \qquad \eta = -\sin\alpha\,\boldsymbol{v} + \cos\alpha\boldsymbol{w}. \qquad (15.41)$$

幺球面 U_{n-1} 上对应于方向 ξ 的体元是

$$du_{n-1} = (d\xi \cdot e_1) \wedge (d\xi \cdot e_2) \wedge \cdots \wedge (d\xi \cdot e_{n-1}) \wedge d\alpha$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n-2} [\cos \alpha (dv \cdot e_i) + \sin \alpha (dw \cdot e_i)] d\alpha. \quad (15.42)$$

由(15.40)可得

$$\cos \alpha (dv \cdot e_i) + \sin \alpha (dw \cdot e_i)$$

$$= \frac{\sin(\phi/2 - \alpha)}{\sin(\phi)} (de_n \cdot e_i) + \frac{\sin(\phi/2 + \alpha)}{\sin(\phi)} (de' \cdot e_i), \quad (15.43)$$

因而

$$du_{n-1} = \frac{1}{\sin^{n-2}(\phi)} \bigwedge_{i=1}^{n-2} \left[\sin\left(\frac{\phi}{2} - \alpha\right)(de_n \cdot e_i) \right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{\phi}{2} + \alpha\right)(de_n \cdot e_i) \right] \wedge d\alpha. \quad (15.44)$$

在 x 点引进 ∂D_1 上沿主方向的幺切矢 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 和 ∂D_0上沿主方向的幺切矢 $v'_1, \cdots, v'_{n-1}$。我们有

$$e_i = \sum_{h=1}^{n-1} c_{ih} v_h = \sum_{h=1}^{n-1} c'_{ih} v'_h \quad (i = 1, 2, \cdots, n-2),$$

$$e_{n-1} = \sum_{h=1}^{n-1} c_{n-1,h} v_h, \qquad e'_{n-1} = \sum_{h=1}^{n-1} c'_{n-1,h} v'_h. \quad (15.45)$$

由于矢组$\{e_i, e'_{n-1}\}$, $\{v_h\}$, $\{v'_h\}$都是幺模正交系，方阵(c_{ih})和(c'_{ih})都是正交方阵，因此，

$$v_h = \sum_{i=1}^{n-1} c_{ih} e'_i, \qquad v'_h = \sum_{i=1}^{n-2} c'_{ih} e_i + c'_{n-1,h} e'_{n-1}. \quad (15.46)$$

根据 E_n 里关于超曲面的Rodrigues方程，$v_h \cdot de_n = -\kappa_h (dx \cdot v_h)$，其中 κ_h 表示 ∂D_1 沿 v_h 方向的主曲率。于是对于$i = 1, 2, \cdots, n-1$,

$$de_n \cdot e_i = \sum_{h=1}^{n-1} c_{ih} (de_n \cdot v_h) = -\sum_{h=1}^{n-1} c_{ih} \kappa_h (dx \cdot v_h)$$

$$= -\sum_{h,\ j=1}^{n-1} c_{ih}\kappa_h c_{jh}(\mathrm{d}x \cdot \boldsymbol{e}_j). \tag{15.47}$$

同样，对于 ∂D_0，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_n \cdot \boldsymbol{e}_i = \sum_{h=1}^{n-1} c'_{ih}\kappa'_h\left(\sum_{j=1}^{n-2} c'_{jh}(\mathrm{d}x \cdot \boldsymbol{e}_j) + c'_{n-1,h}(\mathrm{d}x \cdot \boldsymbol{e}'_{n-1})\right). \tag{15.48}$$

为了利用(15.44)来计算 $\mathrm{d}u_{n-1}$，注意 x 在 $\partial D_0 \cap \partial D_1$ 上变动，因而 $\mathrm{d}x \cdot \boldsymbol{e}_{n-1} = 0$，$\mathrm{d}x \cdot \boldsymbol{e}'_{n-1} = 0$，故

$$\sin\left(\frac{\phi}{2} - \alpha\right)(\mathrm{d}\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_i) + \sin\left(\frac{\phi}{2} + \alpha\right)(\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_n \cdot \boldsymbol{e}_i)$$

$$= -\sum_{j=1}^{n-2}\left[\sin\left(\frac{\phi}{2} - \alpha\right)\sum_{h=1}^{n-1} c_{ih}c_{jh}\kappa_h\right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{\phi}{2} + \alpha\right)\sum_{h=1}^{n-1} c'_{ih}c'_{jh}\kappa'_h\right](\mathrm{d}x \cdot \boldsymbol{e}_j). \tag{15.49}$$

代入(15.44)，注意$(\mathrm{d}x \cdot \boldsymbol{e}_1) \wedge (\mathrm{d}x \cdot \boldsymbol{e}_2) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}x \cdot \boldsymbol{e}_{n-1})$是 $\partial D_0 \cap \partial D_1$ 的体元 $\mathrm{d}\sigma_{n-2}$，就得

$$\mathrm{d}u_{n-1} = \frac{H}{\sin^{n-2}(\phi)}\mathrm{d}\sigma_{n-2} \wedge \mathrm{d}\alpha, \tag{15.50}$$

其中 H 为 $n-2$ 阶行列式，其元素是

$$H_{ij} = -\sin\left(\frac{\phi}{2} - \alpha\right)\sum_{h=1}^{n-1} c_{ih}c_{jh}\kappa_h - \sin\left(\frac{\phi}{2} + \alpha\right)\sum_{h=1}^{n-1} c'_{ih}c'_{jh}\kappa'_h. \tag{15.51}$$

因此，H 可以写成

$$H = \sum_{p=0}^{n-2} H_p \sin^{n-2-p}\left(\frac{\phi}{2} - \alpha\right)\sin^p\left(\frac{\phi}{2} + \alpha\right), \tag{15.52}$$

其中

$$H_p = \sum_{i_h, j_m} A_{i_1 \cdots i_q j_1 \cdots j_p} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_q} \kappa'_{j_1} \cdots \kappa'_{j_p}, \qquad (15.53)$$

其中 $p+q=n-2$。

系数 $A_{i_1 \cdots i_q j_1 \cdots j_p}$ 是 c_{ih}, c'_{ih} 的函数，而取和的范围是 $(i_1, \cdots, i_q)$ 和 $(j_1, \cdots, j_p)$ 的一切组合。这就是说，在 H 里，只有乘积 $\kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_q} \kappa'_{j_1} \cdots \kappa'_{j_p}$ 是依赖于 $\partial D_0, \partial D_1$ 的，其系数则只依赖于 ∂D_1 绕 x 点的位置，它们对于一切超曲面偶 $\partial D_0, \partial D_1$ 是一样的。

由于 $M_{n-1}(\partial D_0 \cap \partial D_1)$ 等于超曲面 $\partial(D_0 \cap D_1)$ 对应于 $n-1$ 维棱曲面 $\partial D_0 \cap \partial D_1$ 的球面象体积，根据(15.50)，

$$M_{n-1}(\partial D_0 \cap \partial D_1) = \int \frac{H}{\sin^{n-2}(\phi)} d\sigma_{n-2} \wedge d\alpha, \qquad (15.54)$$

其中积分范围对于 α 是 $-\Phi/2 \leqslant \alpha \leqslant \Phi/2$，而对于其他变数则是在 $\partial D_0 \cap \partial D_1$ 上。利用(15.35)，并注意密度(15.30)可以写成

$$dT_{01} = d\sigma_{n-2} \wedge du_{n-3} \wedge \cdots \wedge du_1,$$

就得

$$\int_{\partial D_0 \cap \partial D \neq \varnothing} M_{n-1}(\partial D_0 \cap \partial D_1) dK_1$$

$$= (O_{n-3} \cdots O_1)^{-1} \int_{\partial D_0 \cap \partial D_1 \neq \varnothing} H \sin\phi d\phi \wedge d\alpha \wedge dT_1 \wedge dT_2. \qquad (15.55)$$

在 ∂D_0 和 ∂D_1 上的密度 dT_0 和 dT_1 依次是 $dT_0 = d\sigma^0_{n-1} \wedge du_{n-2} \wedge \cdots \wedge du_1$ 和 $dT_1 = d\sigma^1_{n-1} \wedge du_{n-2} \wedge \cdots \wedge du_1$。先固定 x，对(15.55)在 ∂D_1 绕 x 的一切位置范围上积分，然后令 x 在 ∂D_0 上变动，则借助于(15.52)和(15.53)，得

$$\int_{\partial D_0 \cap \partial D_1 \neq \varnothing} M_{n-1}(\partial D_0 \cap \partial D_1) dK_1 = \sum_{p=0}^{n-2} c_p M^0_p M^1_{n-2-p}, \qquad (15.56)$$

其中 c_p 是常数而 M^0_p, M^1_{n-2-p} 依次是 ∂D_0 和 ∂D_1 的中曲率积分。

还需要求(15.38)右边第一和第二项的积分。为此，设 P 为

$\partial D_0 \cap \partial D_1$ 上一点，并令 $\mathrm{d}u_{n-1}(P)$ 表示 P 的球面象的体元。固定 D_1，然后令 P 在 $\partial D_0 \cap D_1$ 变动，得

$$\int_{P \in \partial D_0 \cap D_1} \mathrm{d}u_{n-1}(P) \wedge \mathrm{d}K_1 = \int_{D_0 \cap D_1 \neq \varnothing} M_{n-1}(\partial D_0 \cap D_1)\mathrm{d}K_1. \tag{15.57}$$

若固定 P，然后令 D_1 绕 P 转动，再令 P 在 D_1 和 ∂D_0 上变动，又得

$$\int_{P \in \partial D_0 \cap D_1} \mathrm{d}u_{n-1} \wedge \mathrm{d}K_1 = O_{n-1} \cdots O_1 V_1 M_{n-1}^0, \tag{15.58}$$

其中 $M_{n-1}^0 = M_{n-1}(\partial D_0)$，而 V_1 表示 D_1的体积。于是由(15.57)和(15.58)，得

$$\int_{D_0 \cap D_1 \neq \varnothing} M_{n-1}(\partial D_0 \cap D_1)\mathrm{d}K_1 = O_{n-1} \cdots O_1 V_1 M_{n-1}^0, \tag{15.59}$$

其中 V_1 表示 D_1 的体积。

同样，根据运动测度在运动逆转下的不变性，

$$\int_{D_0 \cap D_1 \neq \varnothing} M_{n-1}(D_0 \cap \partial D_1)\mathrm{d}K_1 = O_{n-1} \cdots O_1 V_0 M_{n-1}^1, \tag{15.60}$$

其中 V_0 表示 D_0 的体积而 $M_{n-1}^1 = M_{n-1}(\partial D_1)$。由 (15.37)，(15.38)，(15.56)，(15.59)，(15.60)，就得

$$\int_{D_0 \cap D_1 \neq \varnothing} \chi(D_0 \cap D_1)\mathrm{d}K_1$$

$$= O_{n-1} \cdots O_1 (V_1 \chi_0 + V_0 \chi_1) + \sum_{p=0}^{n-2} c_p M_p^0 M_{n-2-p}^1. \tag{15.61}$$

剩下来的是确定常数 c_p。可以取一个凸体为 D_0，一个半径等于 ρ 的超球为 D_1。这时 $\chi(D_0 \cap D_1) = 1$，$\chi_0 = \chi_1 = 1$，而(15.61)给出

$$V_{1\rho} O_{n-1} \cdots O_1 = O_{n-1} \cdots O_1 (V_1 + V_0) + \sum_{p=1}^{n-2} c_p M_p^0 M_{n-2-p}^1, \tag{15.62}$$

其中 $V_{1\rho}$ 表示 D_0 的平行体的体积，这个平行体和 D_0 的距离是 ρ。和(13.44)比较，得

$$c_p = \frac{O_{n-2}\cdots O_1}{n}\binom{n}{p+1}^{①},$$

而证明完成。

5. 关于凸集的基本公式

(1) 若 D_0, D_1 是凸体，则 $\chi(D_0) = \chi(D_1) = \chi(D_0 \cap D_1) = 1$，而基本公式化为：

$$\int_{D_0 \cap D_1 \neq \varnothing} \mathrm{d}K_1 = O_{n-2}\cdots O_1 \left[O_{n-1}(V_0 + V_1) + \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^0 M_{n-2-h}^1 \right]. \qquad (15.63)$$

若引进截测积分 W_h，则上式可以写成

$$\int_{D_0 \cap D_1 \neq \varnothing} \mathrm{d}K_1 = O_{n-2}\cdots O_1 \sum_{h=0}^{n} n \binom{n}{h} W_h^0 W_{n-h}^1. \qquad (15.64)$$

虽然我们证明(15.63)时，假定了 D_0, D_1 的边界属于 C^2类，但由于任何凸体都可以用光滑凸体逼近（实际上可以用边界为解析流形的凸体逼近[63]），而截测积分又是连续泛函，可见(15.64)对于 E_n 里任意一对凸集都适用。

从几何概率的观点看，公式(15.64)可以作如下解释：若 D，D_0 为凸体而 $D \subset D_0$，一个和 D_0 相交的随机凸体 D_1 也和D 相交的概率是

$$p = \frac{\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} W_h W'_{n-h}}{\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} W_h^0 W'_{n-h}}, \qquad (15.65)$$

其中W_i, W_i^0, W_i^1依次是D, D_0, D_1的截测积分。

---

① 原书作 $c_p = \frac{O_{n-2}\cdots O_1}{r+1}\binom{n-1}{r}$。——译者

(2) 若D_0为m个全等而互不相交的凸体 K_0 所构成而D_1为凸体K_1，则$\chi(D_0\cap D_1)=N$，其中N表示和 K_1 相交的凸体 K_0 的个数，这时基本公式化为

$$\int N\mathrm{d}K_1=O_{n-2}\cdots O_1 m\left[O_{n-1}(V_0+V_1)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}M_h^0 M_{n-2-h}^1\right]. \qquad (15.66)$$

6. 关于中曲率积分的中值

我们继续前几节的探讨。我们要计算积分

$$\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing} M_{q-1}(\partial(D_0\cap D_1))\mathrm{d}K_1,\quad q=1,2,\cdots,n-1. \qquad (15.67)$$

考虑D_0和D_1为凸体的款，这时基本公式是(15.63)，若D_0为含在一个 q 维平面L_q里的 q 维凸集D_0^q，公式(15.63)仍然适用，但中曲率积分M_h^0是第 7 章第 7 节所给出的极值。因此，

$$\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\mathrm{d}K_1$$

$$=O_{n-2}\cdots O_1\left[O_{n-1}V_1+\frac{\binom{n}{n-q}}{n\binom{n-1}{q}}O_{n-q-1}\sigma_q(D_0^q)M_{q-1}^1\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\sum_{h=n-q}^{n-2}\binom{n}{h+1}\frac{\binom{q-1}{h+q-n}}{\binom{n-1}{h}}\frac{O_h}{O_{h+q-n}}M_{h+q-n}^{0(q)}M_{n-2-h}^1\right], \qquad (15.68)$$

其中$\sigma_q(D_0^q)$表示D_0^q的 q 维体积而$M_{h+q-n}^{0(q)}$表示作为 L_q 里的一个

凸体的D_0^q的边界的第$h+q-n$个中曲率积分。为了计算(15.67)，我们采用下面的方法。设D_0, D_1为凸体，令D_0固定而D_1运动，其运动密度是dK_1。设L_q为一个作运动的q维平面，并考虑积分

$$I = \int_{D_0 \cap D_1 \cap L_q \neq \varnothing} dK_1 \wedge dL_q. \tag{15.69}$$

先令D_1固定，则根据(14.2)，

$$I = \frac{O_{n-2} \cdots O_{n-q-1}}{(n-q) O_{q-1} \cdots O_0} \int_{D_0 \cap D_1 \neq \varnothing} M_{q-1}(\partial(D_0 \cap D_1)) dK_1, \tag{15.70}$$

然后令L_q固定，对dK_1积分，则根据(15.68)，

$$I = O_{n-2} \cdots O_1 \int \Bigg[O_{n-1} V_1 + \frac{\binom{n}{n-q}}{n\binom{n-1}{q}} O_{n-q-1} \sigma_q(D_0 \cap L_q) M^1_{q-1}$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{h=n-q}^{n-2} \binom{n}{h+1} \frac{\binom{q-1}{h+q-n}}{\binom{n-1}{q}} \frac{O_h}{O_{h+q-n}}$$

$$\times M_{h+q-n}(\partial(D_0 \cap L_q)) M^1_{n-2-h} \Bigg] dL_q. \tag{15.71}$$

最后的积分可以根据(14.69)和(14.10)计算，把所得结果和(15.70)比较，就得最后结果

$$\int_{D_0 \cap D_1 \neq \varnothing} M_{q-1}(\partial(D_0 \cap D_1)) dK_1$$

$$= O_{n-2} \cdots O_1 \Big[O_{n-1}(V_1 M^0_{q-1} + V_0 M^1_{q-1})$$

$$+\frac{(n-q)O_{q-1}}{O_{n-q-1}}\sum_{h=n-q}^{n-2}\frac{\binom{q-1}{q+h-n}O_{2n-h-q}O_h}{(h+1)O_{n-h}O_{h+q-n}}$$

$$\times M^1_{n-2-h}M^0_{h+q-n}\Bigg], \tag{15.72}$$

这适用于 $q=1,2,\cdots,n-1$。当 $q=n$时，它必须用(15.36)代替。用(15.63)除(15.72)，就得$M_{q-1}(\partial(D_0\cap D_1))$的期望值。

公式(15.72)可以推广到和一个固定凸体 D_0相交的 m 个凸体 $D_1,D_2,\cdots,D_m$。其结果是$M_{q-1}(\partial(D_0\cap\cdots\cap D_m))$的期望值[657]。Stoka [648]把它应用于几何概率。

到非凸域的推广. 公式(15.72)对于不一定是凸的域 D_0，D_1也适用，但中曲率积分$M_h(\partial D_0)$，$M_h(\partial D_1)$和$M_h(\partial(D_0\cap D_1))$，按照第13章第 6 节的意义，必须存在。为了证明这一推广，考虑恒等式

$$M_{q-1}(\partial(D_0\cap D_1))=M_{q-1}(\partial D_0\cap D_1)+M_{q-1}(D_0\cap\partial D_1)$$
$$+M_{q-1}(\partial D_0\cap\partial D_1)。\tag{15.73}$$

通过类似用于证明(15.59)和(15.60)的论证，可得

$$\int M_{q-1}(D_0\cap\partial D_1)\mathrm{d}K_1=O_{n-1}\cdots O_1M^1_{q-1}V_0,$$

$$\int M_{q-1}(\partial D_0\cap D_1)\mathrm{d}K_1=O_{n-1}\cdots O_1M^0_{q-1}V_1。\tag{15.74}$$

对于(15.73)最后一项，通过推导(15.56)所用的方法，可得

$$\int M_{q-1}(\partial D_0\cap\partial D_1)\mathrm{d}K_1=\sum c_{nqh}M^1_{n-2-h}M^0_{h+q-n}$$
$$(h=n-q,n-q+1,\cdots,n-2),\tag{15.75}$$

其中系数 c_{nqh} 和 D_0,D_1 的形状无关(它们是“局部”系数)。因此，它们一定和(15.72)里的一样，因而(15.72)对于任意一对域 D_0,D_1 适用，条件是中曲率积分 $M^1_h,M^0_h,M_h(\partial(D_0\cap D_1))$存在

$(h = n - q, n - q + 1, \cdots, n - 2)$。

7. 关于柱的基本公式

设O为E_n的固定点而$L_{n-p[0]}$为经过O的一个$n-q$维平面。设D_{n-p}为$L_{n-p[0]}$里一个有界域，其边界$\partial(D_{n-p}) \subset L_{n-p[0]}$是光滑的，属于$C^2$类。对于每点$x \in D_{n-p}$，考虑经过$x$而垂直于$L_{n-p[0]}$的$p$维平面。一切这样的$L_p$构成一个柱$Z_p$。$p$维平面$L_p$是柱的母面而$D_{n-p}$是柱的法截痕。$E_n$里全等柱面的密度是

$$\mathrm{d}Z_p = \mathrm{d}L^*_{n-p[0]} \wedge \mathrm{d}K^{n-p}, \tag{15.76}$$

其中$\mathrm{d}K^{n-p}$表示$L_{n-p[0]}$上的运动密度，而星号则表明$L_{n-p[0]}$应是有向的。若现在用$\mathrm{d}K^n$表示E_n里的运动密度，则由(15.76)，(15.14)可知

$$\mathrm{d}K^n = \mathrm{d}Z_p \wedge \mathrm{d}K^p, \tag{15.77}$$

其中$\mathrm{d}K^p$是L_p上的运动密度。

由于$\mathrm{d}K^n$也可以写作$\mathrm{d}K^n = \mathrm{d}L^*_p \wedge \mathrm{d}K_{[p]} \wedge \mathrm{d}K^p$，其中$\mathrm{d}K_{[p]}$表示绕$L_p$的转动密度(第十二章，第1节)，可见

$$\mathrm{d}Z_p = \mathrm{d}L^*_p \wedge \mathrm{d}K_{[p]}. \tag{15.78}$$

已给截痕D_{n-p}，柱Z_p(除位置外)完全确定，因此，看作L_{n-p}里的$n-p-1$维流形∂D_{n-p}的中曲率积分可以作为Z_p的中曲率积分的定义。即：我们令

$$M_i(Z_p) = M_i^{n-p}(\partial D_{n-p}), \quad i = 0, 1, \cdots, n-p-1, \tag{15.79}$$

而当$i = n-p, n-p+1, \cdots, n$时，$M_i(Z_p) = 0$。在这里，$V(Z_p)$表示$D_{n-p}$的$n-p$维体积。

我们要推广基本公式(15.36)到D_1是一个柱Z_p的情况。为此目的，考虑中心属于截痕D_{n-p}，半径等于ρ，而含在其垂直于D_{n-p}的对应的母面L_p内的一切p维球体$U_p(\rho)$，并用$Z_p(\rho)$表示一切这样的球体的有界并集(因而$Z_p = Z_p(\infty)$)。为了求$Z_p(\rho)$的中曲率积分，考虑它的距离为ε的平行体，然后令$\varepsilon \to 0$。我们不

难得到

$$M_i(Z_p(\rho)) = h_i, \qquad i > n-p-1;$$

$$M_i(Z_p(\rho)) = \frac{\binom{n-p-1}{i}}{\binom{n-1}{i}} M_i(Z_p) \frac{O_{p-1}}{p}\rho^p + h_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-p-1,$$

(15.80)

其中h_i是对应于球体 $U_p(\rho)$的边界轨迹那部分的中曲率积分，因而$\rho \to \infty$时，$h_i/\rho^p \to 0$。注意$(O_{p-1}/p)\rho^p$是半径为ρ的 p 维球面的体积。利用关于dK_1的表达式(15.77)，我们对于D_0和$Z_p(\rho)$写下基本公式(15.36)。在左边，当诸球$U_p(\rho)$的边界和D_0不相交时，dK^p的积分给出$O_1 \cdots O_{p-1}(O_{p-1}/p)\rho^p$(当 ρ 很大时的渐近值)。另一方面，对于诸球$U_p(\rho)$的边界和 D_0不相交的情况，$Z_p(\rho)$的测度有像$\rho^{p-1} \times$常数那样的上界。因此，若用$O_1 \cdots O_{p-1}(O_{p-1}/p)\rho^p$除基本公式两边然后令$\rho \to \infty$，并利用(15.80)，就得**关于柱的运动基本公式**

$$\int_{D_0 \cap Z_p \neq \varnothing} \chi(D_0 \cap Z_p) dZ_p$$

$$= O_{n-1} \cdots O_p \chi(D_0) V(Z_p)$$

$$+ O_{n-2} \cdots O_p \sum_{\nu=p-1}^{n-2} \frac{1}{n-p} \binom{n-p}{\nu-p+1}$$

$$\times M_\nu(D_0) M_{n-\nu-2}(Z_p). \qquad (15.81)$$

特款1　当 D_{n-p} 缩成一点时，Z_p 化为一个“有向” L_p。这时，利用(15.78)和(12.14)，公式(15.81)化为(14.79)。

特款2　当D_0缩成一点P时，就得

$$\int_{p \in Z_p} dZ_p = O_{n-1} \cdots O_p V(Z_p). \tag{15.82}$$

特款3 若Z_p是一个凸柱面D_0是凸体，(15.81)化为

$$\int_{D_0 \cap Z_p \neq \varnothing} dZ_p = O_{n-1} \cdots O_p V(Z_p) + \frac{O_{n-2} \cdots O_p}{n-p} \sum_{\nu=p-1}^{n-2} \binom{n-p}{\nu-p+1} M_\nu(D_0) \times M_{n-\nu-2}(Z_p), \tag{15.83}$$

或者，用截测积分W_i表示：

$$\int_{D_0 \cap Z_p \neq \varnothing} dZ_p = nO_{n-2} \cdots O_p \times \sum_{\nu=p-1}^{n-1} \binom{n-p}{\nu-p+1} W_{\nu+1}(D_0) W_{n-1-\nu}(Z_p), \tag{15.84}$$

其中我们已令$W_{n-1-\nu}(Z_p) = W_{n-1-\nu}^{n-p}(\partial D_{n-p})$。

这个结论可以叙述如下：若D_0和D_1为凸集而$D_0 \subset D_1$，一个和D_1相交的随机柱Z_p也和D_0相交的概率是

$$m(Z_p;\ Z_p \cap D_0 \neq \varnothing)/m(Z_p;\ Z_p \cap D_1 \neq \varnothing),$$

其中分子和分母依次是应用于D_0和D_1的(15.84)。

特款4 在欧氏空间E_3里，我们有两款$p=1,2$。若$p=1$，Z_1的截痕是一个单面域D_2。令f_Z为其面积，u_Z为其周长，c_Z为其全曲率(第七章，第3节)。则

$$M_0(Z_1) = u_Z, \quad M_1(Z_1) = c_Z = 2\pi\chi(Z_1),$$
$$V(Z_1) = f_Z,$$

而(15.81)化为

$$\int_{D_0 \cap Z_1 \neq \varnothing} \chi(D_0 \cap Z_1) dZ_1 = 8\pi^2 \chi(D_0) f_Z + \pi F c_Z + 2\pi M_1 u_Z, \tag{15.85}$$

其中F和M_1依次是D_0的面积和中曲率积分。

若$p=2$，则Z_2是E_3里一个带或一组平行带。假定Z_2是宽度为a的带，则

$$M_1(Z_2)=0,\quad M_0(Z_2)=2,\quad V(Z_2)=a,$$

而(15.81)化为(和(14.79a)比较)

$$\int_{D_0\cap Z_2\neq\varnothing}\chi(D_0\cap Z_2)\mathrm{d}Z_2=4\pi a\chi(D_0)+2M_1(\partial D_0).\tag{15.86}$$

8. 一些中值

(1) 设$K\equiv K_i(i=1,2,\cdots,m)$为$m$个固定而全等的凸集。设$N$①为和一个运动中的凸柱$Z_p$相交的$K_i$的个数。令$D_0$为诸$K_i$的并集，应用基本公式(15.81)，得

$$\int N\mathrm{d}Z_p=nmO_{n-1}\cdots O_p\sum_{\nu=p-1}^{n-1}\binom{n-p}{\nu-p+1}W_{\nu+1}(K)W_{n-1-\nu}(Z_p).\tag{15.87}$$

因此，若在一个凸体K_0内有m个全等凸体$K_i\equiv K$，则一个和K_0相交的随机凸柱和K_i相交的个数的期望值是

$$E(N)=\frac{m\sum_{\nu=p-1}^{n-1}\binom{n-p}{\nu-p+1}W_{\nu+1}(K)W_{n-1-\nu}(Z_p)}{\sum_{\nu=p-1}^{n-1}\binom{n-p}{\nu-p+1}W_{\nu+1}(K_0)W_{n-1-\nu}(Z_p)}.\tag{15.88}$$

(2) 现在考虑有m个全等的凸②柱$Z_p^i\equiv Z_p(i=1,2,\cdots,m)$和一个固定凸集$K_0$随机地相交。我们试求$K_0$被恰好$r$个柱($r\leqslant m$)覆盖的那部分体积的中值。为此，考虑积分

$$\int\mathrm{d}P\wedge\mathrm{d}Z_p^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}Z_p^m,$$

---

① 原文是n，译文改为N，以别于空间E_n的维数，下同。——译者

② 原书未规定Z_p是凸的。——译者

其积分范围是一切和K_0相交的Z_p^i以及一切被恰好r个柱覆盖的$P\in K_0$。先固定诸柱Z_p^i来对dP积分，再固定P来对dZ_p^i积分，然后令两次所得结果相等，就得

$$\int V_r dZ_p^1\wedge\cdots\wedge dZ_p^m$$

$$=\binom{m}{r}(O_{n-2}\cdots O_p)^m(O_{n-1}V(Z_p))^r$$

$$\times\left[n\sum_{\nu=p-1}^{n-1}\binom{n-p}{\nu-p+1}W_{\nu+1}(K_0)W_{n-1-\nu}(Z_p)\right.$$

$$\left.-O_{n-1}V(Z_p)\right]^{m-r}V(K_0). \tag{15.89a}$$

下面是(15.84)和(15.89a)的推论：

考虑和一个固定凸集相交的m个全等凸柱$Z_p^i=Z_p$。K_0被恰好r个柱覆盖的部分体积V_r的中值是

$$E(V_r)=\binom{m}{r}\frac{O_{n-1}^r}{n^m}$$

$$\times\frac{\left[n\sum_{\nu=p-1}^{n-1}\binom{n-p}{\nu-p+1}W_{\nu+1}(K_0)W_{n-1-\nu}(Z_p)-O_{n-1}V(Z_p)\right]^{m-r}}{\left[\sum_{\nu=p-1}^{n-1}\binom{n-p}{\nu-p+1}W_{\nu+1}(K_0)W_{n-1-\nu}(Z_p)\right]^m}$$

$$\tag{15.89b}$$

这个公式适用于$r=0,1,\cdots,m$。

练习 假定$m\to\infty$时，截痕总面积保持不变，即$mV(Z_p)=S$(常数)。试证明，当$m\to\infty$时，

$$E(V_r)\to\frac{V(K_0)}{r!}\left[\frac{(n-p)O_{n-1}S}{nO_{n-p-1}W_p(K_0)}\right]^r$$

$$\times \exp\left(-\frac{(n-p)O_{n-1}S}{nO_{n-p-1}W_p(K_0)}\right).$$

9. E_n里的格

第八章的结果可以直接了当地推广到E_n。假定 E_n 被一个格所分割，格的基本域是$a_i = T_i a_0 (i = 0, 1, \cdots)$，其中$T_i$是$E_n$里运动群的一个离散子群的元素，这个离散子群令格不变。假定E_n的每一点属于恰好一个a_i。设D_0为含于a_0内的一个点集，并考虑点集$T_i D_0 (i = 0, 1, 2, \cdots)$。应用(15.36)并采用第 8 章中用于平面的方法，得

$$\int_{P \in a_0} \sum_i \chi(T_i D_0 \cap D) \mathrm{d}K$$

$$= O_{n-1} \cdots O_1 (V\chi_0 + V_0 \chi) + O_{n-2} \cdots O_1 \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n=2} \binom{n}{h+1} M_h^0 M_{n-2-h}, \tag{15.90}$$

其中左边积分的范围是使动标原点P含于a_0内的一切动域D的位置。

我们将考虑(15.90)的两个推论：

推论1 假定 E_n 被立方体所分割，立方体的棱平行于坐标轴，棱长为 a。假定a_0是立方体$0 \leqslant a_i < 1$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$而D_0是a_0的闭包。设D为一个拓扑球，则$\chi = \chi(D) = 1$，$\chi_0 = \chi(D_0) = 1$，而

$$\sum_i \chi(T_i D_0 \cap D)$$

等于D被立方体所分割的块数，用ν表示。于是，应用(15.90)，再利用关于一个棱长为 a 的立方体的中曲率积分的值(13.48)，就得

$$E(\nu) = 1 + \frac{V}{a^n} + \frac{1}{O_{n-1}} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} \frac{O_h}{(1+h)a^{h+1}} M_{n-2-h}. \tag{15.91}$$

由于和D有公共点的基本域的个数N总不能超过ν，$E(N)\leqslant E(\nu)$，因此：

每一个拓扑球体D总可以用棱长为a的立方体覆盖，而其中立方体的个数不超过(15.91)的值。

若考虑立方体a_i的半径为$r=(\sqrt{n}/2)a$的外接球体，我们又得

每一个拓扑球体D总可以用半径为r的n维球覆盖，而其中n维球体的个数不超过

$$1+\frac{V}{2^n r^n}n^{n/2}+\frac{1}{O_{n-1}}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}\frac{O_h n^{(h+1)/2}}{(h+1)2^{h+1}r^{h+1}}M_{n-2-h}.$$

$n=2$时，这些不等式是Hadwiger[263]的结果，它们到E_n的推广则是Santaló [543]的工作。还可以参看Hadwiger [278]和Trandafir[677a]。

推论2 假定D_0是凸体而D是长度为s的线段。此外，还假定D不会和多于一个体T_iD_0相交。这样，利用(15.90)和关于长度为s的线段的各中曲率积分值(13.49)，就得以下结果：

考虑凸体D_0和它的象$T_iD_0(i=0,1,\cdots)$所构成的格。已给长度为s而和T_iD_0诸体中至多一相交的随机线段，则该线段和一个T_iD_0相交的概率是

$$p=\frac{1}{|a_0|}\left(V_0+\frac{O_{n-2}}{(n-1)O_{n-1}}sF_0\right),$$

其中$|a_0|$表示a_0的体积而V_0,F_0依次是D_0的体积和表面积。

10. 注记与练习

(1) **关于随机集的问题。**设A为E_n里一个矩体(直角平行体)，它的点$x(x_1,\cdots,x_n)$的坐标满足$0\leqslant x_i\leqslant a_i$ $(i=1,\cdots,n)$。A的体积是$V_a=a_1a_2\cdots a_n$。设$Y_1,\cdots,Y_m$为m个全等矩体，其棱长为$b_1,\cdots,b_n$，因而其体积都是$V_Y=b_1\cdots b_n$。假定Y_i的棱都和坐标

轴平行，并作平移运动(不转动)。设P_i为Y_i的中心而$\mathrm{d}P_i$为E_n在P_i的体元. Y_i的(平移)象的一个集合的测定是这些象的中心所覆盖的体积。令$X=(Y_1\cup Y_2\cup\cdots\cup Y_m)\cup A$，并考虑积分

$$I=\int \mathrm{d}P\wedge \mathrm{d}P_1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}P_m,$$

其积分范围是一切$P\in A$，以及使

$$Y_i\cap A\neq\varnothing,\quad P\notin Y_i\quad (i=1,\cdots,m)$$

的一切 P_i 的位置。为了计算 I，注意如果 P_i 含在与 A 同中心而棱长为 a_i+b_i 的矩体内，则条件 $Y_i\cap A$ 即可满足。还注意$\int \mathrm{d}P_i=V_Y$($P\in Y_i$范围内的积分)．先令P固定，得$(V_0-V_Y)^m V_A$，其中$V_0=(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n)$。另一方面，若固定矩体 Y_i 而对$\mathrm{d}P$积分，就得 $I=\int(V_A-V_X)\mathrm{d}P_1\cdots \mathrm{d}P_m$①，其中$V_X$表示$X$的体积。因此，

$$\int V_X \mathrm{d}P_1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}P_m=V_A[V_0^m-(V_0-V_Y)^m].$$

除以V_0^m，就得体积V_X的期望值

$$E(V_X)=V_A\left[1-\left(1-\frac{V_Y}{V_0}\right)^m\right].\qquad(15.92)$$

关于高次矩的表达式显得较复杂。关于这些问题以及有关问题，见Robbins[512]，Votaw[705]，Bronowski 与Neyman[71]。当$n=2$时，可以考虑随机矩形也具有随机正向的款。还可以考虑用随机的全等球体来替代矩体 Y_i(见[512,213,335])。关于较一般性的研究途径见[2]。若随机集不是均匀分布的，则结果更为复杂(见[432,616,617])。

(2) Chern 与 Federer 的一个一般运动公式。设 M 为紧致 k

① X的体积原书也用X表示。——译者

维黎曼流形。假定把M嵌在E_n内，而T_ρ为一切和M距离为ρ的点的集合。当ρ很小时，Weyl[716]证明了T_ρ的体积可以用下面公式表示

$$V(T_\rho)=O_{m-1}\sum_e \frac{(e-1)(e-3)\cdots 1}{(m+e)(m+e-2)\cdots m}\mu_e(M)\rho^{m+e},$$

(15.93)

（e是偶数，$0\leqslant e\leqslant k$，$m=n-k$）其中$\mu_e(M)$是M的积分不变量，它可以从M的曲率张量的分量计算。特殊地，$\mu_0(M)$是M的总体积，而当k为偶数时，

$$\mu_k(M)=\frac{(2\pi)^{k/2}}{(k-1)(k-3)\cdots 1}\chi(M), \tag{15.94}$$

其中$\chi(M)$是M的Euler-Poincaré 示性数。

设M^p和M^q为E_n里两个（无边界的）子流形，其维数是p和q。设M^p固定而M^q作运动，其运动密度是$\mathrm{d}K$。则

$$\int_{M^p\cap M^q\neq\varnothing}\mu_e(M^p\cap M^q)\mathrm{d}K=\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant e\\ \text{偶}}}c_i\mu_i(M^p)\mu_{e-i}(M^q),$$

(15.95a)

其中c_i为依赖于n,p,q,e而较复杂的常数。

若$\mathrm{d}L_q$表示E_n里q维平面的密度，则

$$\int_{M^p\cap L^q\neq\varnothing}\mu_e(M^p\cap L_q)\mathrm{d}L_q$$

$$=\frac{O_n\cdots O_{n-q}O_{p+q-n+1}O_{p+q-n}O_{p+1-e}}{O_q\cdots O_1 O_{p+1}O_p O_{p+q-n+1-e}}\mu_e(M^p).$$

(15.95b)

当$e=0$时，(15.95a)和(15.20)一致；当$p=n-1$时，(15.95b)和(14.78)一致。一般公式(15.95a)和(15.95b)是Chern[112]所给出的，它们和早些时候Federer[177]所给出的类似。Flaherty[200]把曲率测度推广到E_n里的Borel集（参见Sulanke与Wintgen的书[664]）。Nijenhuis[451]指出，存在着诸μ的一种规

范化测度以及一种运动密度，使曲率多项式

$$\mu(X,\lambda)=\sum_{e}\mu_e(X)\lambda^e$$

满足

$$\int\mu(M^p\cap M^q)\mathrm{d}K=\mu(M^p,\lambda)\mu(M^q,\lambda)\pmod{\lambda^{p+q-n+1}}.$$

Chen[103]给出了含有M^p,M^q和$M^p\cap M^q$的内蕴不变量的一些运动公式。例如设$\tau(C)$表示E_3里一条曲线C的总平方曲率而H，K为一个曲面M^2的中曲率和全曲率，$H^*(M^2)=\int H^2\mathrm{d}\sigma$, $K^*(M^2)=\int K\mathrm{d}\sigma$，$\sigma(M^2)=M^2$的面积。Chen证明了

$$\int\tau(M_0^2\cap M^2)\mathrm{d}K=2\pi^3(3H^*(M_0^2)-K^*(M_0^2)\sigma_0(M^2)+2\pi^3(3H^*(M^2)-K^*(M^2)\sigma_0(M_0^2).\tag{15.96}$$

关于E_3里的曲面，参看[687]。

一般公式(15.95a)可以推广到运动中的柱。设M^h为有向紧致可微(无边界)流形，它含在E_n的一个$n-m$维平面L_{n-m}内($h+m<n$)。经过M^h每一点，取垂直于L_{n-m}的m维平面L_m。这一切的L_m构成一个$h+m$维柱$Z_{h,m}$，其母面是m维平面L_m，其截痕是M^h。$Z_{h,m}$的密度是$\mathrm{d}Z_{h,m}=\mathrm{d}L_{n-m[0]}\wedge\mathrm{d}K^{n-m}$，其中$\mathrm{d}K^{n-m}$是$L_{n-m[0]}$上的运动密度。运动公式(15.95a)化为

$$\int_{M^p\cap Z_{h,m}\neq\varnothing}\mu_e(M^p\cap Z_{h,m})\mathrm{d}Z_{h,m}$$

$$=\sum_{e=h<i<e}\frac{c_i}{O_1\cdots O_{m-i}}\frac{\binom{h}{e-i}}{\binom{h+m}{e-i}}\mu_i(M^p)\mu_{e-i}(M^h).\tag{15.97}$$

、e 为偶数，$0 \leqslant e \leqslant p+h+m-n, i \geqslant 0$，$i$ 为偶数）。

(3) Poincaré **公式的推广**。像(15.95a) 那样的关于一个固定流形M^p和一个运动着的流形 M^q 的交集的积分公式，在积分几何里通常叫做 Poincaré 公式。公式(7.11)和(15.20)是它的特款。这类公式已经被 Kurita[351]，Federer[177]，Brothers[73]推广到齐性空间。下面举例说明 Brothers 所给出的那个类型的公式。

设M为 n 维黎曼空间，它有一个可迁的等距变换群 $\mathfrak{G}$。设M^p和 M^q 为M的属于C^1类的 p 维和 q 维真子流形，$p+q \geqslant n$，并令$A \subset M^p$，$B \subset M^q$，A, B是Borel 集。假定$\mathfrak{G}$在M^p 和 M^q 的切空间的集合中的作用都是可迁的，设dg为$\mathfrak{G}$的左不变测度。这样，就存在着一个只依赖于M^p, M^q和$\mathfrak{G}$的常数a，使

$$\int_{\mathfrak{G}} m(A \cap gB) \mathrm{d}g = am(A) \int_B \Delta \mathrm{d}\sigma_B, \qquad (15.98)$$

其中$m(A \cap gB)$是 $A \cap gB$的 $p-q-n$ 维测度(Hausdorff 测度)，$d\sigma_B$是M^q的 q 维测度元素，而 Δ是依赖于M和 $\mathfrak{G}$的一个正函数。常数 $a \neq 0$的充要条件是，对于某个 $g \in \mathfrak{G}$，存在着一点 $a \in M^p \cap gM^q$，使切空间$T_a(M^p)$和$T_a(gM^q)$的并集张成$T_a(M)$。

公式(15.98)可以作如下推广。设$\mathscr{E}$ 为 M的 q 维子流形的一个集合，它具有以下性质：$\mathfrak{G}$ 在 $\mathscr{E}$ 上的作用是可迁的，而且若$E \in \mathscr{E}$，则$\mathfrak{G} \cap \{g; gE = E\}$在 $\mathscr{E}$ 上也是可迁的。再假定$\mathscr{E}$有一个对于$\mathfrak{G}$的不变密度dE。这时

$$\int_{\mathscr{E}} m(A \cap E) \mathrm{d}E = \beta am(A), \qquad (15.99)$$

其中$m(A \cap E)$是$A \cap E$ 的 $p+q-n$ 维测度，而β是依赖于密度 dE（它一般不是唯一的）的一个正常数。

(4) **凸集场和柱场**。考虑 E_n 里一个可数集合的全等凸集$K = K_1 = K_2 = \cdots$，它们不一定互不相交，但该集合具有以下性质：若$m(r)$为和一个中心在P点而半径等于r的n维球体S_r相交的

凸集个数，则当$r\to\infty$时，渐近关系

$$m(r)=\rho\kappa_n r^n+o(r^n),\quad \kappa^n=\pi^{n/2}(\Gamma(1+n/2))^{-1}$$

(15.100)

成立，即极限

$$\lim_{r\to\infty}\frac{m(r)}{\kappa_n r^n}=\rho \tag{15.101}$$

存在而且和中心P无关。这时，我们说，在E_n里有凸集K的一个场，它的密度是ρ。假定把一个凸集K_0随机地放在E_n里，它和场中恰好s个集相交的概率是什么？

为了解答这个问题，我们采取如下途径。假定我们把凸集K_0随机地放在S_r里，则一个和S_r相交的随机凸集K也和K_0相交的概率为(15.65)所给定，它可以写成

$$p=\frac{B_0}{B_1},\qquad B_i=\kappa_n^{-1}\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}W_h^iW_{n-h}\quad (i=0,1),$$

(15.102)

其中我们用W_h^i表示S^r的截测积分(13.46)。

若考虑m个和K全等而和S_r相交的随机凸集，则其中恰好s个和K_0相交的概率是

$$p_s(r)=\binom{m}{s}p^s(1-p)^{m-s}.$$

假定当同时令$m,r\to\infty$时，(15.101)成立，则通过简单计算，得

$$p_s=\lim_{r\to\infty}\rho_s(r)=\frac{(\rho B_0)^s}{s!}\exp(-\rho B_0). \tag{15.103}$$

换句话说，一个密度为ρ的场中，和一个随机地放在E_n里的凸集K_0(一个“试验集”)相交的凸集K的个数是一个具有参数ρB_0的Poisson随机变量(见[228])。

现在，考虑一个可数集合的全等凸柱Z_p，它们不一定互不相交，但该集合具有以下性质：若$m(r)$表示和一个半径为r的球

S_r相交的柱的个数，则渐近关系

$$\lim_{r\to\infty}\frac{m(r)}{\kappa_n r^{n-p}}=\rho$$

成立而与S_r的中心位置无关。我们说，在E_n里有一个密度为ρ的柱场Z_p。采用和上面类似的推理可知：若一个试验凸集K_0随机地放在E_n里，则和它相交的柱的个数是一个具有参数ρB_0^*的Poisson随机变数，其中

$$B_0^*=\kappa_{n-p}^{-1}\sum_{i=p-1}^{n-1}\binom{n-p}{i-p+1}W_{i+1}(K_0)W_{n-1-i}(Z_p)$$

（见练习1）。

(5) 凸集的汇聚①. 设想在E_3里有固定凸集K_0以及n个和K_0相交的凸集$K_1,K_2,\cdots,K_n$，设$K_{012\cdots n}=K_0\cap K_1\cap\cdots\cap K_n$而令$V_{01\cdots n},F_{01\cdots n},M_{01\cdots n}$依次为$K_{01\cdots n}$的体积，表面积和中曲率积分。可以证明

$$\int V_{01\cdots n}dK_1\wedge dK_2\wedge\cdots\wedge dK_n=(8\pi^2)^nV_0V_1\cdots V_n,$$

$$\int F_{01\cdots n}dK_1\wedge dK_2\wedge\cdots\wedge dK_n$$

$$=(8\pi^2)^n\sum_i V_0\cdots V_{i-1}F_iV_{i+1}\cdots V_n,$$

$$\int M_{01\cdots n}dK_1\wedge dK_2\wedge\cdots\wedge dK_n$$

$$=\frac{1}{2}\pi^4(8\pi^2)^{n-1}\sum_{i\neq j}V_0\cdots V_{i-1}F_iV_{i+1}\cdots V_{j-1}F_jV_{j+1}\cdots V_n$$

$$+(8\pi^2)^n\sum_i V_0\cdots V_{i-1}M_iV_{i+1}\cdots V_n,$$

---

① Aggromerations. ——译者

$$\int_J dK_1 \wedge dK_2 \wedge \cdots \wedge dK_n$$

$$= (8\pi^2)^n \sum_i V_0 \cdots V_{i-1} V_{i+1} \cdots V_n$$

$$+ 2\pi(8\pi^2)^{n-1} \sum_{i,j} V_0 \cdots V_{i-1} F_i V_{i+1} \cdots V_{j-1} M_j V_{j+1} \cdots V_n$$

$$+ \pi^5 (8\pi^2)^{n-2} \sum_{i,j,k} V_0 \cdots V_{i-1} F_i V_{i+1}$$

$$\times \cdots V_{j-1} F_j V_{j+1} \cdots V_{j-1} F_j V_{j+1} \cdots V_{k-1} F_k V_{k+1} \cdots V_n,$$

其中积分的范围都是令 $K_0 \cap K_1 \cap \cdots \cap K_n \neq \varnothing$ 的一切 K_i 的位置。注意最后的积分除以测度。$m(K_i;\ K_i \cap K_0 \neq \varnothing)$ 之积，给出 n 个凸集 K_i 的公共交集和 K_0 相交的概率，而且 K_0 本身也不是空集。参看[524]；关于到 E_n 的推广，参看[657]；还可参看[190,191]。

设 P_i 为含在一个凸集 K 内的 n 个随机点。它们可以包含在一个半径为 r 的球内的概率是什么？假定以这些点的每一个为中心作半径为 r 的球，则所求概率等于这些球的交集不是空集的概率。用 K_{-r} 表示 K 的一个内平行集，它的边界和 K 的边界距离为 r，而 V_{-r}, F_{-r}, M_{-r} 依次为它的体积，面积和中曲率积分。应用上面最后的结果，得所求概率的值：

$$p(r) = (4\pi/3)^{n-1} r^{3n-3} V^{-n} [(4\pi/3) r^3$$
$$+ n(M_{-r} r^2 + F_{-r} r + V_{-r})$$
$$+ 3n(n-1)((\pi^2/32) F_{-r} + V_{-r})$$
$$+ (3\pi^2/32) n(n-1)(n-2) V_{-r}].$$

Hadwiger 与 Streit [281] 把这个结果推广到和一个固是凸集 K_0 相交的柱或带，然后应用所得结果来解答下面的课题：求和一个凸集 K_0 相交的 n 条随机直线（或 n 个随机平面）构成一个"殆把"①，即存在着一个半径为 r 而和所有直线（或平面）有公共

① Almost bundle。——译者

点的球 .注意这个课题只要求这样的球存在，并不规定它在K_0里的位置。

(6) E_3里的柱。设Z为E_3里一个直柱，其截痕是一个面积为f，周长为u的平面域。按照(15.78)，Z的密度可以写作$\mathrm{d}Z = \mathrm{d}G^* \wedge \mathrm{d}\phi$，其中$G^*$是平行于柱的母线的一条有向直线，而$\phi$表示绕$G^*$的一个转动。我们叙述下列结果.

(a) 若K为固定凸体，其面积为F，中曲率积分为M，则在$c_Z = 2\pi$的假定下，基本公式(15.85)化为

$$\int_{K \cap Z \neq \varnothing} \mathrm{d}Z = 2\pi(\pi F + 4\pi f + Mu)。$$

(b) 若Γ为长度为L的有长曲线而n表示它和∂Z的交点数，则

$$\int_{\Gamma \cap \partial Z \neq \varnothing} n \mathrm{d}Z = 4\pi^2 uL。$$

(c) 若Σ为面积为F的曲面而λ表示曲线$\Sigma \cap \partial Z$的长，则

$$\int_{\Sigma \cap \partial Z \neq \varnothing} \lambda \mathrm{d}Z = 2\pi^3 uF.$$

(d) 假定把一个固定平面E分割成面积为a的基本域，各基本域含有面积为f，周长为u的凸集K_E。假定每个K_E为一个直柱Z的截痕，而这些直柱构成E_3里一个凸柱格(图15.1)。设K是

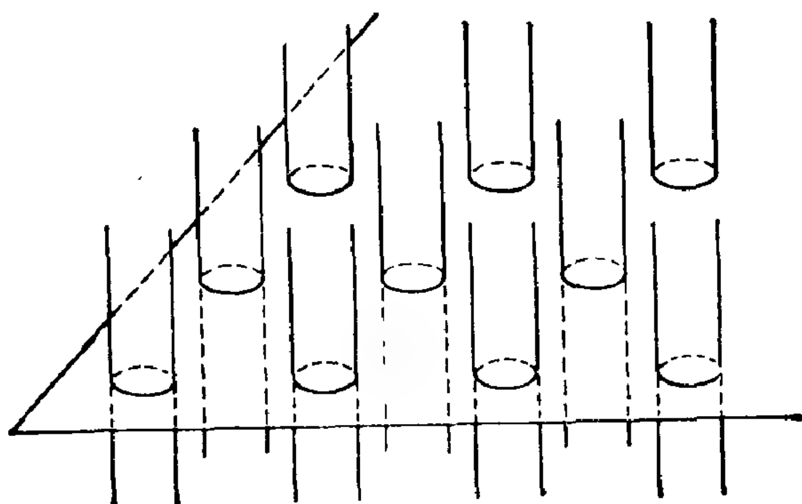


图 15.1

面积为F，中曲率积分为M的凸集，而且它不能和格中多于一个柱相交。这样，若把K随机地放在E_3里，它和格中一个柱相交的概率是

$$p=(\pi F+4\pi f+Mu)/4\pi a。$$

特殊地，若K为长度等于b的线段，则$F=0$，$M=\pi b$，而上述概率化为$p=(4f+bu)/4a$。若柱Z化为直线($f=u=0$)，则$p=F/4a$。这些是Buffon问题的新推广。关于其他结果，见[51]。

练习1 应用注记4中的最后结果到具有密度ρ的直线场或平面场的款，把直线或平面看成是截痕缩成一点的柱。

第十六章　几何应用与统计应用；立体度测法

1. 从粒子截痕的量分布推测其本身的量分布

我们考虑在E_3里随机分布着的凸粒子。所谓的立体度测学①的基本课题之一，是通过这些粒子和已知形状的随机图形（例如一个凸体，柱，平面，带，直线）的截痕的量分布来确定粒子本身的量分布；这个学科和许多表面上互不相关的学科如生物学、矿物学、冶金学和几何学都有交叉。Elias [166] 对它提出了以下的定义：立体度测学的研究对象是探究三维空间的一系列方法，这些方法适用于我们只能获得一些立体的二维截痕或其投影的情况。立体度测学的主要方法都和积分几何密切相关，我们在本章将揭示一些典型的例。主要参考文献是[166]；关于其基本方程的讨论，见[226,227]。

首先，我们对于$n=3$的款叙述从上章得到的公式。设K为E_3里一个固定凸体，而K_1为动凸体，其运动密度是dK_1。运动基本公式(15.63)化为

$$\int_{K\cap K_1\neq\varnothing} dK_1 = 8\pi^2(V+V_1)+2\pi(FM_1+F_1M), \qquad (16.1)$$

其中V, F, M依次表示K的体积、表面积和中曲率积分.

公式(15.20)对于$n=3$，$q=r=3$的款，公式(15.72)对于$n=3$，$q=1$和$n=3$，$q=2$的款是

$$\int_{K\cap K_1\neq\varnothing} V_{01}\,dK_1 = 8\pi^2 VV_1,$$

① Stereology，也许可以译成"立体估测学"，按字面，则可译成"立体学"。——译者

$$\int_{K\cap K_1\neq\varnothing} F_{01}\mathrm{d}K_1 = 8\pi^2(FV_1 + VF_1),$$

$$\int_{K\cap K_1\neq\varnothing} M_{01}\mathrm{d}K_1 = 8\pi^2(V_1M + M_1V) + \left(\frac{\pi^4}{2}\right)FF_1, \tag{16.2}$$

其中V_{01}是$K\cap K_1$的体积，而F_{01}和M_{01}依次是$\partial(K\cap K_1)$的表面积和中曲率积分。

若动图形是一个凸柱Z_1，而u,f表示它的法截痕的周长和面积，上面公式化为

$$\int_{K\cap Z_1\neq\varnothing} \mathrm{d}Z_1 = 2\pi(\pi F + 4\pi f + Mu), \tag{16.3}$$

$$\int_{K\cap Z_1\neq\varnothing} V_{01}\mathrm{d}Z_1 = 8\pi^2 Vf,$$

$$\int_{K\cap Z_1\neq\varnothing} F_{01}\mathrm{d}Z_1 = 8\pi^2(Ff + Vu), \tag{16.4}$$

$$\int_{K\cap Z_1\neq\varnothing} M_{01}\mathrm{d}Z_1 = 2\pi^2\left(4\pi f + 4\pi V + \frac{1}{4}\pi^2 Fu\right), \tag{16.5}$$

其中(16.3)是(15.83)的特款，其余公式通过类似第15章第7节的推理法容易从(16.2)推得.

若动图形是两个距离为Δ的平行平面所构成的带B，则

$$\int_{K\cap B\neq\varnothing} \mathrm{d}B = M + 2\pi\Delta,$$

$$\int_{K\cap B\neq\varnothing} V_{01}\mathrm{d}B = 2\pi V\Delta, \tag{16.6}$$

$$\int_{K\cap B\neq\varnothing} F_{01}\mathrm{d}B = 2\pi(2V + F\Delta),$$

$$\int_{K\cap B\neq\varnothing} M_{01}\mathrm{d}B = (\pi^3/4)F + 2\pi M\Delta, \tag{16.7}$$

其中带的密度dB等于它的中间单面的密度。

其次，我们假定在E_3里随机分布着全等粒子K，并考虑通过以下方法来确定关于这些粒子的诸量ρ（每单位体积中的粒子数），V（体积），F（表面积），M（中曲率积分）：方法是，令一个具有已知量V_1, F_1, M_1的凸体K_1（试验体）运动，对于一切K_1的位置，得到K_1和所有诸粒子的截痕的有关各量的平均值，即总粒子数N^*，总体积V^*，总表面F^*，总中曲率积分M^*，然后由V_1，$F_1, M_1; N^*, V^*, F^*, M^*$计算$\rho, V, F, M$。

假定粒子在一个半径为R的球内，并令$R\to\infty$，则利用(16.1)和(16.2)，得$V^*=\rho VV_1$，$F^*=(F_1V+FV_1)\rho$，因而

$$V=\frac{V^*}{\rho V_1},\qquad F=\frac{F^*V_1-V^*F_1}{\rho V_1^2}. \tag{16.8}$$

与此类似，必得

$$M=\frac{1}{\rho V_1^3}\left[V_1^2M^*-\frac{\pi^2}{16}F_1V_1F^*+\left(\frac{\pi^2}{16}F_1^2-M_1V_1\right)V^*\right], \tag{16.9}$$

而利用对于$n=3$的(15.66)，就得

$$\rho=\frac{N^*}{V_1}-\frac{F_1M^*}{4\pi V_1^2}+\left(\frac{\pi}{32}F_1^2-\frac{V_1M_1}{2\pi}\right)\frac{F^*}{2V_1^3}+\left(\frac{V_1F_1M_1}{2\pi}-V_1^2-\frac{\pi}{64}F_1^3\right)\frac{V^*}{V_1^4}. \tag{16.10}$$

利用这些公式，从N^*, V^*, F^*, M^*和试验体K_1的已知量V_1，F_1, M_1可以估计ρ, V, F, M。

若动图形是一个柱Z_1，由(16.3)—(16.5)，容易推得

$$\begin{aligned}&V^*=\rho V,\quad F^*=\rho F+\rho V(u/f),\\&M^*=\rho M+\rho\pi(V/f)+\rho\pi^2Fu/16f,\\&N^*=\rho\left(\frac{F}{4f}+\frac{Mu}{4\pi f}+1\right),\end{aligned} \tag{16.11}$$

其中N^*, V^*, F^*, M^*依次是Z_1的每一单位体积中，Z_1和所有诸粒子的截痕的粒子数，Z_1的体积，表面积和中曲率积分(对于Z_1的一切位置取平均数)。

由 (16.11)，可以推得

$$V = \frac{V^*}{\rho}, \quad F = \frac{F^*f - V^*u}{\rho f},$$

$$M = \frac{M^*}{\rho} - \frac{\pi V^*}{\rho f} - \frac{\pi^2 u}{16\rho f^2}(F^*f - V^*u), \tag{16.12}$$

$$\rho = N^* - \frac{uM^*}{4\pi f} + \left(\frac{\pi u^2}{16f} - 1\right)\frac{F^*}{4f} + \left(1 - \frac{\pi u^2}{32f}\right)\frac{uV^*}{2f^2}.$$

若动图形是一个宽度为Δ的带B，则从(16.6)和(16.7)，容易推得

$$V^* = \rho V\Delta, \quad F^* = \rho(F\Delta + 2V),$$
$$M^* = \rho\left(M\Delta + \frac{\pi^2}{8}F\right), \quad N^* = \rho\left(\Delta + \frac{M}{2\pi}\right), \tag{16.13}$$

因而

$$V = \frac{V^*}{\rho\Delta}, \quad F = \frac{F^*\Delta - 2V^*}{\rho V^2},$$

$$M = \frac{8M^*\Delta^2 - \pi^2 F^*\Delta + 2\pi^2 V^*}{8\rho\Delta^3},$$

$$\rho = \frac{N^*}{\Delta} - \frac{8M^*\Delta^2 - \pi^2 F^*\Delta + 2\pi^2 V^*}{16\pi\Delta^4}, \tag{16.14}$$

其中N^*, V^*, F^*, M^*对应于带的每单位面积所遇到的粒子。

若粒子不全等，则V, F, M表示对于所有粒子的平均量。我们可以用至少两个不同宽的带所测得的N^*来推得ρ和M的值。关于细节和补充，见Elias[166]书中G.Bach的论文。常用的动图形是一个随机平面E($\Delta = 0$的带)(图16.1) 或一条随机直线G($f =$

0，$u=0$的柱)(图16.2)。我们将分别考虑这两款。

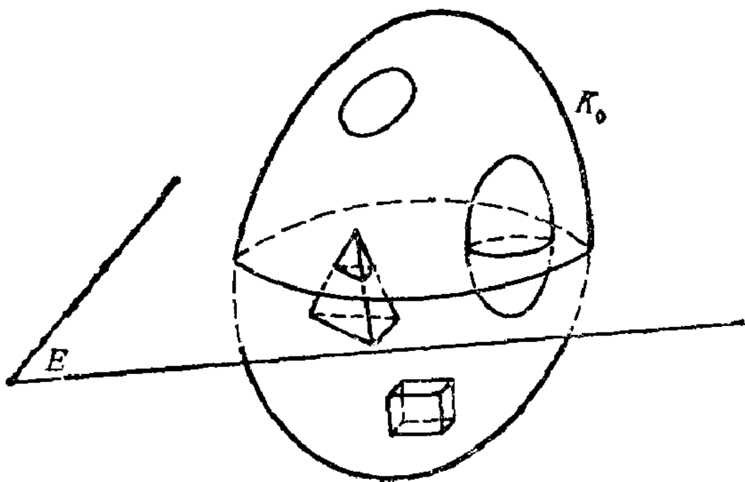


图 16.1

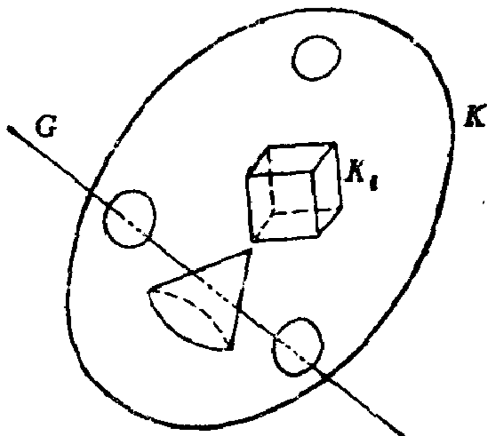


图 16.2

2. 和随机平面的截痕

假定一定数目互不交叠的凸粒子随机地分布在一个凸体Q内。假定所有粒子都和一个凸体K相似，而λ表示相似比：用K_λ表示和K相似而相似比为λ的凸体，因而$K_1=K$。设$H(\lambda)\mathrm{d}\lambda$表示$Q$内每单位体积中，相似比在$\lambda$与$\lambda+\mathrm{d}\lambda$之间的粒子数。

用一个随机平面E和Q相交，并设$h(\sigma)\mathrm{d}\sigma$为在$Q\cap E$内每单位面积中，粒子截痕面积在$\sigma$与$\sigma+\mathrm{d}\sigma$之间的个数。现在我们将要考虑的课题是由$h(\sigma)$求$H(\lambda)$。这个课题在好几个领域里有应用（见[335，第86页]以及其中的文献）。

设$\phi(\sigma)$为$E\cap K$的面积σ的概率分布，即对于一个随机选取的平面，截痕面积在σ与$\sigma+\mathrm{d}\sigma$之间的概率。用σ_m表示σ的最大值，则

$$\int_0^{\sigma_m}\phi(\sigma)\mathrm{d}\sigma=1,$$
$$\int_0^{\sigma_m}\sigma\phi(\sigma)\mathrm{d}\sigma=2\pi V/M. \tag{16.15}$$

其中第二个等式等价于(14.76)的第二公式.若$\phi(\sigma,\lambda)$表示$E\cap K_\lambda$的概率分布，则$\phi(\sigma,1)=\phi(\sigma)$，因而

$$\phi(\sigma,\lambda)\mathrm{d}(\lambda^2\phi)=\phi(\sigma/\lambda^2)\mathrm{d}\sigma,$$

或者

$$\phi(\sigma,\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\phi\left(\frac{\sigma}{\lambda^2}\right). \tag{16.16}$$

函数$\phi(\sigma)$一般并不简单。如能对于简单的凸体，例如单(纯)形或正方体求得它，将是有意义的。我们将对于幺球体给出$\phi(\sigma)$。这时候，令$x^2=1-r^2$，就可以求得一个随机截痕的面积在r与$r+\mathrm{d}r$之间的概率是$\mathrm{d}|x|=r(1-r^2)^{-1/2}\mathrm{d}r$。但$\sigma=\pi r^2$，$\mathrm{d}\sigma=2\pi r\mathrm{d}r$，故面积在$\sigma$与$\sigma+\mathrm{d}\sigma$之间的概率是$\frac{1}{2}[\pi(\pi-a)]^{-1/2}$①，

于是

$$\phi(\sigma)=1/\{2\sqrt{\pi}(\pi-\sigma)^{1/2}\}②. \tag{16.17}$$

对于半径为λ的球，根据(16.16)，就有

$$\phi(\sigma,\lambda)=1/\{2\sqrt{\pi}\lambda(\pi\lambda^2-\sigma)^{1/2}\}③, \tag{16.18}$$

---

① 原文作$2[\pi(\pi-a)]^{-1/2}$。——译者

②③ 原文无大括号。——译者

或者，由于$\sigma_m = \pi\lambda^2$，

$$\phi(\sigma,\lambda) = 1/\{2\sqrt{\pi}\lambda(\sigma_m - \sigma)^{1/2}\}^{①}. \qquad (16.19)$$

设M_λ和M_Q依次表示K_λ和Q的中曲率积分．相似比在λ与$\lambda + d\lambda$之间的粒子总数是$VH(\lambda)d\lambda$，其中V表示Q的体积，而这部分粒子中，被一个和Q相交的随机平面E所截的平均个数是$(M_\lambda/M_Q)VH(\lambda)d\lambda$。乘以概率分布$\phi(\sigma,\lambda)$，就得到平面截痕$E\cap K_\lambda$的平均个数，其中$\lambda$值在$\lambda$与$\lambda + d\lambda$之间，截痕的$\sigma$值在$\sigma$与$\sigma + d\sigma$之间．对$\lambda$从$\lambda = (\sigma/\sigma_m)^{1/2}$到$\lambda = \infty$积分，就得到$K_\lambda \cap E$中，粒子截面积在$\sigma$与$\sigma + d\sigma$之间的个数的平均值，即

$$d\sigma\int_{(\sigma/\sigma_m)^{1/2}}^{\infty}(M_\lambda/M_Q)VH(\lambda)\phi(\sigma,\lambda)d\lambda.^{②} \qquad (16.20)$$

由于在$Q\cap E$的每单位面积中，粒子截痕面积在σ与$\sigma + d\sigma$之间的个数的平均值是$h(\sigma)d\sigma$，而截痕$Q\cap E$的平均面积是$2\pi V/M_Q$，故中值(16.20)等于$(2\pi V/M_Q)h(\sigma)d\sigma$．利用(16.16)，就得方程

$$\int_{(\sigma/\sigma_m)^{1/2}}^{\infty}\lambda^{-1}\phi(\sigma/\lambda^2)H(\lambda)d\lambda = (2\pi/M)h(\sigma). \qquad (16.21)$$

其中已用了关系$M_\lambda = \lambda M_1$并已令$M = M_1$。方程(16.21)是表现$H(\lambda)$和$h(\lambda)$的关系的积分方程。通过对Q和随机平面截痕的测量，可以估计$h(\sigma)$，然后由(16.21)计算$H(\lambda)$．这个方程含有函数$\phi(\sigma)$，而$\phi(\sigma)$决定于粒子K的形状，一般难以计算。我们将考察一些特款。

(1) **球形粒子**。若K为球体，可令$\lambda = r$(球的半径)。于是$M = 4\pi$，$\sigma_m = \pi$，因而利用(16.17)，方程(16.21)化为

$$\int_{(\sigma/\pi)^{1/2}}^{\infty}\frac{H(\lambda)d\lambda}{(\pi\lambda^2 - \sigma)^{1/2}} = \sqrt{\pi}h(\sigma). \qquad (16.22)$$

---

① 原文无大括号。——译者

② 原书积分下限是0。——译者

令$\pi\lambda^2 = s$，$H_1(s) = H((s/\pi)^{1/2})/\sqrt{s}$，$h_1(\sigma) = 2\pi h(\sigma)$，则(16.20)化为

$$\int_\sigma^\infty \frac{H_1(s)\mathrm{d}s}{(s-\sigma)^{1/2}} = h_1(\sigma), \tag{16.23}$$

这是一个 Abel 型积分方程。它的解是（参考[125，第158页]）

$$H_1(s) = -\frac{1}{\pi}\int_s^\infty \frac{h_1'(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{(\sigma-s)^{1/2}}, \tag{16.24}$$

其中的撇表示导数。用$H(\lambda)$和$h(\sigma)$表示，这个解可以写成

$$H(\lambda) = -2\pi\lambda^{1/2}\int_{\pi\lambda^2}^\infty \frac{h'(\sigma)}{(\sigma-\pi\lambda^2)^{1/2}}\mathrm{d}\sigma. \tag{16.25}$$

若引进半径的分布函数$g(r)$（$g(r)\mathrm{d}r = h(\sigma)\mathrm{d}\sigma = Q\cap E$的每单位面积中，被截粒子半径在$r$与$r+\mathrm{d}r$之间的个数），则$\sigma = \pi r^2$，$h(\sigma) = g(\lambda)/2\pi r$，$h' = (g(r)/r)'/4\pi^2 r$，而(16.25)化为

$$H(\lambda) = -\frac{\lambda}{\pi}\int_\lambda^\infty \left(\frac{g(r)}{r}\right)' \frac{\mathrm{d}r}{(r^2-\lambda^2)^{1/2}}, \tag{16.26}$$

这是Wicksell[724]所得到的公式。

(2) **接近球形的粒子。**对于其函数$\phi(\sigma)$可以写作

$$\phi(\sigma) = a(\sigma_m - \sigma)^{-\mu} \text{①} \tag{16.27}$$

状的粒子，相应的公式成立；在(16.27)中，$0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_m$，而当$\sigma > \sigma_m$时，$\phi(\sigma) = 0$，其中$a, \mu$则是常数。球形粒子对应于$\mu = 1/2$，$a = 1/2\sqrt{\pi}$。由(16.15)可知

$$\frac{a}{1-\mu}\sigma_m^{1-\mu} = 1, \quad \frac{a}{(1-\mu)(2-\mu)}\sigma_m^{2-\mu} = \frac{2\pi V}{M}, \tag{16.28}$$

而由此得

$$a = p\sigma_m^{-p}, \quad \mu = 1-p, \quad p = (M\sigma_m/2\pi V) - 1. \tag{16.29}$$

---

① 应假定$\mu \neq 1, 2$，参见公式(16.28)。——译者

我们知道，对于任意凸体，有不等式$\sigma_m \geqslant F/4$和$MF \geqslant 12\pi V$，故$p \geqslant MF(8\pi V)^{-1} - 1 \geqslant 1/2$，因而$\mu \leqslant 1/2$。由(16.27)和(16.21)，得

$$aM\int_{(\sigma/\sigma_m)^{1/2}}^{\infty} \frac{\lambda^{2\mu-1}H(\lambda)}{(\sigma_m\lambda^2-\sigma)^{\mu}}d\lambda = 2\pi h(\sigma)① . \quad (16.30)$$

这是一种推广了的Abel型方程，其解是（见[125，第159]）

$$H(\lambda) = -\frac{4\sigma_m\lambda^{2(1-\mu)}\sin\mu\pi}{aM}\int_{\sigma_m\lambda^2}^{\infty}\frac{h'(\sigma)}{(\sigma-\sigma_m\lambda^2)^{1-\mu}}d\sigma. \quad (16.31)$$

(3) **全等的粒子。**若在Q里的粒子是全等的，每单位体积有N个，就可以把$H(\lambda)$看作N乘一个 Dirac δ 函数，更具体些，N乘一个具有如下性质的平移函数$\delta(\lambda)$：$\lambda \neq 1$时$\delta(\lambda)=0$，而

$$\int \delta(\lambda)d\lambda = 1,$$

其中积分域包括$\lambda=1$。这样，对于在$\lambda=1$连续的任意函数$g(\lambda)$，方程

$$\int g(\lambda)\delta(\lambda)d\lambda = g(1)$$

成立，其中积分域也包括$\lambda=1$。这时(16.21)给出$N=2\pi h(\sigma)/M\phi(\sigma)$。De Hoff[142,a,b]考察了椭球形粒子的款。

3. 和随机直线的截痕

我们沿用上面记号，现在考虑Q和一个随机直线G的截痕。设$h(\sigma)d\sigma$为当$Q\cap G$的长在σ与$\sigma+d\sigma$之间时，它的每单位长所遇到的粒子数。问题在于求$H(\lambda)$和$h(\sigma)$的关系。

由于直线G上Q的弦长平均值是$4V_Q/F_Q$，其中V_Q是Q的体积而F_Q是Q的表面积，当弦$Q\cap G$的长在σ与$\sigma+d\sigma$之间时，和G

---

① 原书积分下限作$(\sigma\sigma_m)^{1/2}$。——译者

相交的粒子平均数是$(4V_Q/F_Q)h(\sigma)\mathrm{d}\sigma$。另一方面，和$G$相交而相似比在$\lambda$与$\lambda+\mathrm{d}\lambda$之间的粒子的平均数是$(F_\lambda/F_Q)VH(\lambda)\mathrm{d}\lambda$，其中$F_\lambda$表示$K_\lambda$的表面积。设$K_1$为对应于$\lambda=1$的一个粒子，而$\phi(\sigma)\mathrm{d}\sigma$为弦$G\cap K_1$的长在$\sigma$与$\sigma+\mathrm{d}\sigma$之间的概率。对于一个粒子$K_\lambda$，其对应概率是$\phi(\sigma,\lambda)=\lambda^{-1}\phi(\sigma/\lambda)\mathrm{d}\sigma$而弦长在$\sigma$与$\sigma+\mathrm{d}\sigma$之间的平均数是

$$\mathrm{d}\sigma\int_{\sigma/\sigma_m}^{\infty}(F_\lambda/F_Q)VH(\lambda)\phi(\sigma,\lambda)\mathrm{d}\lambda, \qquad (16.32)$$

其中σ_m表示K_1在G上所截出的最大弦长。令这个值和

$$(4V_Q/F_Q)h(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

相等，并利用$F_\lambda=\lambda^2F$，其中$F=F_1$是K_1的表面积，就得积分方程

$$\int_{\sigma/\sigma_m}^{\infty}\lambda\phi(\sigma/\lambda)H(\lambda)\mathrm{d}\lambda=(4/F)h(\sigma). \qquad (16.33)$$

这个方程的解依赖于$\phi(\sigma)$。对于球形粒子，

$$\phi(\sigma)\mathrm{d}\sigma=(\sigma/2)\mathrm{d}\sigma,\quad \sigma_m=2,\quad F=4\pi,$$

而(16.33)化为

$$\int_{\sigma/2}^{\infty}H(\lambda)\mathrm{d}\lambda=(2/\sigma\pi)h(\sigma), \qquad (16.34)$$

它的解可以立即写出：

$$H(\lambda)=-(1/\pi)(h(2\lambda)/\lambda). \qquad (16.35)$$

对于一切粒子全等的款，假定每个单位体积里有N个粒子，我们可以把$H(\lambda)$看成N和一个Diracδ函数之积，从而(16.33)给出$N=4h(\sigma)/F\phi(\sigma)$。

4. 注记

(1) **进一步的结果．** 关于与本章课题有关的细节和文献，可参考Duffin[154]，Kendall与Moran[335]，Moran[430]，De Hoff与Rhines[142]，Bodzioni[54,55]，Matheron[400]，Santaló[573]。也可以参看[166]里若干有关的探讨。Nicholson[450]详

细考察了柱形粒子的款。Watson[708]提出要警惕一些常用的估计子的不良统计属性。Miles[416]把许多立体度测结果推广到高维空间。还可参看[321,322]。

Marriot[591]考虑具有固定长的细杆，其中心均匀地分布在一个平面域内。若细杆和一个固定方向所作的随机角是ϕ，而ϕ的密度函数$f(\phi)=2(1+k\cos 2\phi)/\pi,(-1\leqslant k\leqslant 1)$，其中$k$是一个未经指定的常数，我们可以求一组和该固定方向作α角的平行线和诸杆相交的概率。若有两组对应于不同α值的平行线，而分别求得它们和几个杆相交，我们就可以估计每个单位面积诸杆的总长以及参数k。

Sidak[609]考虑了球体的一个集合，并令一个厚度为Δ的薄片同球体的截痕。设Y为薄片上球体截痕的最大直径，而X为球体自身的直径。若取不同厚度Δ_1,Δ_2的两个薄片，则$E(X)$可以用$E_1(Y)$，$E_2(Y)$，Δ_1,Δ_2来表达。

Tallis[667]考虑了主轴方向固定的椭圆面集合的平面截痕。Giger与Riedwyl[229]考虑了直径作正态分布的球形粒子集合。Jakeman与Anderssen[321,322]报导了关于立体度测问题的计算方法。

Duffin, Meussner与Rhin[154a](也可参看[154])考虑了通过球形粒子的直线和平面截痕的观察来确定粒子本身的量分布问题。他们给出下面几个分布函数的定义：(a) 球分布函数$G_3(s)$是在每立方厘米中直径大于s的球的平均数；(b) 圆分布函数$G_2(s)$是每平方厘米中直径大于s的圆的平均数(这些圆是一个平面和球形粒子的截痕)；(c) 线段分布函数$G_1(s)$是每厘米中长度大于s的线段的平均数(这些线段是一条直线和球形粒子的截痕)。这样，三个分布函数之间是用Stieltjes积分互相联系着：

$$\text{(i)}\quad G_2(s)=-\int_s^\infty (u^2-s^2)^{1/2}\,dG_3(u),$$

$$G_3(s) = -\frac{2}{\pi}\int_s^{\infty}(u^2-s^2)^{-1/2}\mathrm{d}G_2(u);$$

(ii) $$G_1(s) = -\left(\frac{\pi}{4}\right)\int_s^{\infty}(u^2-s^2)\mathrm{d}G_3(u),$$

$$G_3(s) = -\frac{2}{\pi s}\frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}s};$$

(iii) $$G_1(s) = -\int_s^{\infty}(u^2-s^2)^{1/2}\mathrm{d}G_2(u),$$

$$G_2(s) = -\frac{2}{\pi}\int_s^{\infty}(u^2-s^2)^{-1/2}\mathrm{d}G_1(u).$$

一个具有$G(s)=A\exp(-ks^2)$的形状的分布函数叫做Gauss分布函数。于是有以下定理：

若分布函数G_1,G_2,G_3中有任意两个成比例，它们就都是Gauss分布函数。若它们中任意一个是Gauss分布函数，则它们都是。

(2) **粒子的量分布的矩。**有时候最好用两个概率密度函数来代替(16.26)里的函数$H(\lambda)$和$g(r)$：一个是放在一个不透明的介质里的球形粒子直径D的概率密度函数，用$G(D)$表示，另一个是一个随机平面所截出的圆的直径的概率密度函数，用$\phi(D)$表示。若ν表示每单位体积内球形粒子的平均数而D_0表示一个随机选取的粒子的直径中值，则

$$F(D/2)=2\nu G(D), \quad g(D/2)=2\nu D_0\phi(D).$$

于是(16.22)和(16.26)化为

$$\phi(D)=\frac{D}{D_0}\int_D^{\infty}\frac{G(t)}{(t^2-D^2)^{1/2}}\mathrm{d}t,$$

$$H(D)=-\frac{2DD_0}{\pi}\int_D^{\infty}(t^2-D^2)^{-1/2}\left(\frac{\phi(t)}{t}\right)'\mathrm{d}t①.$$

① 原文积分下限是r。——译者

按照 Kendall 与 Moran[335]，我们可以把一个分布的诸矩用另一个分布的诸矩表示。令

$$M_h=\int_0^\infty t^h G(t)\mathrm{d}t,\quad m_h=\int_0^\infty t^h \phi(t)\mathrm{d}t,$$

就有结果

$$m_h=J_{h+1}D_0^{-1}M_{h+1},\quad h=-1,0,1,2,\cdots,$$

其中

$$J_h=\int_0^{\pi/2}\sin^h\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\dfrac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(h-1)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot h}, & h\text{ 是奇数时},\\[2ex] \dfrac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(h-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot h}\dfrac{\pi}{2}, & h\text{ 是偶数时}.\end{cases}$$

D_0 的值是

$$D_0=\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[\int_0^\infty\frac{\phi(t)}{t}\mathrm{d}t\right]^{-1}.$$

若 ν_0 表示每单位面积里圆的平均个数，则 $\nu_0=\nu D_0$，因而 ν 可以估计为

$$\nu=(2\nu_0/\pi)\int_0^\infty(\phi(t)/t)\mathrm{d}t.$$

在(16.35)里，也可以引进概率密度函数$G(D)$和弦长的概率密度函数 $s(\sigma)$。这样就得 $h(\sigma)=s(\sigma)\nu\pi D_2/4$，其中$D_2$是$D^2$的中值，而(16.35)化为$G(D)=-(D_2/2)(s(D)/D)'$[335,309c]。

(3) **接近球形的粒子**．当介质里的粒子不是球形时，本节的结果不那么令人满意。Wicksell[724]考虑了椭球形粒子，进一步的文献见[335]。

对于和球形差别不很大的粒子，具体地说，当概率密度 $\phi(\sigma)$ 可以写成 $\phi(\sigma)=(a\sigma)^\mu$，其中 a,μ 为条件

$$\int_0^{\sigma_m}\phi(\sigma)\mathrm{d}\sigma=1,\quad\int_0^{\sigma_m}\sigma\phi(\sigma)\mathrm{d}\sigma=4V/F\text{①}$$

所确定的常数时，有一个类似(16.35)的公式；在上面条件中，

① 原文两积分上限均作∞。——译者

V和F依次为对应于$\lambda=1$的粒子的体积和表面积。我们有

$$\mu=\frac{\sigma_m F-8V}{4V-\sigma_m F},\qquad a=[(\mu+1)\sigma_m^{-(\mu+1)}]^{1/\mu}。$$

这样，(16.33)化为

$$\int_{\sigma/\sigma_m}^{\infty}\lambda^{1-\mu}H(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\frac{4}{(a\sigma_m)^{\mu}F}h(\sigma),$$

因而

$$H(\lambda)=-\frac{4\lambda^{\mu-1}}{(a\sigma_m)^{\mu}F}\left(\frac{h(\sigma_m\lambda)}{\lambda^{\mu}}\right),$$

这是(16.35)的推广。

(4) **立方粒子的量分布**。若每单位体积中的粒子数是N_V,则一个截面上每单位面积中的粒子截痕数是$N_A=N_V M/2\pi$($\Delta=0$时的(16.13))。若粒子是具有随机正向的全等立方体，则$M=3\pi a$，其中a是立方体的棱长，因而$N_A=(3/2)N_V a$。所观察的截痕可能有三、四、五或六个边，平均起来，四个边的占总数的48.7%。由于有些截痕接近正方形，a可以近似地计算，而上面方程就可以用来确定N_V。

这样的粒子散布也可以通过线性截痕来分析。这时，在截线上每单位长上粒子截痕数是$N_L=(f/4)N_V$，其中f是粒子的面积。对于立方体，$f=6a^2$，$N_L=(3/2)N_V a^2$。合并这些方程，就得$N_V=2N_A^2/3N_L$，$a=N_L/N_A$(见[422])。

(5) **用随机球取截痕**。考虑球形粒子的款，其中粒子中心构成一个 Poisson 场，每单位体积里平均有λ个中心。设S_R为随机球，它的半径R大于粒子半径，我们考察如何从S_R和粒子截痕的量分布来估计粒子的量分布。若一个半径为r的球S_r和S_R相交，在$R>r$的假设下，截出的圆半径在ρ与$\rho+\mathrm{d}\rho$之间的概率是

$$\frac{3(R^2+3r^2-4\rho^2)\rho}{r(3R^2+r^2)(r^2-\rho^2)^{1/2}}\mathrm{d}\rho。\qquad(16.36)$$

设$F(r)\mathrm{d}r$为一个随机粒子半径在r与$r+\mathrm{d}r$之间的概率。在一个半径为R的任意球上的每单位面积中，和该球相交而半径在r与$r+\mathrm{d}r$之间的粒子平均数为$(2/3)\lambda(3r+r^3/R^2)F(r)\mathrm{d}r$；因

此，和S_R相交的粒子半径分布的概率密度是

$$f(r)=\frac{(r+r^3/3R^2)F(r)}{\int_0^{\infty}(r+r^3/3R^2)F(r)\mathrm{d}r}.$$

所以，若用r_1,r_3表示1阶和3阶矩，并利用(16.36)，就得观察到的半径(粒子在S_R上的截痕半径)概率分布是

$$\phi(\rho)=\frac{3\rho}{r_1+r_3/3R^2}\int_\rho^R\left[\frac{(R^2+3r^2-4\rho^2)(1+r^2/3R^2)F(r)}{(3R^2+r^2)(r^2-\rho^2)^{1/2}}\right]\mathrm{d}r.$$

这就是把$\phi(\rho)$同$F(r)$相联系的积分方程. 半径ρ同截痕$S_R\cap S_r$(作为S_R上的圆)的球面半径α之间的关系是$\rho=R\sin\alpha$.

现在假设用构成Poisson场的无限多个随机平面把空间随机地分成凸多面体. 若每单位体积的多面体密度是λ, 则在一个随机截平面上的多边形密度是$(9\pi/16)^{1/3}\lambda^{2/3}$[430]. 若$(4/3)\pi R\lambda>0$, 则在一个半径为$R$的随机截球面上所得凸球面面积的密度是$\lambda_s=(9\pi/16)^{1/3}\lambda^{2/3}-((6\pi^2)^{1/3}/16R)\lambda^{1/3}$. 据此,可以由一个半径为$R$的随机球面的截痕来估计$\lambda$.

(6) **模式分析**. 积分几何与模式认辨中的一些课题有关. 这类课题是：当我们只能观察到某些纯几何对象的变形或其部分表像时，如何把它们还原. 典型的问题有：通过一个n维区域A在欧氏空间里的样板把它还原，或者已给一组纯粹图像的一组变形，识别出原来那组图象. 参看[15,16,237]以及那里的文献；还可以参考[199,457],[206a].

(7) **用随机平面来分割一个立体**. 设D为E_3里一个域，它和球体拓扑等价，但不一定是凸的. 设V,F,M依次表示D的体积、表面积和中曲率积分. 设D_0为D的凸包. 取和D相交的n个独立随机平面$E_1,E_2,\cdots,E_n$. 则有下列积分公式(见Santaló[544,553]).

(a) 若N_i表示属于D的三个平面的交点数，则

$$\int N_i \mathrm{d}E_1 \wedge \mathrm{d}E_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}E_n = \pi^4 \binom{n}{3} M_0^{n-3} V, \qquad (16.37)$$

其中M_0表示∂D_0的中曲率积分，而积分范围则是和D相交的n平面组。

(b) 若N_s表示两个平面的交线和∂D的交点数，则

$$\int N_s \mathrm{d}E_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}E_n = (\pi^3/2) \binom{n}{2} M_0^{n-2} F. \qquad (16.38)$$

(c) 若R表示这n个平面分割D所得区域数，则

$$\int R \mathrm{d}E_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}E_n$$

$$= \pi^4 \binom{n}{3} M^{n-3} V + \frac{\pi^3}{4} \binom{n}{2} M_0^{n-2} F + n M_0^{n-1} M + M_0^n. \qquad (16.39)$$

由这些公式可以推得以下中值。

$$E(N_i) = \pi^4 \binom{n}{3} \frac{V}{M_0^3}, \quad E(N_s) = \left(\frac{\pi^3}{2}\right) \binom{n}{2} \frac{F}{M_0^2},$$
$$E(R) = \pi^4 \binom{n}{3} \frac{V}{M_0^3} + \left(\frac{\pi^3}{4}\right) \binom{n}{2} \frac{F}{M_0^2} + n \frac{M}{M_0} + 1. \qquad (16.40)$$

在E_3里取一个凸体K。考虑n个平面$E_1, \cdots, E_n$把K分割所得的区域。注意每一个内顶点属于八个区域，而在∂K上的顶点则属于四个区域，可知每个区域的平均顶点数是$(8N_i + 4N_s)/R$。因此，若变数N_R表示每个区域的顶点数，可以用下面记号表示相应的中值比：

$$E^*(N_R) = \frac{E(8N_i + 4N_s)}{E(R)}$$

$$= \frac{32\binom{n}{3} \pi^4 V + 8\binom{n}{2} \pi^3 MF}{4\binom{n}{3} \pi^4 V + \binom{n}{2} \pi^3 MF + 4(n+1) M^3}. \qquad (16.41)$$

与此类似，可以取$E^*(A_R)=E(4A_i+2A_s)/E(R)$作为每个区域的棱平均数，其中$A_i$是内棱数而$A_s$是$\partial K$上的棱数。由于$6N_i+N_s=2A_i$，$4N_s=2A_s$，可见

$$E^*(A_R)=\frac{12E(N_i)+6E(N_s)}{E(R)}$$

$$=\frac{48\binom{n}{3}\pi^4V+12\binom{n}{2}\pi^3FM}{4\binom{n}{3}\pi^4V+\binom{n}{2}\pi^3FM+4(n+1)M^3}. \tag{16.42}$$

每个区域的面数C_R的中值可以从最后两个中值和Euler关系$N_R-A_R+C_R=2$推得。结果是

$$E^*(C_R)=\frac{24\binom{n}{3}\pi^4V+6\binom{n}{2}\pi^3FM+8(n+1)M^3}{4\binom{n}{3}\pi^4V+\binom{n}{2}\pi^3FM+4(n+1)M^3}. \tag{16.43}$$

为了计算每个区域的面积的中值，注意若σ_i为$E_i\cap K$的面积，则

$$\int\sum_1^n\sigma_n dE_1\wedge\cdots\wedge dE_n=2\pi nVM^{n-1},$$

$$E\left(\sum_1^n\sigma_i\right)=2\pi n(V/M), \tag{16.44}$$

而由于每个内面属于两个区域而∂K上的诸面的总面积等于F，每个区域的平均面积可以确定为

$$E^*(S_R)=\frac{1}{E(R)}\left(\frac{4\pi nV}{M}+F\right), \tag{16.45}$$

而每个区域的平均体积是

$$E^*(V_R)=V/E(R), \tag{16.46}$$

其中$E(R)$的值见(16.40)。

(8) 关于随机平面所形成的多面体的中值。 我们知道，若

K_0是含在凸集K里而长度为s的线段，则一个和K相交的随机平面也和K_0相交的概率是$\pi s/M$。因此，若有n个随机平面和K相交，则恰好有m个和K_0相交的概率是

$$p_m = \binom{n}{m}(\pi s/M)^m(1-\pi s/M)^{n-m}.$$

假定把K扩充到整个空间，同时随机平面的个数按照以下规律增长：

$$\frac{n}{m} \to \frac{\lambda}{\pi}, \quad \text{其中 } \lambda \text{ 为正常数,} \tag{16.47}$$

则容易看出，p_m的极限满足 Poisson 定律

$$p_m^* = \lim p_m = ((\lambda s)^m/m!)e^{-\lambda s}. \tag{16.48}$$

在空间，这样的平面分布叫做一个 Poisson 场，或者具有参数λ的一个均匀 Poisson 系。m的中值是$E(m)=\lambda s$，故λ等于和任意一个单位长线段相交的平面平均数。注意对于任意扩充到整个空间的凸体K，总有$F/V\to 0, M/F\to 0, M/V\to 0$，与$K$的形状无关，故由(16.41)—(16.46)，可以推得，当空间被一个具有参数λ的均匀 Poisson 系分割成多面体时的下列中值：

$$E^*(N_R)\to 8, \quad E^*(A_R)\to 12, \quad E^*(C_R)\to 6,$$

$$E^*(S_R)\to\frac{24}{\pi\lambda^2}, \quad E^*(V_R)\to\frac{6}{\pi\lambda^3}.$$

关于N_R, S_R等等的真正中值E（给予适当的定义）和它们的二阶矩，Miles[418]求得下面诸值。

$$E(N_R)=8, \quad E(S_R)=24/\pi\lambda^2, \quad E(V_R)=6/\pi\lambda^3,$$

$$E(C_R)=6, \quad E(N_R^2)=(13\pi^2+96)/3,$$

$$E(N_RS_R)=28\pi/\lambda^2, \quad E(S_R^2)=240/\lambda^4,$$

$$E(N_RV_R)=8\pi/\lambda^3, \quad E(S_RV_R)=96/\lambda^5,$$

$$E(V_R^2)=48/\lambda^6, \quad E(V_R^3)=1344\pi/\lambda^9,$$

$$E(C_RV_R)=\frac{4(\pi^2+3)}{\pi\lambda^3}, \quad E(C_RS_R)=\frac{2(7\pi^2+24)}{\pi\lambda^2}.$$

此外，若L_R表示一个多面体的棱的总长，而M_R表示它的中曲率积分，Miles证明了

$$E(L_R)=12/\lambda,\quad E(M_R)=3/2\lambda,$$

$$E(N_R L_R)=2(5\pi^2+12)/\lambda,\quad E(L_R^2)=(24\pi^2+24)/\lambda^2,$$

$$E(N_R M_R)=(13\pi^2+48)/12\lambda,\quad E(L_R M_R)=(5\pi^2+12)/2\lambda^2,$$

$$E(M_R^2)=(13\pi^2+48)/48\lambda^2,\quad E(C_R L_R)=(5\pi^2+36)/\lambda,$$

$$E(L_R S_R)=72\pi/\lambda^3,\quad E(M_R S_R)=(7\pi^2+12)/\pi\lambda^3,$$

$$E(C_R M_R)=(13\pi^2+120)/12\lambda,\quad E(L_R V_R)=24\pi/\lambda^4,$$

$$E(M_R V_R)=2(\pi^2+3)/\pi\lambda^4,\quad E(C_R^2)=(13\pi^2+336)/12.$$

若假定把空间分割成多面体的随机平面都分别垂直于三个正交轴，而且它们在这三个方向中的每一个都均匀分布，则容易证明

$$E(V_R^2)=288/\pi^2\lambda^6.$$

在[399—401]里，可以找到关于随机集合的有趣而有意义的结果，以及它们对E_n中，超平面的Poisson系所分割成的随机多面体区域的应用。参看[333]。

(9) **空间随机分割成胞腔。** 第二章第4节所描述的随机拼嵌容易推广到E_n。为简单起见，我们将考虑$n=3$的款。下面的模型是有趣的[405,230]。设$P_i(i=1,2,\cdots)$为在E_3里均匀分布的一个可数点集，其密度是每单位体积里ρ个点。然后把空间按下面规定分成区域或胞腔：C_i含有空间一切距P_i比距$P_j(j\neq i)$更近的点。这样C_i就是一个凸多面体，因为它是几个半空间的交集。P_i称为C_i的**中心**。图16.3表示平面上一个例。这个模型在矿物学中是有意义的。P_i代表长成C_i的原始核或种子晶体的位置。我们假定一切晶体在同一时刻开始生长，而且在一切方向以相同的速度生长，它们在空间位置固定，而且当它们相遇时不互相排挤。设S_R为一个胞腔的表面积，L_R为它的棱的总长；N_R,A_R,C_R为它的顶点数，棱数和面数；ν为一个平面上每单位面积里所截的晶体数。这样，Meijering[405]求得以下中值。

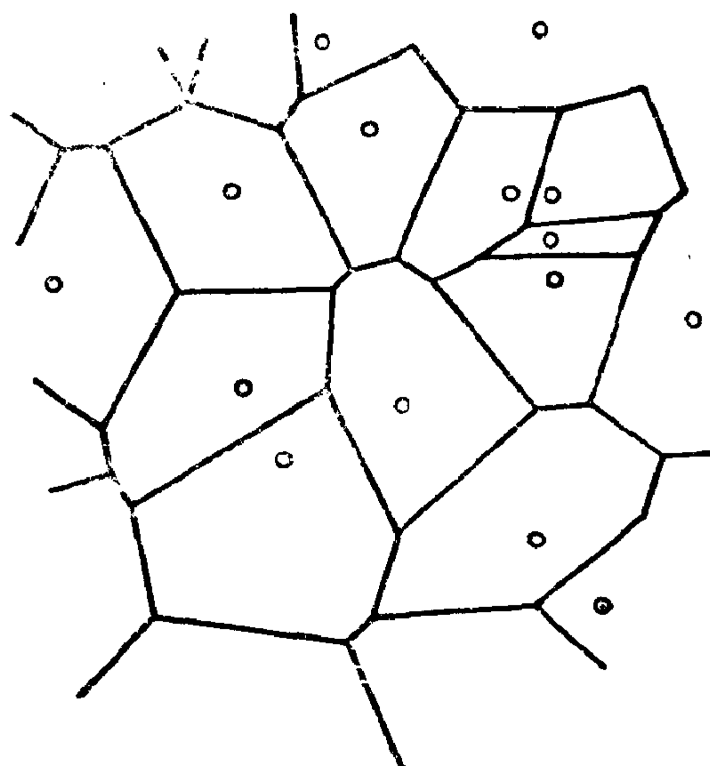


图 16.3

$$E(S_R)=5.821\rho^{-2/3},\quad E(L_R)=17.50\rho^{-1/3},\quad E(N_R)=27.07,$$
$$E(A_R)=40.61,\quad E(C_R)=15.54,\quad E(\nu)=1.458\rho^{2/3}.$$

一个面的边的平均数是 $3E(N_R)/E(C_R)=5.23$。若和上节用随机平面分割以得到多边形时的对应中值相比较，可见$E(N_R)$，$E(A_R)$，$E(C_R)$都相差一个因子 3 。比较 $n>3$ 和 $n=3$ 时的这个因子将是有趣的。

Johnson与Mehl[325]考虑了更复杂的随机嵌装，他们假定从初始时刻 $t=0$ 起，每单位体积中，种子晶体以每秒 α 个的常速率出现。在这个模型里，胞腔的面不是平的，而且不一定是凸的。沿用上面的记号，Meijering对Johnson-Mehl模型得到下面的中值：

$$E(S_R)=5.143\rho^{-2/3},\quad E(L_R)=14.71\rho^{-1/3},\quad E(N_R)=22.56,$$
$$E(A_R)=33.84,\quad E(C_R)>13.28,\quad E(\nu)=1.225\rho^{2/3},$$

其中$\rho=0.8960(\alpha/v)^{3/4}$，而 v 表示胞腔生长的速度。Gilbert[230]

对这些模型计算了其他中值和方差。例如，对于前一个模型，一个胞腔的体积方差是 $0.180\rho^{-2}$ 而对于 Johnson-Mehl 模型，它是 $1.136\rho^{-2}$。这些值比用随机平面来分割空间时要小得多，而这是可以预料到的。其详情，补充，与参考文献见 Miles 的重要文章[418]。

第 四 篇

常曲率空间积分几何

第十七章　非欧积分几何

1. n 维非欧空间

设P_n为 n 维实射影空间。设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为一点 x 的齐次坐标，而考虑二次超曲面

$$\Phi \equiv x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \varepsilon x_n^2 = 0, \qquad (17.1)$$

其中 ε 的值是 $+1$ 或 -1。

我们假定把不属于Φ①的 x 点的齐次坐标标准化，使得

$$\Phi(x) = 1/\varepsilon K, \qquad (17.2)$$

其中 K 是一个正常数。当 $\varepsilon = -1$ 时，满足 $\Phi(x) > 0$ 的点都有虚坐标，它们称为**伪点**或**虚点**。

实 n 维非欧空间的定义如下：若$\varepsilon = +1$，它是P_n一切点的集合；若 $\varepsilon = -1$，它是P_n一切满足$\Phi(x) < 0$的点的集合；但下面我们还要规定它的运动群和度量。P_n的 r 维平面也是非欧空间的 r 维平面($r = 0, 1, \cdots, n-1$)。二次超曲面Φ叫做基本超曲面或绝对形：$\varepsilon = +1$ 时，Φ 没有实点，这时空间称为**椭圆非欧空间**；$\varepsilon = -1$ 时，Φ是一个实二次超曲面，这时在Φ内部(即满足 $\Phi(x) < 0$)的点的集合构成**双曲非欧空间**。在两种情况下，εK都称为空间的曲率。椭圆空间可以认为等同于一个 n 维半球面，但要把其边界上每条直径上的两个端点看成同一点。关于细节可以参考Busemann 与Kelly[76]。

两点 $a(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 和 $b(b_0, b_1, \cdots, b_n)$的内积定义是

$$\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i + \varepsilon a_n b_n, \quad \langle a, a\rangle = 1/\varepsilon K. \quad (17.3)$$

---

① Φ是指二次超曲面$\Phi(x) = 0$。——译者

引用矩阵记法，二次超曲面(17.1)可以写成

$$\Phi(x)\equiv x^t Qx=0, \qquad Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon \end{pmatrix}, \tag{17.4}$$

其中 x 现在是一个 $n\times 1$ 矩阵，其元素是 x 点的齐次坐标，而 x^t 是它的转置。利用 Q，内积可以写成

$$\langle a,b\rangle=a^t Qb=b^t Qa.$$

把 Φ 变成自己的直射变换叫做非欧运动，它们构成一个群，用 $\mathfrak{M}^*$ 表示。直射变换 $x'=Ax$ 是非欧运动的一个充要条件是，对于一切点 x，$\Phi(x')=x^tA^tQAx=x^tQx$，因而 $A^tQA=Q$。

注意内积在非欧运动下不变；因为

$$\langle a',b'\rangle=a^tA^tQAb=a^tQb=(a,b).$$

满足 $\langle a,b\rangle=0$ 的两点叫做共轭点。在双曲空间($\varepsilon=-1$)，实点的共轭点都是伪点。

设 $n+1$ 个点 $a^0,a^1,\cdots,a^n$ 为一个自共轭单形的顶点，即它们满足 $\langle a^i,a^j\rangle=\delta_{ij}/\varepsilon K$，其中 δ_{ij} 是 Kronecker 记号。假定 a^0 是实点并考虑方阵

$$A=((\varepsilon K)^{1/2}a^1,\ (\varepsilon K)^{1/2}a^2,\cdots,(\varepsilon K)^{1/2}a^n,K^{1/2}a^0), \tag{17.5}$$

它的列是 $(\varepsilon K)^{1/2}a^1,\cdots,K^{1/2}a^0$ 诸点的坐标。这样，就有 $A^tQA=Q$，因而 $x'=Ax$ 是非欧运动。按照动标法，非欧运动群 $\mathfrak{M}^*$ 的 Maurer-Cartan 齐式可由下列诸关系确定：当 $i=1,2,\cdots,n$ 时，

$$\mathrm{d}((\varepsilon K)^{1/2}a^i)=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ji}(\varepsilon K)^{1/2}a^j+\omega_{0i}K^{1/2}a^0, \tag{17.6}$$

而

$$\mathrm{d}(K^{1/2}a^0)=\sum_{j=1}^{n}\omega_{j0}(\varepsilon K)^{1/2}a^j. \tag{17.7}$$

分别用 a^j 和 a^0 乘(17.6)，得

$$\omega_{ji}=\varepsilon K\langle a^j,\mathrm{d}a^i\rangle=-\omega_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

$$\omega_{0i}=\sqrt{\varepsilon}\,\varepsilon K\langle a^0,da^i\rangle=-\sqrt{\varepsilon}\,\varepsilon K\langle a^i,da^0\rangle. \tag{17.8}$$

用a^j乘(17.7)，得

$$\omega_{j0}=\sqrt{\varepsilon}\,\varepsilon K\langle a^j,da^0\rangle=-\sqrt{\varepsilon}\,\varepsilon K\langle a^0,da^j\rangle,$$

因而有关系

$$\omega_{j0}+\varepsilon\omega_{0j}=0,\quad \omega_{0j}+\varepsilon\omega_{j0}=0. \tag{17.9}$$

微分(17.6)，得结构方程

$$d\omega_{ji}=\sum_{h=0}^{n}\omega_{ih}\wedge\omega_{hj},\quad d\omega_{0i}=\varepsilon\sum_{h=1}^{n}\omega_{ih}\wedge\omega_{h0}. \tag{17.10}$$

两点a,b之间的非欧距离s用

$$\langle a,b\rangle=\frac{\cos((\varepsilon K)^{1/2}s)^{①}}{\varepsilon K} \tag{17.11}$$

确定。

若a,b为实点，距离是一个实数。在$\varepsilon=-1$的款，可以令

$$\cos(\sqrt{-K}\,s)=\cosh(\sqrt{K}\,s)② \tag{17.12}$$

两个共轭点之间的距离s_1满足条件$\cos((\varepsilon K)^{1/2}s_1)=0$，因而$s_1=\pi/(2(\varepsilon K)^{1/2})$③；$\varepsilon=+1$时，这是实数，$\varepsilon=-1$时，它是虚数。通过任意点$a$，取任意直线$G$，容易看出，在$G$上总有和$a$共轭的一点$b$，它和$a$距离的代数值既可以是$s_1$又可以是$-s_1$；由此可见，具有曲率$K$的椭圆空间的直线都是长度为$\pi/\sqrt{K}$的闭线④。

设$a=a^0$而b点是在共轭点偶a^0,a^i的联线上。于是$b=\alpha a^0+\beta a^i$，$\langle b,a^0\rangle=\alpha(\varepsilon K)^{-1}$，而由(17.11)得$\alpha=\cos((\varepsilon K)^{1/2}s)$。另一方面，由关系$\langle b,b\rangle=(\varepsilon K)^{-1}$可知$\alpha^2+\beta^2=1$。因此，若用$s_i$表示由$b$到$a^0$的距离，则

---

① 原文无外面括弧，下面还有类似情况。——译者

② 原文无括弧。——译者

③ $\cos((\varepsilon K)^{1/2}s_1)=0$的两个解是$\pm\pi/2(\varepsilon K)^{1/2}$。——译者

④ 原文这句较简略，由于s_1和$-s_1$对应于同一点(a^0的共轭点)，由此可见，具有曲率K的椭圆空间的直线是长度为$\pi/\sqrt{K}$的闭线。——译者

$$b=\cos((\varepsilon K)^{1/2}s_i)a^0+\sin((\varepsilon K)^{1/2}s_i)a^i. \tag{17.13}$$

假定 a^0,a^i 固定而 b 在直线 a^0a^i 上运动，则

$$db=(\varepsilon K)^{1/2}(-\sin((\varepsilon K)^{1/2}s_i)a_0+\cos((\varepsilon K)^{1/2}s_i)a^i)ds_i. \tag{17.14}$$

特殊地，$s_i=0$ 时，$da^0=(\varepsilon K)^{1/2}a^i ds_i$。由这个关系和(17.9)，就得

$$ds_i=K^{-1/2}\omega_{i0}=-\varepsilon K^{-1/2}\omega_{0i}. \tag{17.15}$$

在 a^0 点的体元是 $ds_1\wedge ds_2\wedge\cdots\wedge ds_n$；即

$$\begin{aligned}dv&=K^{-n/2}\omega_{10}\wedge\omega_{20}\wedge\cdots\wedge\omega_{n0}\\&=(-\varepsilon)^nK^{-n/2}\omega_{01}\wedge\cdots\wedge\omega_{0n}.\end{aligned} \tag{17.16}$$

经过 a^0 而在平面 $a^0a^ia^j$ 上的两条直线之间的角 ϕ 用

$$\cos\phi=\varepsilon K\langle a',b'\rangle \tag{17.17}$$

确定，其中 a',b' 是分别在所给两线上和 a^0 共轭的两点。特殊地，若 $a'=a^i$，则 $\cos\phi=\varepsilon K\langle a^i,b'\rangle$。假定 b' 在直线 a^ia^j 上运动(即假定直线 a^0b' 在平面 $a^0a^ia^j$ 上绕 a^0 转动)，就得 $-\sin\phi d\phi=\varepsilon K\langle a^i,db'\rangle$。若 $b'=a^j$，则 $\phi=\pi/2$，而在 $a^0a^ia^j$ 平面上，对应于方向 a^0a^j，绕 a^0 点，沿自 a^j 到 a^i 的转向的角元素可以写成

$$d\phi_{ij}=\varepsilon K\langle a^i,da^j\rangle=\omega_{ij}. \tag{17.18}$$

所以，在 a^0 点，对应于方向 a^0a^j 的立体角元是

$$du_{n-1}(a^0a^j)=\omega_{1j}\wedge\omega_{2j}\wedge\cdots\wedge\omega_{j-1,j}\wedge\omega_{j+1,j}\wedge\cdots\wedge\omega_{nj}. \tag{17.19}$$

2. 非欧空间的 Gauss-Bonnet 公式

我们需用关于 n 维非欧空间的紧致可定向超曲面的所谓 Gauss-Bonnet 公式。这个公式是 Allendoerfer 与 Weil[5]和Chern[106]所推广了的 Gauss-Bonnet 公式的特款。关于非欧空间的超曲面的特款，这个公式为 Herglotz[307]所独立给出。

设 Q 为非欧空间的一个连通域，它的边界是一个紧致而属于

C^3 ① 类的超曲面。在 ∂Q 的每一点 a^0，取自共轭单形 $a^0a^1\cdots a^n$，其中 $a^0,a^1,\cdots,a^{n-1}$ 确定切超平面而 a^0a^n 是 ∂Q 在 a^0 的法线。假定 $a^0a^i(i=1,2,\cdots,n-1)$是在 a^0 的主方向，主曲率半径 R_i 用 Rodrigues 公式 $\omega_{in}=\mathrm{d}\phi_{in}=-\mathrm{d}s_i/R_i$ 确定，而第 i 个中曲率积分则用

$$M_i=\frac{1}{\binom{n-1}{i}}\int_{\partial Q}\left\{\frac{1}{R_{h_1}}\cdots\frac{1}{R_{h_i}}\right\}\mathrm{d}f \qquad (17.20)$$

确定，其中{ }表示曲率 $1/R_h$ 的 i 次初等对称函数而 $\mathrm{d}f$ 表示 ∂Q 的面元。这样，关于一个域 Q 的边界 ∂Q 的 Gauss-Bonnet 公式，当 n 为偶数时，是

$$c_{n-1}M_{n-1}+c_{n-3}M_{n-3}+\cdots+c_1M_1+(\varepsilon K)^{n/2}V=\frac{1}{2}O_n\chi(Q), \qquad (17.21)$$

而当 n 为奇数时，是

$$c_{n-1}M_{n-1}+c_{n-3}M_{n-3}+\cdots+c_2M_2+c_0F=\frac{1}{2}O_n\chi(Q), \qquad (17.22)$$

在这两个公式里，M_i 是中曲率积分而

$$c_h=\binom{n-1}{h}\frac{O_n}{O_hO_{n-1-h}}(\varepsilon K)^{(n-1-h)/2}. \qquad (17.23)$$

若 n 为奇数，可以引用等式

$$\chi(Q)=\frac{1}{2}\chi(\partial Q), \quad n\ 为奇数。 \qquad (17.24)$$

若 ∂Q 是分段属于 C^2 类的，则只要 Q 的平行集 Q_ε(ε 是 Q_ε 和 Q 的距离)是属于 C^2 类的，Gauss-Bonnet 公式都适用。这时 M_i 的定义是，当 $\varepsilon\to0$ 时，∂Q_ε 的中曲率积分的极限。Federer [177,178]把 Gauss-Bonnet 公式推广到具有正可达值的点集②

① C^3 应作 C^2。——译者

② Sets with positive reach。——译者

(非欧空间一个子集 A 的可达值是具有如下性质的 ε 的最大值：若一点 x 到 A 的距离小于 ε，则 A 含有恰好一个最接近 x 的点)，而 Hadwiger[274，276]则把该公式推广到凸集环中的点集（即点集中可以表达为有限多个凸集的并集的）。本章一切公式对这些点集都适用。

例　$n=2$ 时，(17.21)化为

$$\int_{\partial Q} \kappa ds + \varepsilon KF = 2\pi\chi(Q),$$

其中 κ 是 ∂Q 的曲率(短程曲率)而 F 是 Q 的面积。在幺球面上，$\varepsilon=+1$，$K=1$ 而在双曲平面上 $\varepsilon=-1$，$K=1$。

$n=3$ 时，(17.22)化为

$$M_2 + \varepsilon KF = 4\pi\chi(Q). \tag{17.25}$$

椭圆空间的对偶公式。 考虑椭圆款 $\varepsilon=+1$。为简单起见，可令 $K=1$，不失普遍性。这时，平行于 ∂Q 而和它距离为 $\pi/2$ 的超曲面叫做 ∂Q 的“对偶”或“对极”超曲面。这个超曲面是一个域 Q^P 的边界(Q^P 不包含 Q)。可以证明，∂Q 和 ∂Q^P 的中曲率积分满足方程

$$M_i(\partial Q^P) = M_{n-1-i}(\partial Q),\quad i=0,1,\cdots,n-1 \text{①} \tag{17.26}$$

(证明见[558，580]。对 Q^P 写出(17.21)并利用关系 $\chi(Q)=\chi(Q^P)$，就得(令 $M_0=F$，$M_0^P=F^P$)

$$c_{n-1}F + c_{n-3}M_2 + \cdots + c_1 M_{n-2} + V^P = \frac{1}{2}O_n\chi(Q)\ (n\text{为偶数}) \tag{17.27a}$$

和

$$c_{n-1}F^P + c_{n-3}M_{n-3} + \cdots + c_1 M_1 + V = \frac{1}{2}O_n\chi(Q)\quad (n\text{为偶数}). \tag{17.27b}$$

同样，由(17.22)，得

$$c_{n-1}F + c_{n-3}M_2 + \cdots + c_2 M_{n-3} + c_0 F^P$$

---

① 注意：当 $n=3$ 时 $M_1(\partial Q^P)=M_1(\partial Q)$。——译者

$$=\frac{1}{4}O_n\chi(\partial Q)\quad（n\text{ 为奇数}），\qquad (17.28)$$

其中我们利用了 $\chi(Q)=\frac{1}{2}\chi(\partial Q)$。

当 n 为奇数时，Q^P 的体积 V^P 等于椭圆空间的体积（等于 O_n）的两倍减去 Q 的距离为 $\pi/2$ 的平行体的体积。其结果是[4]

$$c_{n-2}M_{n-2}+\cdots+c_1M_1+V+V^P$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\chi(Q)\right)O_n\quad（n\text{ 为奇数}）。\qquad (17.29)$$

例1 $n=2$。令 L 为闭曲线 ∂Q 的长，F 为 Q 的面积，则

$$L+F^P=2\pi\chi(Q),\qquad L^P+F=2\pi\chi(Q)。\qquad (17.30)$$

例2 $n=3$ 时，

$$F+F^P=4\pi\chi(Q),\quad M_1+V+V^P=2\pi^2-\pi^2\chi(Q)。\qquad (17.31)$$

3. 运动密度与 r 维平面密度

按照一般理论，非欧运动群 $\mathfrak{M}^*$ 的运动密度等于一组 Maurer-Cartan 式中诸式的外积，由于运动密度确定到一个常数因子，由(17.16)和(17.19)，可以把它写成标准式

$$\mathrm{d}K=\left(\frac{1}{K}\right)^{n/2}\bigwedge_h\omega_h\bigwedge_{i<j}\omega_{ij}$$

$$=\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}u_{n-1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_1,\quad i,j,h=0,1,\cdots,n,\quad (17.32)$$

其中 $\mathrm{d}v$ 表示对应于 a^0 点的体元而 $\mathrm{d}u_h$ 表示 $a^0,a^1,\cdots,a^{h+1}$ ($h=1,2,\cdots,n-1$)所确定的线性空间里的 h 维幺球面的面元。注意(17.32)和欧氏款中的(15.1)有相同的形状。与此类似，也像欧氏款那样，绕一个固定 q 维平面 L_q 的运动密度可以写成

$$\mathrm{d}K_{(q)}=\mathrm{d}u_{n-q-1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_1\quad (q=1,2,\cdots,n-2)。\quad (17.33)$$

现在考虑共轭点组 $a^0,a^1,\cdots,a^r$ 所确定的 r 维平面 L_r。令 L_r 不变的非欧运动（根据(17.6)和(17.7)）确定于

$$\omega_{0i}=0, \quad i=r+1,\cdots,n,$$

$$\omega_{jh}=0, \quad j=r+1,\cdots,n, h=1,\cdots,r \tag{17.34}$$

因此，r 维平面的密度可以写作

$$dL_r=\left(\frac{1}{K}\right)^{(n-r)/2}\bigwedge\omega_{0i}\bigwedge\omega_{jh}, \tag{17.35}$$

其中外积里的下标范围是

$$i,j=r+1,r+2,\cdots,n, \quad h=1,2,\cdots,r。 \tag{17.36}$$

常数因子$(1/K)^{(n-r)/2}$是不重要的，但为了简化下面一些公式，它是有用的。经过一个固定的 q 维平面的 r 维平面 $(q<r)$ 的密度也和欧氏款一样，是(12.26)，而且经过一个固定的 q 维平面的 r 维平面的总测度也是(12.36)，没有改变。

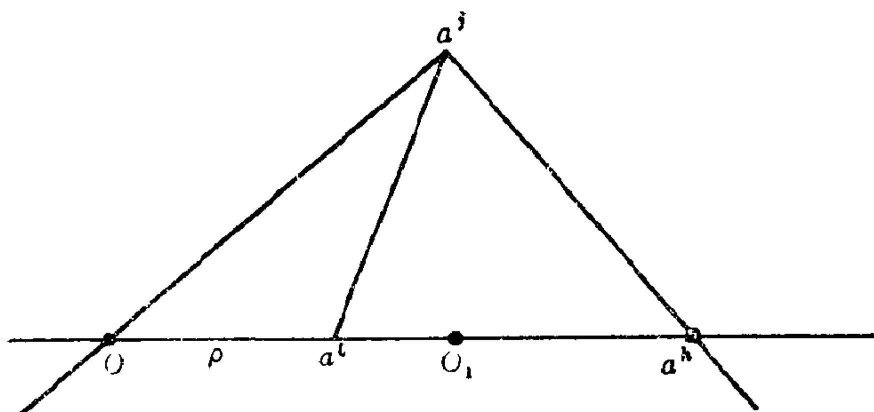


图 17.1

我们将推得密度 dL_r 的一个有用的表达式。设 ρ 为从 L_r 到一个固定点 O 的距离，$dL_{n-r,0}$ 为经过 O 而垂直于 L_r 的 $n-r$ 维平面密度，$d\sigma_{n-r}$ 为 $L_{n-r,0}$ 在交点 $L_r\cap L_{n-r,0}$ 的体元。我们试用 $\rho,dL_{n-r,0}$ 和 $d\sigma_{n-r}$ 来表达 dL_r，方法如下。

设 ρ 为从 O 到 a^0 的距离(图17.1)．若 a^h 为直线 Oa^0 上 a^0 的共轭点而 a^j 为 a^0 和 a^h 的一个共轭点，则根据(17.8)，

$$\omega_{jh}=\varepsilon K\langle a^j,da^h\rangle=-\varepsilon K\langle a^h,da^j\rangle. \tag{17.37}$$

根据(17.18)，ω_{jh}表示在平面$a^0a^ja^h$上对应于方向a^0a^h绕a^0的

简单转动。若 O_1 是直线 Oa^0 上 O 的共轭点，利用(17.13)以及距离 a^ha^0 等于 $\pi/(2(\varepsilon K)^{1/2})$ 的事实，就得

$$a^h = \cos(\varepsilon K)^{1/2}(\rho + \pi/(2(\varepsilon K)^{1/2}))O + \sin(\varepsilon K)^{1/2},$$

$$(\rho + \pi/(2(\varepsilon K)^{1/2}))O_1 = -\sin((\varepsilon K)^{1/2}\rho)O + \cos((\varepsilon K)^{1/2}\rho)O_1.$$

因此，根据 $\langle a^j, O\rangle = \langle a^j, O_1\rangle = 0$ 和 $dO = 0$，可见在绕 a^0 的简单转动 ω_{jh} 和绕 O 的简单转动 $\omega^*_{jh} = \varepsilon K\langle a^j, dO_1\rangle = -\varepsilon K\langle O_1, da^j\rangle$ 之间，有等式

$$\omega_{jh} = \cos((\varepsilon K)^{1/2}\rho)\omega^*_{jh}. \tag{17.38}$$

设 a^0 为从 O 到 L_r 的垂足，而 L_r 仍是 $a^0, a^1, \cdots, a^r$ 所确定的 r 维平面。再在直线 Oa^0 上取 a^{r+1}。简单转动 $\omega^*_{jh}(j = 1, 2, \cdots, r; h = r+2, \cdots, n)$ 都含在垂直于 Oa^0 的平面里，因而它们在 a^0 和在 O 有相同的值，即

$$\omega^*_{jh} = \omega_{jh}, \quad j = 1, 2, \cdots, r, \quad h = r+2, \cdots, n; \tag{17.39}$$

而根据(17.38)，

$$\omega_{j,r+1} = \omega^*_{j,r+1}\cos((\varepsilon K)^{1/2}\rho), \quad j = 1, 2, \cdots, r. \tag{17.40}$$

把(17.39)和(17.40)代入(17.35)，则因 $(1/K)^{(n-r)/2}\wedge\omega_{0i}$ $(i = r+1, \cdots, n)$ 是 $L_{n-r[0]}$ 在 a^0 点的体元 $d\sigma_{n-r}$，就得

$$dL_r = \cos^r((\varepsilon K)^{1/2}\rho)d\sigma_{n-r}\wedge dL_{n-r[0]} \quad (r = 1, 2, \cdots, n-1). \tag{17.41}$$

其中 $dL_{n-r[0]} = \bigwedge\omega^*_{jh}(j = r+1, \cdots, n; h = 1, 2, \cdots, r)$ 是 $n-r$ 维平面绕 O 的密度。公式(17.41)就是所求的 dL_r 的表达式，它对应于欧氏空间的(12.38)。Müller[437]给出了用矩阵表示的 dL_r 的表达式。

考虑 $r = 1$ 的款。这时，$dL_{n-1[0]} = dL_{1[0]}$ 是以 O 为顶点的一个立体角元[素]，这个立体角元对应于经过 O 而垂直于 L_1 的 $n-1$ 维平面的法线。为了用以 a^0 为顶点的相应立体角元 $dL_{1[a^0]}$ 来代替 $L_{1[0]}$，注意 L_1 确定于 a^0 和 a^1，因而利用(17.19)，(17.39)，和(17.40)，就有

$$dL_1 = d\sigma_{n-1}\wedge du_{n-1}, \tag{17.42}$$

其中 du_{n-1} 是在 a^0 点，对应于 L_1 方向的立体角元，而 $d\sigma_{n-1}$ 则是经过 a^0 而垂直于 L_1 的 $n-1$ 维平面上的体元. 若 ds 表示 L_1 上在 a^0 的弧元，则 $d\sigma_{n-1}\wedge ds = dv$，即空间在 a^0 的体元，于是由(17.42)得

$$dL_1\wedge ds = dv\wedge du_{n-1}. \qquad (17.43)$$

在非欧空间取一个域 Q，而在 $a^0\in Q$ 的范围内对(17.43)两边积分. 在右边，得 $\frac{1}{2}VO_{n-1}$(出现因子 $\frac{1}{2}$ 是因为 L_1 是作为无向直线)，而在左边，ds 的积分是弧 $Q\cap L_1$ 的长 λ. 其结果是积分公式

$$\int_{L_1\cap Q\neq\varnothing}\lambda dL_1 = \frac{1}{2}O_{n-1}V. \qquad (17.44)$$

注意(17.43)和(17.44)与空间的曲率无关. 实际上它们对任意黎曼空间都适用.

公式(17.41)对于 $r=0$ 不适用. 在这一款，dL_0 是点密度，而对应于(17.41)的公式是体元在极坐标里的表达式. 为了求这个公式，注意若沿用上面记号，则

$$a^0 = \cos((\varepsilon K)^{1/2}\rho)O + \sin((\varepsilon K)^{1/2}\rho)O_1,$$

故(由于 O 固定因而 $\langle O, da^i\rangle = -\langle a^i, dO\rangle = 0$)

$$\begin{aligned}\omega_{i0} &= -(\varepsilon K)^{1/2}\langle a^0, da^i\rangle\\ &= -(\varepsilon K)^{1/2}\sin((\varepsilon K)^{1/2}\rho)\langle O_1, da^i\rangle. \qquad (17.45)\end{aligned}$$

另一方面，考虑自共轭单形 $O, O_1, a^2, \cdots, a^n$，按照(17.19)，对应于方向 Oa^0，以 O 为顶点的立体角元

$$du_{n-1} = \omega_{21}\wedge\omega_{31}\wedge\cdots\wedge\omega_{n1},$$

其中

$$\begin{aligned}\omega_{i1} &= \varepsilon K\langle a^i, dO\rangle = -\varepsilon K\langle O_1, da^i\rangle\\ &= \sqrt{\varepsilon}\,\omega_{i0}/\sin((\varepsilon K)^{1/2}\rho) \quad (i=1,2,\cdots,n).\end{aligned}$$

因此，应用(17.16)，就得

$$dv = (\sqrt{\varepsilon}/(\varepsilon K)^{n-2})\sin((\varepsilon K)^{1/2}\rho)\omega_{10}\wedge du_{n-1}.$$

根据(17.15)，$d\rho = ds_1 = (1/\sqrt{K})\omega_{10}$，故

$$dL_n = dv = \frac{1}{(\varepsilon K)^{(n-1)/2}} \sin^{n-1}((\varepsilon K)^{1/2}\rho) d\rho \wedge du_{n-1}. \quad (17.46)$$

这个在极坐标里关于非欧空间的体元的表达式可以直接用来求得半径为 ρ 的非欧球的体积，即

$$V_n(\rho) = \frac{O_{n-1}}{(\varepsilon K)^{(n-1)/2}} \int_0^\rho \sin^{n-1}((\varepsilon K)^{1/2}\rho) d\rho, \quad (17.47)$$

以及半径为 ρ 的非欧球的面积 $A_n(\rho) = dV_n(\rho)/d\rho$：

$$A_n(\rho) = \frac{O_{n-1}}{(\varepsilon K)^{(n-1)/2}} \sin^{n-1}((\varepsilon K)^{1/2}\rho). \quad (17.48)$$

为完备起见，我们再计算半径为 ρ 的非欧球的中曲率积分 $M_r(\rho)$。我们只须记住：若 R_i 为一个超曲面在 P 点对应于曲率线 C_i 的主曲率半径，Γ_i 表示超曲面沿 C_i 的法线的包络线，而 ρ_i 表示由 P 到在 P 的法线和 Γ_i 的接触点的距离，则有关系(见[165，第214页])

$$R_i = (\varepsilon K)^{-1/2}\tan((\varepsilon K)^{1/2}\rho_i). \quad (17.49)$$

因此，按照定义(17.20)，对于半径等于 ρ 的非欧球，

$$M_r(\rho) = \frac{O_{n-1}}{(\varepsilon K)^{(n-r-1)/2}} \sin^{n-r-1}((\varepsilon K)^{1/2}\rho) \cos^r((\varepsilon K)^{1/2}\rho). \quad (17.50)$$

和一个非欧球相交的 r 维平面测度. 作为(17.41)的应用，我们计算和一个半径为 ρ 的固定非欧球 Σ_ρ 相交的 r 维平面的测度。可以取 Σ_ρ 的中心作为固定点 O。于是

$$\begin{aligned} d\sigma_{n-r} &= A_{n-r-1}(\rho) d\rho \\ &= (\varepsilon K)^{-(n-r-1)/2} \sin^{n-r-1}((\varepsilon K)^{1/2}\rho) O_{n-r-1} d\rho, \quad (17.51) \end{aligned}$$

因此，利用(17.48)和(12.35)(这公式对非欧空间也都适用)，就

得

$$\int_{L_r\cap\Sigma_\rho\neq\varnothing} dL_r = \frac{O_{n-1}\cdots O_r}{(\varepsilon K)^{(n-r-1)/2}O_{n-r-2}\cdots O_1 O_0}$$

$$\times\int_0^\rho \cos^r((\varepsilon K)^{1/2}\rho)\sin^{n-r-1}((\varepsilon K)^{1/2}\rho)\mathrm{d}\rho, \tag{17.52}$$

在椭圆款，$\varepsilon=+1$，空间是有界的，一切 L_r 的测度也是有界的。在(17.52)里，令 $\rho=\pi/(2(\varepsilon K)^{1/2})$，就得它的值。由于

$$\int_0^{\pi/2}\cos^r(\alpha)\sin^{n-r-1}(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\frac{O_n}{O_r O_{n-r-1}}, \tag{17.53a}$$

可知

$$\int_{全部}\mathrm{d}L_r=\frac{O_n O_{n-1}\cdots O_{r+1}}{K^{(n-r)/2}O_{n-r-1}\cdots O_0}\quad(\varepsilon=+1)。\tag{17.53b}$$

注记 有时利于把(17.52)和(17.53b)写成等价形式

$$\int_{L_r\cap\Sigma_\rho\neq\varnothing}\mathrm{d}L_r=\frac{O_{n-1}\cdots O_{n-r-1}}{(\varepsilon K)^{(n-r-1)/2}O_{r-1}\cdots O_0}$$

$$\times\int_0^\rho\cos^r((\varepsilon K)^{1/2}\rho)\sin^{n-r-1}((\varepsilon K)^{1/2}\rho)\mathrm{d}\rho, \tag{17.52)*$$

$$\int_{全部}\mathrm{d}L_r=\frac{O_n O_{n-1}\cdots O_{n-r}}{K^{(n-r)/2}O_r\cdots O_0}. \tag{17.53b)*$$

例如 $r=n-1$ 时，(17.52)不能直接应用，但(17.52)* 则给出

$$\int_{L_{n-1}\cap\Sigma_\rho\neq\varnothing}\mathrm{d}L_{n-1}=O_{n-1}\int_0^\rho\cos^{n-1}((\varepsilon K)^{1/2}\rho)\mathrm{d}\rho. \tag{17.54}$$

4. 和一个固定体相交的 r 维平面集合

由于 $\mathrm{d}L_r$, $\mathrm{d}L_{r[0]}$ 在欧氏空间和非欧空间除一个常数因子外有相同的形状，公式(14.77)在两款都适用。又由于在证明(14.78)时所用到的关于局部微分几何的诸定理在非欧微分几何里也都显

正确的，(14.78)对于任意具有曲率 εK 的非欧空间也是正确的。同样，对于非欧几何，(14.69)也适用。特殊地，$q=n$ 时，有

$$\int_{Q\cap L_r\neq\varnothing}\sigma_r(Q\cap L_r)\mathrm{d}L_r=\frac{O_{n-1}\cdots O_{n-r}}{O_{r-1}\cdots O_0}\sigma_n(Q), \quad (17.55)$$

其中 $\sigma_n(Q)$ 表示域 Q 的体积而 $\sigma_r(Q\cap L_r)$ 是 $Q\cap L_r$ 的 r 维体积。$r=1$ 时，再一次得(17.44)。

把 $Q\cap L_r$ 看成 L_r 里的体，而 $M_i^{(r)}(i=0,1,\cdots,r-1)$ 为 $\partial(Q\cap L_r)$ 的中曲率积分。推广了的 Gauss-Bonnet 公式给出：$r=2r'$（r 为偶数）时，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}O_n\chi(Q\cap L_r)\\&\quad=(\varepsilon K)^{r'}\sigma_r(Q\cap L_r)\\&\qquad+\sum_{i=1}^{r'}\binom{r-1}{2i-1}\frac{O_r}{O_{2i-1}O_{r-2i}}(\varepsilon K)^{r'-i}M_{2i-1}^{(r)}, \quad (17.56)\end{aligned}$$

而 $r=2r'+1$（r 为奇数）时，

$$\frac{1}{2}O_n\chi(Q\cap L_r)=\sum_{i=0}^{r'}\binom{r-1}{2i}\frac{O_r}{O_{2i}O_{r-2i-1}}(\varepsilon K)^{r'-i}M_{2i}^{(r)}. \quad (17.57)$$

用 $\mathrm{d}L_r$ 分别乘这两方程的两边并对一切和 Q 相交的 L_r 取积分，就得：$r=2r'$ 时，

$$\begin{aligned}&\int_{Q\cap L_r\neq\varnothing}\chi(Q\cap L_r)\mathrm{d}L_r\\&\quad=\frac{O_{n-2}\cdots O_{n-r}}{O_r\cdots O_1}\Big[(\varepsilon K)^{r'}O_{n-1}\sigma(Q)\\&\qquad+\sum_{i=1}^{r'}\binom{r-1}{2i-1}\frac{O_rO_{r-1}\cdots O_{n-2i+1}}{O_{2i-1}O_{r-2i}O_{r-2i+1}}(\varepsilon K)^{r'-i}M_{2i-1}\Big]; \quad (17.58)\end{aligned}$$

而 $r=2r'+1$ 时，

$$\int_{Q\cap L_r\neq\varnothing}\chi(Q\cap L_r)\mathrm{d}L_r$$

$$= \frac{O_{n-2}\cdots O_{n-r}}{O_{r-1}\cdots O_1}\sum_{i=0}^{r'}\binom{r-1}{2i}\frac{O_{r-1}O_{n-2i}}{O_{2i}O_{r-2i-1}O_{r-2i}}(\varepsilon K)^{r'-i}M_{2i}. \tag{17.59}$$

$r=0$ 时，dL_0 是体元而 $\chi(Q\cap L_0)=1$，因而积分(17.59)是 Q 的体积。

注意 $r=1$ 时($r'=0$)，(17.59)不能直接应用。但利用恒等式

$$\frac{O_{n-2}\cdots O_{n-r}}{O_{r-1}\cdots O_1}=\frac{O_{n-2}\cdots O_r}{O_{n-r-1}\cdots O_1}, \tag{17.60}$$

就得

$$\int_{Q\cap L_r\neq\varnothing}\chi(Q\cap L_1)dL_1=(O_n/4\pi)F. \tag{17.61}$$

若 Q 为凸集，$\chi(Q\cap L_r)=1$，就得：

在曲率为 εK 的非欧空间里，和一个凸集 Q 相交的一切 L_r 的测度，按照 r 是偶数或奇数，是(17.58)或(17.59)的右边。

例如 $n=3$ 时，假定 Q 是凸集，就有

$$\int_{Q\cap L_1\neq\varnothing}dL_1=(\pi/2)F,\quad \int_{Q\cap L_2\neq\varnothing}dL_2=M_1+\varepsilon KV. \tag{17.62}$$

关于椭圆积分几何，参看 Blaschke[43]和 T.J.Wu [732]①.

5. 注记

(1) 非欧几何里关于四面体的不等式. 设 T 为具有曲率 εK 的三维非欧空间里的一个四面体。T 的中曲率积分 M_1 可以像欧氏空间那样计算，其结果也和(13.58)相同。因此，

$$\int_{L_2\cap T\neq\varnothing}dL_2=\frac{1}{2}\pi\sum_{i=1}^{6}a_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\alpha_i a_i+\varepsilon KV,$$

$$\int_{L_2\cap T\neq\varnothing}N dL_2=\pi\sum_{i=1}^{6}a_i,$$

① 原文作[731，732，732a]，误。——译者

其中 a_i 是各棱的长，α_i 是其对应的三面角，V 是体积，N 是和 L_2 相交的棱的个数。因此，除了属于一个测度为零的 L_2 位置的集合外，$N=3$ 或 $N=4$。

令 m_i 为和 i 个棱相交的平面的测度，则由最后两公式可以推得

$$m_3=\pi\sum_{i=1}^{6} a_i-2\sum_{i=1}^{6} a_i\alpha_i+4\varepsilon KV,$$

$$m_4=\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{6} a_i\alpha_i-\frac{1}{2}\pi\sum_{i=1}^{6} a_i-3\varepsilon KV.$$

由于这些测度不是负的，就有不等式

$$\pi\sum_{i=1}^{6} a_i+4\varepsilon KV\geqslant 2\sum_{i=1}^{6} a_i\alpha_i,$$

$$3\sum_{i=1}^{6} a_i\alpha_i\geqslant\pi\sum_{i=1}^{6} a_i+6\varepsilon KV.$$

这些不等式把Pólya 与 Szego[489]关于欧氏空间的不等式推广到非欧空间。它们可能是有趣的，因为人们知道 V 不能用 a_i 和 α_i 的初等函数来表示。有几个作者（包括Coxeter[128]和Bohm[57—59]）探讨了非欧几何中四面体的体积。

(2) 一个积分公式。设 Q 为 n 维椭圆空间的一个连通域，并假定 ∂Q 属于 C^3 类。由椭圆空间任意点 P 作 ∂Q 的法线 $PA_i(i=1,2,\cdots)$，并令 $C_{ih}(h=1,2,\cdots,n-1)$ 为 ∂Q 在 A_i 的曲率线。若 PA_i 是从 P 到 C_{ih} 的距离的相对极大值，令 $\varepsilon_{ih}=-1$；若 PA_i 是这些距离的相对极小值，令 $\varepsilon_{ih}=+1$；在别的情况下，令 $\varepsilon_{ih}=0$. 令 $\nu_i=\varepsilon_{i1}\varepsilon_{i2}\cdots\varepsilon_{i,n-1}$，$N=\sum\nu_i$，其中总和的范围是一切从 P 到 Q 的法线。我们得到以下公式

$$\int N\mathrm{d}P=O_n\chi(Q)\quad（n\text{ 为奇数}），$$

$$\int N\mathrm{d}P=O_n\chi(Q)-2V^P\quad（n\text{ 为偶数}），$$

其中 dF 为体元而积分范围则是整个椭圆空间。$n=2,3$ 时，这些公式是 Blaschke[45]的结果(见[570])。

(3) **非欧空间里的几何概率**。由本章结果，容易得到非欧空间几何概率方面典型问题的答案。我们叙述其中一部分，证明留给读者。

(a) 在曲率为 εK 的 n 维非欧空间里，若 K_1 为凸集，含在另一个凸集 K_0 里，一条和 K_0 相交的直线也和 K_1 相交的概率是 F_1/F_0，其中 F_1 和 F_0 依次是 ∂K_1 和 ∂K_0 的表面积。

(b) n 维欧氏空间里，一个凸体的弦长的中值是

$$E(\sigma)=2\pi O_{n-1}V/O_nF.$$

(c) 在三维非欧空间里，若 K_1 为凸集 K_0 内的凸集，一个和 K_0 相交的平面也和 K_1 相交的概率是

$$p=\frac{M_1+\varepsilon KV_1}{M_0+\varepsilon KV_0},$$

其中 M_i 和 V_i 依次是 $K_i(i=0,1)$ 的中曲率积分和体积。

(d) 在三维非欧空间里，设 K 为凸体而 L_1 和 L_2 为独立而随机地同 K 相交的直线和平面，则它们在 K 内相交的概率是

$$p=\frac{4\pi V}{(M+\varepsilon KV)F}.$$

(e) 在三维非欧空间里，设 K 为凸体，并设 L_2, L_2^* 为和 K 相交的两个独立而随机的平面。它们交线和 K 相交的概率是

$$p=\frac{\pi^3F}{4(M+\varepsilon KV)^2}.$$

(4) **球面上的几何概率**。我们叙述关于二维球面 U 上的几何概率论中的一些问题。利用本章结果，考虑到若把球面上的大圆看成直线，则 U 上的几何局部上和椭圆平面相同，都容易解答。

(a) 两个随机大圆在一个面积为 F 的凸集内相交的概率是 $p=F/2\pi$。若规定大圆是 K 的弦，则它们在 K 内相交的概率是

$$p = 2\pi F / L^2.$$

通过对偶原则可得

(b) 幺球面上两个随机点所确定的大[①]圆和一个周长为L的固定凸集K不相交的概率是$p = (2\pi - F)/L$。

(c) 联结两个随机点P_1, P_2的大圆弧$P_1P_2 \leq \pi$和一个固定凸集K相交的概率是$p = (L + 2F)/8\pi$。

(d) 幺球面上两个随机点的距离中值是$\pi/2$。

(e) 设P_1, P_2, P_3为幺球面上随机选取的三点。三角形$P_1P_2P_3$的周长中值是$3\pi/2$，面积中值是$\pi/2$。

(f) 设H_1, H_2为一个大圆G_0所确定的两个半球面。在H_1，H_2上依次随机选取的两点P_1, P_2的距离中值是$E(\theta) = \pi - 4/\pi$。

取一个具有单位半径的半球面H。由于缺乏对称性，半球面上的问题一般比整个球面上的问题复杂。以下是一些例。

(g) 在半幺球面上两点距离的中值是$\pi/4$。

(h) 半球面上三个随机点确定的三角形的周长中值是$12/\pi$，面积中值是$(12/\pi) - \pi$。若三角形是三个随机大圆所确定的，则周长中值是$E^*(L) = 3\pi - 12/\pi$，面积中值是$E^*(F) = 2\pi - 12/\pi$。

(i) 半幺球面上四个随机点构成一个球面凸四边形的概效是$p = 3 - 24/\pi^2 = 0.569\cdots$（半球面上的 Sylvester 问题）。

二阶矩. 设L为幺球面U的一个半球面H上三个独立随机点P_1, P_2, P_3所确定的三角形$P_1P_2P_3$的周长，$f_H(L)$为L的概率密度函数；而当P_1, P_2, P_3是幺球面U上的随机点时，$f(L)$为三角形周长L的概率密度函数. 这样，已经随机地给定三点P_1, P_2, P_3以及一个大圆G. 设H表示G把U分割出的两个半球面中任意一个，就有

$$p(P_1, P_2, P_3 \in H) \quad f_H(L) = f(L) \cdot p(G \cap P_1P_2P_3 \neq \varnothing);$$

---

① 原文无“大”字.——译者

在这里面，P_1, P_2, P_3都在同一个半球面H上的概率$p(P_1, P_2, P_3 \in H) = \frac{1}{4}$，而大圆$G$和三角形$P_1P_2P_3$不相交的概率$p(G \cap P_1P_2P_3 \neq \varnothing) = 1 - L/2\pi$。因此

$$f_H(L) = 4f(L) - (2/\pi)Lf(L).$$

用L乘两边并由0到2π积分，得

$$E_H(L) = 4E(L) - (2/\pi)E(L^2),$$

而由于$E_H(L) = 12/\pi$，$E(L) = 3\pi/2$，得$E(L^2) = 3\pi^2 - 6$。根据对偶原则，当球面三角形为三个大圆所确定时，若用E^*表示中值，则

$$E^*(F) = E((2\pi - L)^2) = \pi^2 - 6.$$

Miles[413]给出了这些以及随机球面图形的某些量的二阶矩。在该文里，Miles对球面上的几何概率作了完整概括，包括n个随机大圆所确定的嵌装以及这个嵌装中的多边形的面积，周长，和角的个数的一阶和二阶矩。

(5) **涉及切线的积分公式**．设K为在二维幺球面U上一个凸集。设t_1, t_2为经过P而和∂K相切的大圆上，从P到切点的弧长($t_i \leqslant \pi$)，ω为这两个切大圆之间的角(图17.2)．则有公式

$$\int_{P \in K} \frac{\sin\omega}{\sin t_1 \sin t_2} \, dP = \frac{1}{2}(2\pi - F)^2,$$

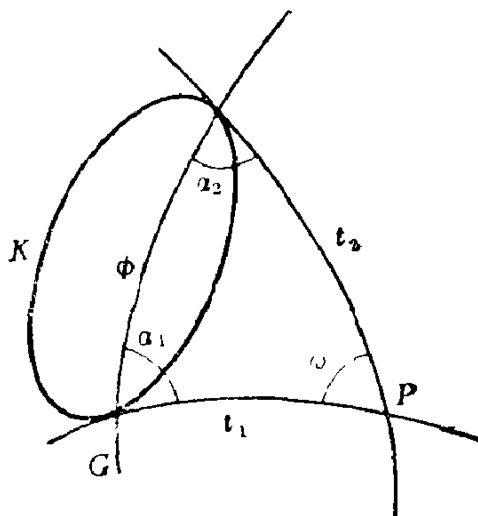


图 17.2

其中同一个直径的两个端点都看成是同一个点。通过对偶原则，又得

$$\int_{G\cap K\neq\varnothing}\frac{\sin\phi}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}\mathrm{d}G=\frac{1}{2}L^2,$$

其中ϕ是弧$G\cap K$的长，而α_1,α_2为在交点$G\cap K$，大圆G和∂K的切大圆所作的角[539]。

（6）**极限圆密度**。在一个双曲平面上，若令一个圆的中心移到无穷远，但规定该圆必须经过一个固定点，那个圆就变成具有无限大半径的圆，叫做极限圆。假定建立了一个极坐标系(r,α)，顶点在O。若极限圆向着O弯曲，它的密度是$\mathrm{d}H_+=\mathrm{e}^r\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\alpha$；若极限圆背着$O$弯曲，它的密度是$\mathrm{d}H_-=\mathrm{e}^{-r}\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\alpha$。我们将把极限圆密度写成$\mathrm{d}H$，但根据情况把它看成$\mathrm{d}H_+$或$\mathrm{d}H_-$。容易看出，两个点确定通过它们的一个极限圆。若一个点集K的每两个点A,B所确定的极限圆弧整个含在K内，则K叫做h凸集（极限圆凸集）。这样，若σ表示弧$H\cap K$的长，可以证明

$$\int_{H\cap K\neq\varnothing}\sigma\mathrm{d}H=2\pi F,\qquad\int_{H\cap K\neq\varnothing}\sigma^3\mathrm{d}H=6F^2,$$

其中F是K的面积。

设K是具有光滑边界的h凸集，它在极限圆H凸出的一侧。设$O\in K$为固定点。取经过O的一个参考方向，从O出发，取一个和参考方向作θ角的方向，垂直于后一方，向取和K相切的极限圆，设$h(\theta)$为由O到极限圆的距离。函数$h(\theta)$叫做对于极限圆H的撑函数。这样，∂K的长

$$L=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^{-h}+\mathrm{e}^{-h}h'^2)\mathrm{d}\theta. \qquad (17.63)$$

若K在极限圆H凹入的一侧时，它的撑函数是$h^*(\theta)$，则(17.63)化为

$$L=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-\mathrm{e}^{h^*}+\mathrm{e}^{-h^*}-\mathrm{e}^{-h^*}h^{*\prime 2})\mathrm{d}\theta\text{①}. \quad (17.64)$$

若$h-h^*=B$ 是常数，我们就说，K对于极限圆是有常宽的，这时

$$L=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-B})\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{h}\mathrm{d}\theta. \qquad (17.65)$$

公式(17.63),(17.64),(17.65)是 Fillmore[189]的结果。任何对于极限圆的常宽凸集，对于它的切线也是常宽的，它的周长L,面积F,同常宽B之间的关系是$(2\pi+F)\tanh(B/2)$[548,589]。关于积分几何对三维双曲空间曲线论的应用，参考 D.Jusupov [326]。

---

① 原书被积函数是$\mathrm{e}^{-h^*}+\mathrm{e}^{-h^*}-\mathrm{e}^{-h^*}h^{*\prime 2}$。——译者

第十八章　非欧空间的 Crofton 公式与运动基本公式

1　Crofton 公式

我们要把公式(14.24)推广到具有曲率εK的非欧空间．设P_1、P_2为两点，L_1表示直线P_1P_2。设t_1, t_2为P_1, P_2在L_1上的坐标。假定P_1是一个极坐标的原点，则根据(17.46)，在P_2的体元可以写成

$$\mathrm{d}P_2=\frac{\sin^{n-1}((\varepsilon K)^{1/2}|t_2-t_1|)}{(\varepsilon K)^{(n-1)/2}}\mathrm{d}t_2\wedge \mathrm{d}u_{n-1}. \tag{18.1}$$

取两边和体元$\mathrm{d}P_1$的外积，并利用(17.43)(其中$\mathrm{d}v$现在用$\mathrm{d}P_2$表示)，得[283]

$$\mathrm{d}P_1\wedge \mathrm{d}P_2=\frac{\sin^{n-1}((\varepsilon K)^{1/2}|t_2-t_1|)}{(\varepsilon K)^{(n-1)/2}}\mathrm{d}t_1\wedge \mathrm{d}t_2\wedge \mathrm{d}L_1. \tag{18.2}$$

设Q为凸体，并对于一切点偶$P_1, P_2(\in Q)$取(18.2)的积分。在右边，得积分

$$\Phi_{n-1}(\sigma,\varepsilon K)=\int_0^\sigma\int_0^\sigma \frac{\sin^{n-1}((\varepsilon K)^{1/2}|t_2-t_1|)}{(\varepsilon K)^{(n-1)/2}}\mathrm{d}t_2\wedge \mathrm{d}t_1 ①. \tag{18.3}$$

当n是奇数时，

$$\begin{aligned}\Phi_{n-1}(\sigma,\varepsilon K) &= -\frac{2}{(n-1)(\varepsilon K)^{(n+1)/2}}\Big[\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}((\varepsilon K)^{1/2}\sigma) \\ &\quad+\sum_{i=1}^{(n-3)/2}\frac{(n-2)\cdots(n-2i)}{(n-3)\cdots(n-1-2i)}\sin^{n-1-2i}((\varepsilon K)^{1/2}\sigma)\Big]\end{aligned}$$

---

① σ表示弦$L_1\cap Q$的长。——译者

$$+\frac{(n-2)\cdots 1}{(n-1)\cdots 2}(\varepsilon K)^{-(n-1)/2}\ \sigma^2 \text{①};\tag{18.4}$$

而当 n 为偶数且$n>2$时，

$\Phi_{n-1}(\sigma,\varepsilon K)$

$$= -\frac{2}{(n-1)(\varepsilon K)^{(n+1)/2}}\left[\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}((\varepsilon K)^{1/2}\sigma)\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{(n-2)/2}\frac{(n-2)\cdots(n-2i)}{(n-3)\cdots(n-1-2i)}\sin^{n-1-2i}((\varepsilon K)^{1/2}\sigma)$$

$$\left.-\frac{(n-2)\cdots 2}{(n-3)\cdots 1}(\varepsilon K)^{1/2}\sigma\right];\tag{18.5}$$

$n=2$时，

$$\Phi_1(\sigma,\varepsilon K)=2((\varepsilon K)^{1/2}\sigma-\sin((\varepsilon K)^{1/2}\sigma))(\varepsilon K)^{-3/2}.\tag{18.6}$$

于是取(18.2)两边的积分，得

$$\int_{L_1\cap Q\neq\varnothing}\Phi_{n-1}(\sigma,\varepsilon K)\mathrm{d}L_1=V^2,\tag{18.7}$$

而这就是所要求的推广. 例如$n=2$时，就有

$$\frac{1}{\varepsilon K}\int_{L_1\cap Q\neq\varnothing}\left(\sigma-\frac{\sin((\varepsilon K)^{1/2}\sigma)}{(\varepsilon K)^{1/2}}\right)\mathrm{d}L_1=\frac{1}{2}F^2,\tag{18.8}$$

而$n=3$时，

$$\frac{1}{\varepsilon K}\int_{L_1\cap Q\neq\varnothing}\left(\sigma^2-\frac{1}{\varepsilon K}\sin^2((\varepsilon K)^{1/2}\sigma)\right)\mathrm{d}L_1=2V^2.\tag{18.9}$$

由(18.8)，利用(17.44)，可见 $\varepsilon=+1$ 时(椭圆平面上)，

$$\int_{Q\cap L_1\neq\varnothing}\sigma\mathrm{d}L_1=\pi F,$$

$$\int_{Q\cap L_1\neq\varnothing}\sin\sigma\mathrm{d}L_1=\pi F-\frac{1}{2}F^2,\tag{18.10}$$

---

① 原文总和号下的分母中最后一个因子是$(n-1-2i)^2$，疑误。——译者

而$\varepsilon=-1$时(双曲平面上),

$$\int_{Q\cap L_1\neq\varnothing}\sigma dL_1=\pi F,$$

$$\int_{Q\cap L_1\neq\varnothing}\sinh\sigma dL_1=\pi F+\frac{1}{2}F^2. \qquad (18.11)$$

作为练习,试证明:若取$K\to0$时的极限,则(18.8)和(18.9)依次变成(4.9)和$n=3$时的(14.24)。

2. 椭圆空间的对偶公式

在椭圆空间($\varepsilon=+1$)里,所谓的对偶原则是适用的。这个原则指出:若在每个定理中,把"点"和"超平面"互换,同时对词语作相应的改动(如"含有"和"含在…内"互换,"r维"和"$n-r-1$维"互换),则所得定理仍然正确。在第17章第2节已经看到,对应于每一个L_r,有一个L^P_{n-r-1},称为L_r的对偶。我们下面就把前节的一些公式"翻译"成它们的对偶公式。

首先考虑公式(17.44)。假定Q为凸体。直线L_1的对偶是一个L^P_{n-2},而弦$Q\cap L_1$的长λ则对应于角$\pi-\phi^P$,其中ϕ^P是经过L^P_{n-2}而和Q的对偶Q^P相切的两个超平面之间的角。于是由(17.44),得

$$\int_{Q^P\cap L^P_{n-2}\neq\varnothing}(\pi-\phi^P)dL^P_{n-2}=\frac{1}{2}O_{n-1}V. \qquad (18.12)$$

和Q^P不相交的一切L^P_{n-2}的测度等于和Q相交的一切L_1的测度;因此,根据(17.61),它等于$(O_n/4\pi)F$。于是由(18.12),得

$$\int_{Q^P\cap L^P_{n-2}\neq\varnothing}\phi^P dL^P_{n-2}=(O_n/4)F-(O_{n-1}/2)V, \qquad (18.13)$$

或者,把Q和Q^P互换,得

$$\int_{Q\cap L_{n-2}\neq\varnothing}\phi dL_{n-2}=(O_n/4)F^P-(O_{n-1}/2)V^P, \qquad (18.14)$$

其中F^p和V^p是Q^p的表面积和体积，它们的值可以从第17章第2节的公式推得。

例如$n=2$时，(18.14)化为

$$\int_{P\notin Q}\phi \mathrm{d}P=\pi(L-F), \tag{18.15}$$

其中ϕ是从Q外一点到Q的两条切线之间的角。$n=3$时，就有

$$\int_{Q\cap L_1\neq\varnothing}\phi \mathrm{d}L_1=2\pi(M_1+V)-\frac{1}{2}\pi^2F, \tag{18.16}$$

这里面我们利用了(17.31)。

我们还要通过对偶原则翻译公式(18.7)。注意当n是偶数时，根据(18.5)，有($n>2$时)

$$\Phi_{n-1}(\pi-\phi,1)=\Phi_{n-1}(\phi,1)+\frac{2(n-2)\cdots2}{(n-1)\cdots1}\pi-\frac{4(n-2)\cdots2}{(n-1)\cdots1}\phi. \tag{18.17}$$

因此，利用(18.12)和(18.7)就得

$$\int_{Q\cap L_{n-2}\neq\varnothing}\Phi_{n-1}(\phi,1)\mathrm{d}L_{n-2}$$
$$=(V^p)^2+\frac{(n-2)\cdots2}{2(n-1)\cdots1}(O_nF^p-4O_{n-1}V^p), \tag{18.18}$$

其中ϕ是经过L_{n-2}而和Q相切的两个超平面间的角，而$\Phi_{n-1}(\phi,1)$则可从(18.5)推得。

与此类似，n为奇数时，

$$\int_{Q\cap L_{n-2}\neq\varnothing}\Phi_{n-1}(\phi,1)\mathrm{d}L_{n-2}$$

$$=(V^p)^2+\frac{(n-2)\cdots1}{(n-1)\cdots2}\frac{\pi}{4}(O_nF^p-4O_{n-1}V^p). \tag{18.19}$$

例 $n=2$时，由(18.6)可得

$$\Phi_1(\pi-\phi,1)=\Phi_1(\phi,1)+2(\pi-2\phi),$$

而(18.18)化为

$$\int_{P\in Q}(\phi-\sin\phi)\mathrm{d}P=\frac{1}{2}L^2-\pi F; \tag{18.20}$$

这是Crofton 的经典结果(4.23)到椭圆平面的推广。由(18.20)和(18.14)，得

$$\int_{P\in Q}\sin\phi\mathrm{d}P=\pi L-\frac{1}{2}L^2. \tag{18.21}$$

$n=3$时，利用(17.31)，由(18.19)可得

$$\frac{1}{2}\int_{L_1\cap Q\neq\varnothing}(\phi^2-\sin^2\phi)\mathrm{d}L_1=(M_1+V)^2-\frac{\pi^3}{4}F; \tag{18.22}$$

这是Herglotz公式(14.33)到三维椭圆空间的推广

3. 非欧空间的运动基本公式

对于曲率为εK 的 n维非欧空间里具有充分光滑的边界的域，n维欧氏空间的公式(15.72)也是正确的。这是因为，证明该公式的一切步骤都是根据关于超曲面的局部微分几何公式，而这些公式(例如 Meunier,Euler,Rodrigue 公式)对于欧氏空间和非欧空间都有相同的形状。公式(15.72)对于$q=1,2,\cdots,n-1$都适用。$q=n$时，它必须代以(15.36)，并要把(15.37)考虑在内。换句话说，作为(15.72)的补充，还有($q=n$时)

$$\int_{D_0\cdot D_1\neq\varnothing}M_{n-1}(\partial(D_0\cap D_1))\mathrm{d}K_1$$
$$=O_{n-1}\cdots O_1\Big[M^0_{n-1}V_1+M^1_{n-1}V_0$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}M^0_hM^1_{n-2-h}\Big], \tag{18.23}$$

这个公式对于曲率为 εK 的非欧空间里任意一对具有充分光滑边界的域 D_0, D_1 都是正确的。

作了这些准备之后，就容易得到非欧空间的基本运动公式了。我们分别考虑 n 为偶数和 n 为奇数两款。

(1) n 为偶数。我们把Gauss-Bonnet公式(17.21)应用于交集 $D_0\cap D_1$，并对一切 D_1 的位置取积分。体积 $V(D_0\cap D)$ 的积分是可以直接得到的：

$$\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing} V(D_0\cap D_1)\mathrm{d}K_1 = O_{n-1}\cdots O_1 V_0 V_1. \quad (18.24)$$

然后，由(15.72)和(18.23)，经过一些调整，得

$$\begin{aligned}
&\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\chi(D_0\cap D_1)\mathrm{d}K_1\\
&= -\frac{2O_{n-1}\cdots O_1}{O_n}(\varepsilon K)^{n/2}V_0V_1\\
&\quad + O_{n-1}\cdots O_1(V_1\chi_0 + V_0\chi_1)\\
&\quad + O_{n-2}\cdots O_1\frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}M_h^0 M_{n-2-h}^1\\
&\quad + O_{n-2}\cdots O_1\Bigg\{\sum_{i=0}^{n/2-2}\binom{n-1}{2i+1}\frac{n-2i-2}{O_{n-2i-3}}\\
&\quad \times\frac{2}{O_{n-2i-2}}(\varepsilon K)^{(n-2i-2)/2}\\
&\quad \times\sum_{h=n-2i-2}^{n-2}\frac{\binom{2i+1}{n-h-1}O_{2n-h-2i-2}}{(h+1)O_{n-h}}\frac{O_h}{O_{2i+h-n+2}}\\
&\quad \times M_{n-2-h}^1 M_{h+2i+2-n}^0\Bigg\}.
\end{aligned}\quad (18.25)$$

(2) n 为奇数。把(17.22)应用于 $D_0\cap D_1$ 并对于 D_1 的一切位置取积分，利用(15.72)，则经过一些调整，得

$$
\begin{aligned}
&\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\chi(D_0\cap D_1)\mathrm{d}K_1\\
&\quad=O_{n-1}\cdots O_1(V_1\chi_0+V_0\chi_1)\\
&\qquad+O_{n-2}\cdots O_1\ \frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n}{h+1}M_h^0M_{n-2-h}^1\\
&\qquad+O_{n-2}\cdots O_1\left\{\sum_{i=0}^{(n-3)/2}\binom{n-1}{2i}\frac{2}{O_{n-2i-1}}\right.\\
&\qquad\times\frac{n-2i-1}{O_{n-2i-2}}(\varepsilon K)^{(n-1-2i)/2}\\
&\qquad\times\sum_{h=n-2i-1}^{n-2}\binom{2i}{n-h-1}\frac{O_h}{O_{2i+h-n+1}}\ \frac{O_{2n-h-2i-1}}{(h+1)O_{n-h}}\\
&\qquad\left.\times M_{n-2-h}^1M_{h+2i+1-n}^0\right\}. \qquad (18.26)
\end{aligned}
$$

$n=2$时，公式(18.25)必须写成

$$
\begin{aligned}
&\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\chi(D_0\cap D_1)\mathrm{d}K_1\\
&\quad=-(\varepsilon K)F_0F_1+2\pi(F_1\chi_0+F_0\chi_1)+L_0L_1, \qquad (18.27)
\end{aligned}
$$

而$n=3$时，

$$
\begin{aligned}
&\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\chi(D_0\cap D_1)\mathrm{d}K_1\\
&\quad=8\pi^2(V_1\chi_0+V_0\chi_1)+2\pi(F_0M_1+F_1M_0). \qquad (18.28)
\end{aligned}
$$

注意根据(18.25)和(18.26)，只有当$n=3$时，运动基本公式和空间曲率无关。关于椭圆空间的基本公式①，见[732]。

4. 非欧空间的 Steiner 公式

考虑D_1为半径等于ρ的球体而D_0为一个凸集的特款。这时，

① 原文作“关于椭圆空间的基本公式的对偶”，误。——译者

若 $Q\cap D_1\neq\varnothing$，则 $\chi(Q\cap D_1)=1$，否则 $\chi(Q\cap D_1)=0$。利用关于 dK_1的表达式(17.32)，选取球体D_1 的中心为动标原点，对于D_1 的每个位置，可以积分 $du_{n-1}\wedge\cdots\wedge du_1$，而运动基本公式就给出平行于Q的凸体$Q_\rho$(距离为$\rho$)的体积(即非欧空间的Steiner 公式)。所得结果是颇为复杂的，我们将只写出$n=2,3$两款的公式。关于探讨这个问题的另一途径，参考Allendoerfer[4]。

(a) $n=2$。经过记号的自然变动：$V_0\to F_0, V_1\to F_1, M_0^0\to L_0$，$M_0^1\to L_1$，其中$L_0, F_0$为Q的周长和面积，而$L_1, F_1$为半径等于$\rho$的圆盘的周长面积，即

$$
\begin{aligned}
L_1 &= (2\pi/(\varepsilon K)^{1/2})\sin((\varepsilon K)^{1/2}\rho),\\
F_1 &= (2\pi/\varepsilon K)[1-\cos((\varepsilon K)^{1/2}\rho)],
\end{aligned}
\tag{18.29}
$$

就得Q_ρ面积的表达式[690]

$$
F_\rho = F\cos((\varepsilon K)^{1/2}\rho)+\frac{L_0}{(\varepsilon K)^{1/2}}\sin((\varepsilon K)^{1/2}\rho)
$$

$$
+\frac{2\pi}{\varepsilon K}[1-\cos((\varepsilon K)^{1/2}\rho)]。\tag{18.30}
$$

Q_ρ的周长可以从公式$L_\rho=dF_\rho/d\rho$计算。

(b) $n=3$。对于半径为ρ的球体，由(17.47)，(17.48)和(17.50)，得

$$
V_1=\frac{2\pi}{(\varepsilon K)^{3/2}}[(\varepsilon K)^{1/2}\rho-\sin((\varepsilon K)^{1/2}\rho)\cos((\varepsilon K)^{1/2}\rho)],
$$

$$
F_1=M_0^1=\frac{4\pi}{\varepsilon K}\sin^2((\varepsilon K)^{1/2}\rho),
$$

$$
\begin{aligned}
M_1 = M_1^1 &= \frac{4\pi}{(\varepsilon K)^{1/2}}\sin((\varepsilon K)^{1/2}\rho)\cos((\varepsilon K)^{1/2}\rho),\\
\chi_1 &= 1。
\end{aligned}
\tag{18.31}
$$

代入(18.26)，除以$8\pi^2$，得

$$
V_\rho=V_0+\frac{F_0}{(\varepsilon K)^{1/2}}\sin((\varepsilon K)^{1/2}\rho)\cos((\varepsilon K)^{1/2}\rho)
$$

$$+M_1\frac{\sin^2((\varepsilon K)^{1/2}\rho)}{\varepsilon K}+\frac{2\pi}{(\varepsilon K)^{3/2}}[(\varepsilon K)^{1/2}\rho$$

$$-\sin((\varepsilon K)^{1/2}\rho)\cos((\varepsilon K)^{1/2}\rho)]. \tag{18.32}$$

Q_ρ的表面积F_ρ可以从公式$F_\rho=dV_\rho/d\rho$计算。

5. 关于椭圆空间凸体的一个积分公式

考虑n维椭圆空间($\varepsilon=1, K=1$)。我们知道，直线是闭的，长度为π。设L_1为这样一条直线。可以把L_1看成一个退化的体，对于它，

$$\chi_1=0,\ V_1=0,\ M_0=M_1=\cdots=M_{n-3}=M_{n-1}=0,$$
$$M_{n-2}=[\pi/(n-1)]O_{n-2}, \tag{18.33}$$

然后应用基本公式(18.25)或(18.26)于$D_1=L_1$，$D_0=Q_0$的，款其中Q_0为固定凸体。这时$\chi(Q_0\cap L_1)=1$。设P为L_1上一点，而取以P为动标原点的运动密度(17.32)。左边的积分等于

$$O_{n-1}\cdots O_1V_0+2O_{n-2}\cdots O_1\int_{P\in Q_0}\Omega dP, \tag{18.34}$$

其中Ω是从P(在Q_0外)所看到的，Q_0所含的立体角。在左边第二项前出现因子2，是因为(由于L_1是闭的)P是Q_0所含的两个立体角的共同顶点。根据(18.33)，右边[①]简化为

$$O_{n-1}\cdots O_1O_{n-2}(\pi/(n-1))M_0^1.$$

因此，令$M^1=F_0$，即∂Q_0的面积，就有公式

$$\int_{P\in Q_0}\Omega dP=\frac{\pi}{2(n-1)}O_{n-2}F_0-\frac{1}{2}O_{n-1}V_0. \tag{18.35}$$

$n=2$时，又一次得(18.15)。

6. 注记

(1) **非欧空间里关于流形交集的积分公式**。对欧氏空间里已证明的公式(15.20)，对于非欧空间也适用，不需作任何变动，即：

---

① 原文作“左边积分”。——译者

设M^q为n维非欧空间里一个固定紧致r维流形而M^r为作运动的紧致r维流形。其运动密度是$\mathrm{d}K$。假定$r+q-n\geqslant 0$，并令$\sigma_{r+q-n}(M^q\cap M^r)$表示交集$M^q\cap M^r$的$r+q-n$维体积。则

$$\int_{M^q\cap M^r\neq\varnothing}\sigma_{r+q-n}(M^q\cap M^r)\mathrm{d}K$$

$$=\frac{O_nO_{n-1}\cdots O_1O_{r+q-n}}{O_qO_r}\sigma_q(M^q)\sigma_r(M^r), \quad (18.36)$$

其中$\sigma_q(M^q)$和$\sigma_r(M^r)$依次是M^q和M^r的体积。

若$r+q-n=0$，则$\sigma_{r+q-n}(M^q\cap M^r)$表示$M^q$和$M^r$的交点数。例如，若$\Gamma_0,\Gamma_1$为非欧平面上的两条曲线，则

$$\int_{\Gamma_0\cap\Gamma_1\neq\varnothing}n\mathrm{d}K_1=4L_0L_1, \quad (18.37)$$

其中L_0,L_1为两曲线的长而n为交点数.这表明庞加莱公式(7.11)与空间的曲率无关。

(2) **等周不等式**。设D_0,D_1为非欧平面上两个全等的域，它们的面积是F，边界是周长为L的单一闭线。假定D_0固定而D_1作运动，其运动密度是$\mathrm{d}K_1$，则$\chi(D_0\cap D_1)=\nu=$交集$D_0\cap D_1$的块数。由于$\chi(D_0)=\chi(D_1)=1$，基本公式(18.27)可以写成

$$\int_{D_0\cap D_1\neq\varnothing}\nu\mathrm{d}K_1=4\pi F+L^2-(\varepsilon K)F^2. \quad (18.38)$$

由于$\nu\leqslant n/2$，由(18.37)和(18.38)可知

$$L^2+\varepsilon KF^2-4\pi F\geqslant 0, \quad (18.39)$$

这就是曲率为εK的非欧平面里的等周不等式。按照第7章第5节的步骤，可以证明下面(关于凸域的)更强的不等式：

(a) 对于椭圆平面($\varepsilon=1,K=1$)，令$\Delta=L^2+F^2-4\pi F$，则有

$$\Delta\geqslant 4\pi^2\sin^2\left(\frac{r_M-r_m}{2}\right), \qquad \Delta\geqslant 4\pi^2\tan^2\left(\frac{r_M-r_m}{2}\right)[62],$$

$$\Delta\geqslant[F\cot(r_m/2)-L]^2, \qquad \Delta\geqslant[L-F\cot(r_M/2)]^2.$$

(b) 对于双曲平面 ($\varepsilon=-1, K=1$)，令 $\Delta=L^2-F^2-4\pi F$，则

$$\Delta \geqslant [L-F\coth(r_m/2)]^2,\quad \Delta \geqslant [F\coth(r_M/2)-L]^2.$$

在两款中，r_M 都是含凸域 D 在内的最小圆半径而 r_m 则是含在 D 内的最大圆半径[539,541]。关于椭圆平面上的等周不等式，见[341]；关于双曲平面的，见[458]。

(3) **非欧平面上的 Hadwiger 定理.** 采用第七章第 4 节推得 Hadwiger定理的同样论据，现在可得：

(a) 对于椭圆平面($\varepsilon=1, K=1$)：若 D_0 和 D_1 为逐段光滑的简单闭曲线所包围的两个域，不等式

$$L_0L_1-F_1(4\pi-F_0) \geqslant [L_0^2L_1^2-F_0F_1(4\pi-F_0)(4\pi-F_1)]^{1/2}$$

和

$$F_0(4\pi-F_1)-L_0L_1 \geqslant [L_0^2L_1^2-F_0F_1(4\pi-F_0)(4\pi-F_1)]^{1/2}$$

是 D_1 可以含在 D_0 内的两个充分(但不必要)条件.

(b) 对于双曲平面($\varepsilon=-1, K=1$)：其对应的条件是

$$L_0L_1-F_1(4\pi+F_0) \geqslant [L_0^2L_1^2-F_0F_1(4\pi+F_0)(4\pi+F_1)]^{1/2},$$

$$F_0(4\pi+F_1)-L_0L_1 \geqslant [L_0^2L_1^2-F_0F_1(4\pi+F_0)(4\pi+F_1)]^{1/2}.$$

特殊地，若 D_1 是幺球面上一个半径为 r 的圆，则 $L_1=2\pi\sin r$，$F_1=2\pi(1-\cos r)$，因此，由于椭圆平面局部和幺球面相同，可知：

在幺球面上，以一条简单闭曲线为边界的一个域 D_0 可以含一个角半径为 r 的球冠在内的充分条件是以下两不等式中任意一个成立：

$$\tan\left(\frac{r}{2}\right)<\frac{L_0-\Delta_0^{1/2}}{4\pi-F_0},\quad \cot\left(\frac{r}{2}\right)>\frac{L_0+\Delta_0^{1/2}}{F_0},$$

其中$\Delta_0=L_0^2-4F_0+F_0^2$。与此类似，下面条件中任意一个是$D_0$含于一个角半径为$R$的球冠内的充分条件：

$$\cot\left(\frac{R}{2}\right)<\frac{L_0-\Delta_0^{1/2}}{F_0},\quad \tan\left(\frac{R}{2}\right)>\frac{L_0+\Delta^{1/2}}{4\pi-F_0}.$$

下面是另一个同类的结果：设D为一个域，它不一定是凸的，面积为F，周长为L，而且它的边界是含在二维幺球面的一个半球面里的一条简单闭曲线。这样，含在D内就存在一个球冠，其角半径$\rho\geqslant F/L$。这个不等式是可能地最好的，即它不能用$\rho\geqslant c(F/L)(c>0)$代替。若$D$是凸的，则$D$内最大球冠的角半径满足$\rho\geqslant F/4$。这个不等式是 D.J.White[719]的结果，它可以推广到n维幺球面的凸域。这时，不等式可以写作$F\leqslant(\rho/\pi)O_n$，其中O_n是n维幺球面积。这个不等式是可能地最好的，取D为两个半球面的交集，就可以看出这一点。

(4) 一些覆盖问题。椭圆空间几何与球面几何局部相同。在第三节的基本公式中令$\varepsilon=1,K=1$，就得到n维幺球面的运动基本公式。下面我们把它应用于二维幺球面上的一些覆盖问题。

设K_0为二维幺球面U上固定凸域，它的面积是F_0，周长是L_0。设$K_1,K_2,\cdots,K_n$为在U上运动的全等凸域，面积是F，周长是L；设dK_i表示其对应的运动密度。设$F_{01\cdots n}$和$L_{01\cdots n}$表示$K_0\cap K_1\cap\cdots\cap K_n$的面积和周长。这样，仿照第六章第7节的方法，可以证明

$$\int F_{01\cdots n}dK_1\wedge dK_2\wedge\cdots\wedge dK_n=(2\pi)^nF^nF_0,\qquad(18.40)$$

$$\int L_{01\cdots n}dK_1\wedge dK_2\wedge\cdots\wedge dK_n$$
$$=(2\pi)^nF^nL_0+n(2\pi)^nF^{n-1}F_0L,\qquad(18.41)$$

其中积分范围是$K_i(i=1,2,\cdots,n)$的一切位置。

于是有以下中值：

$$E(F_{01\cdots n})=F^nF_0(4\pi)^{-n},$$

$$E(L_{01\cdots n})=(F^nL_0+nF^{n-1}F_0L)(4\pi)^{-n}. \qquad (18.42)$$

此外，多次应用(18.27)($\varepsilon=1, K=1$)，就得

$$I_{12\cdots n}=\int dK_1\wedge dK_2\wedge\cdots\wedge dK_n$$
$$=(2\pi)^n(F^n+nF_0F^{n-1})$$
$$+(2\pi)^{n-1}\left[nF^{n-1}L_0L+\binom{n}{2}F_0L^2F^{n-2}-nF_0F^n\right], \qquad (18.43)$$

其中积分范围是令 $K_0\cap K_1\cap\cdots\cap K_n\neq\varnothing$ 的一切 $K_1,\cdots,K_n$ 的位置。

这个结果可以叙述如下：

在二维幺球面上，已给一个固定凸集 K_0，n 个全等的随机凸集 $K_1,K_2,\cdots,K_n$ 在 K_0 内有非空交集的概率是

$$p=(8\pi^2)^{-n}I_{12\cdots n}, \qquad (18.44)$$

其中 $I_{12\cdots n}$ 的值为(18.43)所确定。

假定在幺球面上随机地选取 $n+1$ 个点。我们要求它们可以用一个半径为 r 的球冠覆盖的概率。若把每一点看作一个半径为 r 的球冠的中心，则所求概率等于 n 个半径为 r 的球冠同一个固定的半径为 r 的球冠有非空交集的概率。在(18.44)中，令 $L_0=L=2\pi\sin r$，$F_0=F=2\pi(1-\cos r)$，就得所求概率。

特殊地，令 $r=\pi/2$，就得：

二维幺球面上 $n+1$ 个点属于同一个半球面的概率是

$$p^*=\frac{1}{2^n}\left[(n+1)+\frac{n(n-1)}{2}\right]. \qquad (18.45)$$

通过对偶原则，可知这个公式也确定 $n+1$ 个随机半球面有非空交集的概率。若这 $n+1$ 个半球面有一个公共点 P，则 P 的反映点(和 P 在同一条直径上的点) P^* 就不属于这些半球面中的任何一个，因而这些半球面不覆盖 U。所以，$n+1$ 个随机半球面覆盖整个幺球面的概率是 $1-p^*$。

Wendel[714]证明了更一般的结果：m维欧氏空间幺球面上n个随机点属于同一个半球面的概率，当$n>m$时是

$$p_{n,m}=2^{-(n-1)}\sum_{h=0}^{m-1}\binom{n-1}{h}, \tag{18.46}$$

而当$n\leqslant m$时，$p_{n,m}=1$。n个随机半球面覆盖整个$m-1$维球面的概率是$1-p_{n,m}$。

下面是更困难而尚未解决的一个问题：求幺球面U上N个半径为$r<\pi/2$的随机球冠覆盖U的概率。Moran与Fazekas de St. Groth[431]给出了一个近似解，Gilbert[231]给出了概率的一些界值。

Miles[412]考虑了下面的一般问题。取一个点集X的n个随机子集。假定点$x\in X$在其中$H(x)$个子集内，对于$x\in X$，令$H_*=\min H(x)$，$H^*=\max H(x)$。换句话说，X中的区域最少被H_*个子集覆盖，最多被H^*个，$0\leqslant H_*\leqslant H^*\leqslant n$。假定每一个子集都是$X$的一个固定子集的均匀随机象，即它们是$X$的一个固定子集的$n$个不同位置，而这$n$个位置又是独立地选取的。求$n\to\infty$时，概率$p(H_*\leqslant m)$和$p(H^*\geqslant n-m)$的渐近值。假定$X$是$E_3$里的幺球面$U$而$Y$是一个球面多边形，即$U$上以大圆弧构成的简单闭曲线为边界的一个点集。设$F$和$L$为$Y$的面积和周长。设$Y_1,\cdots,Y_n$为$Y$的$n$个独立随机位置。这样，Miles证明了：$n\to\infty$时，

$$p\left(\bigcup_i^n Y_i\neq X\right)\sim n(n-1)L^2(4\pi-F)^{n-2}(4\pi)^{-n},$$

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n} Y_i\neq\varnothing\right)\sim n(n-1)L^2F^{n-2}(4\pi)^{-n}$$

和

$$p(H_*\leqslant m)$$

$$p(H_*=m)\sim\binom{n}{m+2}(m+1)(m+2)$$

$$\times L^2F^m(4\pi-F)^{n-m-2}(4\pi)^{-n}.$$

$$p(H^* \geqslant n-m)$$

和

$$p(H^*=n-m) \sim \binom{n}{m+2}(m+1)(m+2) \times L^2 F^{n-m-2}(4\pi - F)^m (4\pi)^{-n}.$$

最后两结果可以推广到 $Y(\subset X)$ 的边界是一条具有有界(球面)曲率的简单闭曲线的款.它们也可以推广到 m 维幺球面[412].

(5) **球面上的嵌装。**二维幺球面上，一组 n 个处于一般位置的大圆把 U 分割成 $a_n = n(n-1)+2$ 个球面凸多边形.这样一个多边形集合叫做球面上的一个嵌装，它有 $v_n = n(n-1)$ 个顶点和 $e_n = 2n(n-1)$ 个棱.若那几个大圆是随机地独立选取的，Miles[413]考虑了以下问题：求所得多边形(嵌装的面)的面积 F，周长 L，以及顶点数 N 的矩 E_n^*。一阶矩是可以立刻写出的：对于一切 $n \geqslant 2$，

$$E_n^*(F) = 4\pi/a_n, \quad E_n^*(L) = 4\pi n/a_n, \quad E_n^*(N) = 4n(n-1)/a_n. \tag{18.47}$$

二阶矩是

$$E_n^*(F^2) = 8\pi^2\gamma_n/a_n \quad (n \geqslant 1),$$

$$E_n^*(L^2) = 2\pi^2(1+\beta_{n,2})/a_n \quad (n \geqslant 2),$$

$$E_n^*(N^2) = (12n(n-1)+\beta_{n,4}/2)/a_n \quad (n \geqslant 4),$$

$$E_n^*(LN) = \pi(8n+\beta_{n,3})/a_n \quad (n \geqslant 3),$$

$$E_n^*(NF) = 2\pi\beta_{n,2}/a_n \quad (n \geqslant 2),$$

$$E_n^*(LF) = 4\pi^2\beta_{n,1}/a_n \quad (a \geqslant 1),$$

其中

$$a_n = n(n-1)+2$$

$$\beta_{n,i} = n(n-1)\cdots(n-i+1)\gamma_{n-i},$$

$$\gamma_j = 1 - \frac{j(j-1)}{\pi^2} + \frac{j(j-1)(j-2)(j-3)}{\pi^4} - \cdots$$

$$+\begin{cases} (-1)^{j/2}\,2(j!)\pi^{-j} & (j\ 为偶数), \\ (-1)^{(j-1)/2}\,(j!)\pi^{-j} & (j\ 为奇数)。\end{cases}$$

例如 $n=3$ 时(三个大圆所确定的三角形),

$E_3^*(F^2)=\pi^2-6$,　　$E_3^*(L^2)=(5/2)\pi^2$,　　$E_3^*(FL)=(3/2)\pi^2-6$。

若这些三角形是由三个随机点而不是由随机大圆所产生，则通过对偶原则，得

$E_3(F^2)=\pi^2/2$,　　$E_3(L^2)=3\pi^2-6$,　　$E_3(LF)=E_3^*(LF)$。

这些以及类似的结果是 Miles[413]的.

(6) **随机多面凸锥**。若 E_n 里已给N个超平面，它们中每 n 个有公共点，而任何 $n+1$ 个没有公共点，则空间被它们分割成

$$f(N,n)=\binom{N}{0}+\binom{N}{1}+\cdots+\binom{N}{n} \qquad (14.48)$$

个区域。

若所给N个超平面都经过原点O，但“具有一般位置”，则它们把空间分割成

$$C(N,n)=2\left[\binom{N-1}{0}+\binom{N-1}{1}+\cdots+\binom{N-1}{n-1}\right] \qquad (18.49)$$

个多面凸锥。在 E_n 里，若一组N个矢量中每 n 个线性无关，它们就叫做“具有一般位置”；若一组经过原点的N个超平面的法矢组具有一般位置，则这一组超平面叫做具有一般位置。

公式(18.48)和(18.49)是Schläfli[597]的结果.利用(18.49)，Cover 与 Efron[126]得到了下面的结果：

(a) 设 W 为N条随机半线所张成的一个随机多面凸锥。若W是一个正常锥(即N条半线都含在某个半空间里)，则W的 r 维面的个数的期望值是

$$E(R_r(W))=2^r\binom{N}{r}\frac{C(N-r,n-r)}{C(N,n)}, \qquad (18.50)$$

而

$$\lim_{N\to\infty} E(R_r(W)) = 2^r \binom{n-1}{r}. \qquad (18.51)$$

(b) 在 E_n 里，设 W^* 是一个随机多面凸锥，是 N 个经过原点的随机半空间的交集。在$W^*\neq\varnothing$的条件下，W^*的 r 维面的期望值 $R_r(W^*)(r=1,2,\cdots,n-1)$是

$$E(R_r(W^*)) = 2^{n-r}\binom{n}{n-r}\frac{C(N-n+r,r)}{C(N,n)}, \qquad (18.52)$$

而

$$\lim_{N\to\infty} E(R_r(W^*)) = 2^{n-r}\binom{n-1}{n-r}. \qquad (18.53)$$

若用 $n-1$ 维球面 U_{n-1} 去截：(a) 中的随机半线或(b) 中的随机半空间，由(a)和(b)中的定理就得到关于 U_{n-1} 上随机多边区域的期望值定理。特殊地，由定理(a)可知，若在 U_{n-1} 上取 N 个随机点，使它们都在某个半球面上，则它们的凸包(由 $n-2$ 维大球面构成)的顶点平均数是

$$E(R_1(W)) = 2NC(N-1,n-1)/C(N,n),$$

因而

$$\lim_{N\to\infty} E(R_1(W)) = 2(n-1). \qquad (18.54)$$

Cover 与 Efron[126]指出：在 E_3 里的幺球面上，若取 N 个随机点，使它们都在某个半球面上，则当N增大时，它们的凸包的顶点平均数并不无限制地增加而趋于极限 4。但在平面上，这个极限却变成无穷大(第二章,第 5 节注记 3)。另一方面，由(18.54)可知，若在二维幺球面上随机地选取N个大圆，则它们把球面分割成的区域的边数，当N变成无穷大时,有平均值 4 (从(18.47)最后公式也可以看出)。这和平面上随机直线所构成多边形的款一致(4.50)，和双曲平面上随机直线所构成多边形的款也一致[592]。

第十九章　积分几何与叶层空间；积分几何动向

1. 叶层空间

在以前各章，我们是从齐性空间角度来考虑积分几何的，这种空间的特征是它上面有一个可迁变换群 $\mathfrak{G}$. 嵌入这种空间里的几何对象集合的测度是以它们在 $\mathfrak{G}$下不变为条件来确定的，而这样的条件使测度除一个常数因子外完全确定了. 在曲率不等于常数的黎曼空间里，积分几何不能以这样的原则为基础，因为这种空间一般地既没有保持其度量不变的可迁群，也没有把短程线变为短程线的可迁群. 这样，短程线集合的密度就不能用它在某个群下不变的性质来确定.

但是，可以从另一个角度出发来给出短程线集合和点集测度的定义，这种测度虽然在任何群下都不是不变的，却具有某些不变性质，因而具有几何意义。这种方法是以叶层空间理论为依据而为 Hermann[308]和 Vidal Abascal[696—699] 所发展的. 我们将扼要地说明这个方法，并把它应用于黎曼流形的积分几何。

设X为 $m+n$ 维可微流形. 设F是切空间的一个m维线性子空间 F_x 所构成的场，即一个映射 F: $x \to F_x \subset T_x$, ($T_x = X$ 在 x 点的切空间)。假定F是完全可积的。这就是说，在每一点 $x \in X$ 邻近有坐标系$(x_1, x_2, \cdots, x_{n+m})$，在这个坐标系下，方程组 $x_{m+1}=$常数，$\cdots$，$x_{m+n}=$常数，局部地代表X的一些可微子流形L，而L的切空间就是子空间 F_x。这时，F就叫做X上的一个叶层而诸子流形L就叫做这个(m维)叶层的一叶。用 X/F 表示X上叶层的叶的集合。这个集合的整体研究一般是不容易的(参看 Palais

[466])。为我们的目的，我们假定 X/F 是一个 n 维可微流形，而且存在着从 X 每一个开子集 U 到 X/F 内的一个映射 θ: $U\to X/F$，它在叶上有常值，即对于属于一个叶的一切 $x\in U$，$\theta(x)$ 是 X/F 的同一点。

X 上的一个微分齐式 ω，若具有以下两性质，就叫做叶层 F 的一个不变齐式：(a)它在 X 的局部坐标变换下不变；(b) 它对于叶层的叶上位移不变。后一个性质的意义是：ω 成为 X/F 上的一个齐式，或者更具体些，对于每个映射 θ: $U\to X/F$，X/F 上就有一个对应的微分齐式 ω_θ，满足 $\theta^*(\omega_\theta)=\omega$(参考第九章，第3节)。

已给叶层的每一个非零不变齐式 ω，把 ω_θ 在 X/F 上积分，就得到叶的集合的一个测度。我们将把这些定义应用到 n 维黎曼流形的短程线的款。

2. 黎曼流形里的短程线集合

设 M 为 n 维黎曼流形，其基本二次齐式(在一个局部坐标系中)是

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx_i dx_j. \qquad (19.1)$$

令

$$\Gamma=\left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j\right)^{1/2},$$

$$p_i=\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{x}_i}, \quad i=1,2,\cdots,n, \qquad (19.2)$$

就有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{x}_i=\Gamma, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}p_ip_j=1, \qquad (19.3)$$

其中 g^{ij} 是逆方阵 $(g_{ij})^{-1}$ 的元素，而 $\dot{x}_i$ 是对于一个参数 t 的导

数。由于 g_{ij} 是一个共变张量而 $\dot{x}_i$ 是一个切矢，由(19.2)可知 Γ 是纯量不变量，而(19.3)表明 p_i 是M的一个幺余矢[量]。

取M的一切幺余矢所构成的丛为流形 X。X的一个局部坐标系是$(x_1,\cdots,x_n,p_1,\cdots,p_n)$，其中坐标 p_i 满足(19.3)中第二条件。因此，X 是 $2n-1$ 维的。根据定义，M的短程线是欧拉方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}=0, \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{19.4}$$

的积分曲线。

这组二阶微分方程的任何积分曲线都决定于一点$(x_1,\cdots,x_n)$和一个方向$(p_1,\cdots,p_n)$；也就是，经过 X 的每一点有唯一的一条积分曲线。由此可见，M的短程线确定 X 的一叶层 F_G。短程线 G 是这个叶层的一叶，而由 $\dim G=1$ 可知 $\dim X/F_G=2n-2$。

取X 的二次式

$$\mathrm{d}G^1=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}p_i\wedge \mathrm{d}x_i. \tag{19.5}$$

我们要证明 $\mathrm{d}G^1$ 是叶层 F_G 的一个不变齐式。为此，需要证明下面两个不变性。

(1) 对于坐标变换的不变性。 设$x'_1,\cdots,x'_n$为另一坐标系，它为 $x_i=x_i(x'_1,\cdots,x'_n)$所确定$(i=1,2,\cdots,n)$，其中函数$x_i(x'_1,\cdots,x'_n)$以及反函数 $x'(x_1,\cdots,x_n)$都是可微函数，其雅可比行列式不等于零。由于 p_h 是一个余矢，可知

$$\begin{aligned} p'_h&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial x'_h}p_i,\\ \mathrm{d}p'_h&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial x'_h}\mathrm{d}p_i+\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_h\partial x'_k}p_i\mathrm{d}x'_k, \end{aligned} \tag{19.6}$$

因而

$$\sum_{h=1}^{n}\mathrm{d}p_h\wedge \mathrm{d}x'_h=\sum_{h,i,j=1}^{n}\frac{\partial x_h}{\partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial x'_h}\mathrm{d}p_i\wedge \mathrm{d}x_j$$

$$+\sum_{i,k,h=1}^{n}\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_h\partial x'_k}p_i dx'_k\wedge dx'_h. \quad (19.7)$$

利用关系 $dx'_k\wedge dx'_h=-dx'_h\wedge dx_k$ 和

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial x_h}{\partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial x'_h}=\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\delta^i_j,$$

就得

$$\sum_{i=1}^{n}dp'_i\wedge dx'_i=\sum_{i=1}^{n}dp_i\wedge dx_i, \quad (19.8)$$

而这就证明了第一个不变性。

(2) 对于叶上位移的不变性。我们必须证明：dG^1 在短程线的任意二维集上的积分，对于短程线上的位移是不变的。下面是 Firey 的证明。

设 S 为双参数短程线族。短程线方程可以写成 $x_i=x_i(\alpha,\beta;t)(i=1,2,\cdots,n)$ 的形状，其中参数 α,β 确定族 S 中的具体短程线，而 t 是短程线上的参数。根据(19.2)，$p_i(\alpha,\beta;t)=\partial\Gamma(x_i(\alpha,\beta;t),\ \dot{x}_i(\alpha,\beta;t))/\partial\dot{x}_i$。设 R 为族 S 中的短程线的 (α,β) 值所构成的集合。我们要证明，对于一切 R，

$$m(S)=\int_S dG^1=\int_S\sum_{i=1}^{n}dp_i\wedge dx_i$$

$$=\int_R\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(p_i,x_i)}{\partial(\alpha,\beta)}d\alpha\wedge d\beta. \quad (19.9)$$

与 t 无关。

根据 Stokes 定理，

$$m(S)=-\int_C\sum_{i=1}^{n}p_i(\sigma;t)\frac{\partial x_i(\sigma;t)}{\partial\sigma}d\sigma, \quad (19.10)$$

其中 C：$\alpha=\alpha(\sigma),\beta=\beta(\sigma)$ 是 R 的边界，而且已经令

$$p_i(\sigma;t)=p_i(\alpha(\sigma),\ \beta(\sigma);t),$$
$$x_i(\sigma;t)=x_i(\alpha(\sigma),\beta(\sigma);t).$$

这样

$$\frac{dm(S)}{dt} = -\int_C \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial \sigma} + p_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial\sigma\partial t}\right)d\sigma.$$

利用(19.2)和(19.4)，就得

$$\frac{dm(S)}{dt} = -\int_C\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \sigma}\right)d\sigma\right.$$

$$= -\int_C d\Gamma = 0. \tag{19.11}$$

由于这对于短程线的任意集合 S 都是正确的，dG^1 与 t 无关.

注意：为了应用 Stokes 定理，我们保留了 dG^1 的符号。但若像在积分几何中通常的作法，取绝对值 $|dG^1|$，它对于 t 仍然无关。为了证明这一点，我们把 R 划分成 R^+ 和 R^-，使得在 t，$\sum_1^n \partial(p_i, x_i)/\partial(\alpha,\beta)$ 在 R^+ 上 $\geqslant 0$ 而在 R^- 上则 <0，并且假设这两个点集的边界都是由有限多条逐段光滑的简单闭曲线所构成。于是

$$\int_R |dG^1| = \int_{R^+} dG^1 - \int_{R^-} dG^1.$$

后面两个测度都分别和 t 的选取无关，因而左边的也是如此.

这样，就证明了不变性 1 与 2。由于 dG^1 是叶层 F_G 的不变式，外积幂

$$dG^h = (dG^1)^h = \sum_{(i_1,\cdots,i_h)} dp_{i_1}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dp_{i_h}\wedge dx_{i_h} \tag{19.12}$$

$(h = 1, 2, \cdots, n-1)$ 也都是不变式。它们确定对于短程线的 $2h$ 维集合的测度。我们将讨论最有兴趣的两款 $h=1$ 和 $h=n-1$.

3. 短程线的二维集合的测度

设 M 为 $n(>2)$ 维黎曼流形。取它上面一个二维族的短程线，并假定，存在着一个横截曲面 B，和族中每条短程线相交于唯一的一点。这样的一个短程线集合叫做一个短程线汇。若选取一个

直角坐标系，使得 B 的方程(局部地)是 $x_3=0, x_4=0, \cdots, x_n=0$，则

$$ds^2=\sum_{i=1}^{n} g_{ii} dx_i^2, \qquad p_i=g_{ii}\frac{dx_i}{ds}. \tag{19.13}$$

短程线 G 和 x_i 线所作的角 α_i 确定于 $\cos\alpha_i=(g_{ii})^{1/2}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)$，故

$$p_i=(g_{ii})^{1/2}\cos\alpha_i,$$

$$dp_i=-(g_{ii})^{1/2}\sin\alpha_i d\alpha_i+\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial(g_{ii})^{1/2}}{\partial x_h}\cos\alpha_i\, dx_h. \tag{19.14}$$

根据第二个不变性，可以用 G 和 B 的交点 $P(x_1, x_2, 0, \cdots, 0)$ 来确定 G。于是得

$$\begin{aligned} dG^1 &= dp_1\wedge dx_1+dp_2\wedge dx_2 \\ &= -(g_{11})^{1/2}\sin\alpha_1 d\alpha_1\wedge dx_1-(g_{22})^{1/2}\sin\alpha_2 d\alpha_2\wedge dx_2 \\ &\quad +\left(\frac{\partial(g_{22})^{1/2}}{\partial x_1}\cos\alpha_2-\frac{\partial(g_{11})^{1/2}}{\partial x_2}\cos\alpha_1\right)dx_1\wedge dx_2. \end{aligned} \tag{19.15}$$

我们考虑一个短程线束，它和 B 的交点是一个域 R，而 R 的边界 ∂R 是一条逐段光滑的闭曲线。为了应用 Stokes 定理，与通常取绝对值为密度的办法相反，我们保留 dG^1 中的符号，而把 dG^1 的积分作为短程线束的测度。我们得

$$\begin{aligned} m_1(G) &= \int_R dG^1 \\ &= \int_{\partial R}(g_{11})^{1/2}\cos\alpha_1 dx_1+(g_{22})^{1/2}\cos\alpha_2 dx_2. \end{aligned} \tag{19.16}$$

若 ϕ 表示在 G 和 ∂R 的交点，G 同 ∂R 的切线所作的角，则由于 G 的幺切矢有分量 $(\cos\alpha_i)/(g_{ii})^{1/2}$，$\partial R$ 的幺切矢有分量 dx_i/ds，

$$\cos\phi=(g_{11})^{1/2}\cos\alpha_1\frac{dx_1}{ds}+(g_{22})^{1/2}\cos\alpha_2\frac{dx_2}{ds}, \tag{19.17}$$

于是

$$m_1(G) = \int_R dG^1 = \int_{\partial R} \cos\phi ds. \qquad (19.18)$$

E. Cartan[85]所发现的这个积分具有颇为有趣的性质。注意 $\cos\phi ds$ 是 ds 在相应短程线上的投影。因此，若取一切经过一个闭线上的点的短程线所构成的一个管状曲面，而 AEA' 是在该曲面上，这些短程线的正交轨线，则 $m_1(G)$ 等于弧 AA'（图19.1）。

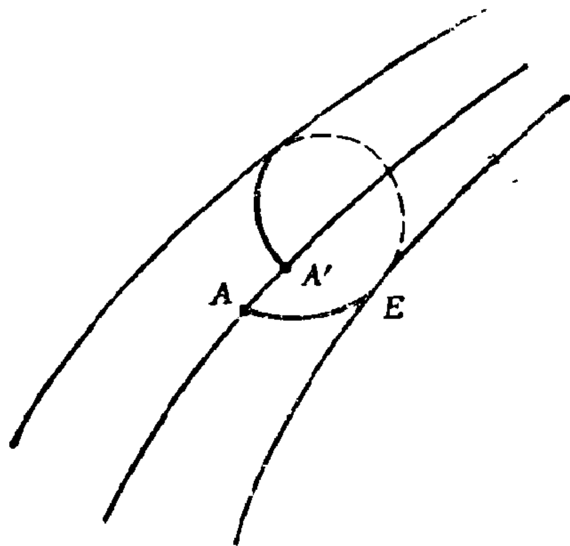


图 19.1

考虑$n = 3$的款。这时，若短程线汇中的短程线都和一个曲面 B 正交，则它就叫一个法汇。对于法汇，$A = A'$ 而 $m_1(G) = 0$。倒转来，对于已给线汇的任意一束短程线都有 $m_1(G) = 0$，则从一点 A 出发的一切正交轨线就产生一个曲面 B，汇中的短程线都和 B（在 A 邻近）正交。因此，该线汇是法汇，即：一个三维黎曼空间的一个短程线汇为法汇的一个充要条件是，对于它里面每一束短程线，$m_1(G) = 0$，这也就是说，$dG^1 = 0$

测度 $m_1(G)$ 的另一个性质是它经过对一个曲面的折射后的变化。若一条短程线在经过一个曲面 B 时是按照物理学中的折射定律 $\sin i = n\sin i'$ 变化的（其中 n 是折射指数，图19.2），由于 $i = \pi/2 - \phi$，$i' = \pi/2 - \phi'$，就有 $\cos\phi = n\cos\phi'$，因而 $m_1(G) = nm_1(G')$，其中 G' 表示折射后的短程线。于是，当一个短程线汇经过一个

折射指数为 n 的介质时，测度 $m_1(G)$ 变成 $nm_1(G')$。特殊地，法汇经过折射仍为法汇。

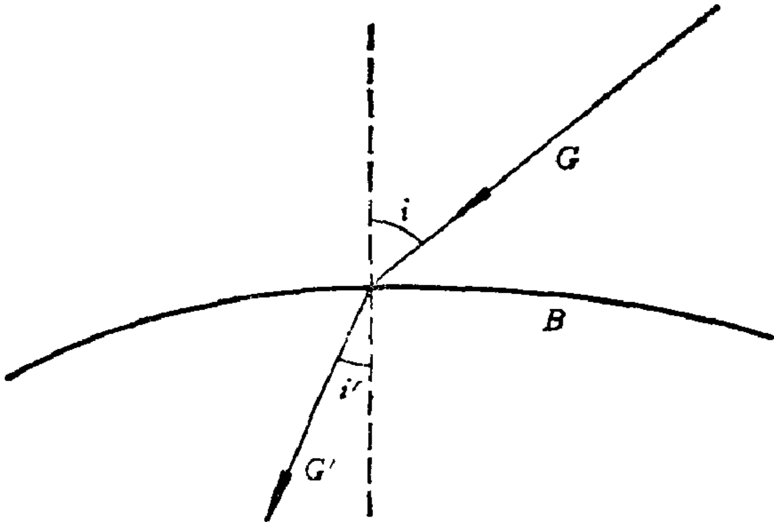


图 19.2

E_3 中直线的款．若黎曼流形 M 是欧氏空间 E_3，则短程线是直线，而密度 dG^1 和密度 dG^* (12.72)一致。事实上，若横截曲面 B 是一个平面 E，则

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad g_{11} = g_{22} = 1,$$

而(19.15)化为

$$dG^1 = -\sin\alpha_1 d\alpha_1 \wedge dx - \sin\alpha_2 d\alpha_2 \wedge dy$$

显然这里所得到的关于短程线汇的性质对于 E_3 里(直)线汇都是正确的．特殊地，$dG^* = 0$ 是一个线汇成为对于一个曲面的法汇的充要条件。

4. 短程线的 $2n-2$ 维集合的测度

依赖于 $2h$ 个参数的短程线集合可以通过密度 dG^h (19.12)来求其测度．我们已经讨论了 $h=1$ 的款，现在要讨论 $h=n-1$ 的款．关于当 $h=2,3,\cdots,n-2$ 的款，人们了解甚少。

$h=n-1$ 时，所考虑的密度是

$$dG^{n-1}=\sum_{i=1}^{n} dp_1\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dp_{i-1}\wedge dx_{i-1}$$

$$\wedge dp_{i+1}\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\wedge dp_n\wedge dx_n. \quad (19.19)$$

为了得到这个密度的一种几何意义，取一个和所给$2n-2$维集合中每一条短程线都相交的超曲面S_{n-1}。设G为集合中一条短程线而P为G和S_{n-1}的交点。在P的一个邻域里，可以假定S_{n-1}用方程$x_n=0$确定，而且坐标系是正交系，这样，方程(19.13)和(19.14)都适用。为了确定G，可以选取P，使$x_n=0$，$dx_n=0$，于是(19.19)化为

$$dG^{n-1}=dp_1\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dp_{n-1}\wedge dx_{n-1}, \quad (19.20)$$

或者，根据(19.14)，除了符号外：

$$dG^{n-1}=(g_{11}\cdots g_{n-1,n-1})^{1/2}\sin\alpha_1\cdots\sin\alpha_{n-1}dx_1\wedge\cdots$$

$$\wedge dx_{n-1}\wedge d\alpha_1\wedge\cdots\wedge d\alpha_{n-1}. \quad (19.21)$$

若$d\sigma$表示S_{n-1}上的$n-1$维面元，则

$$d\sigma=(g_{11}\cdots g_{n-1,n-1})^{1/2}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1},$$

而在以P为中心的$n-1$维幺球面上，对应于G在P的切线方向的面元则是

$$du_{n-1}=\frac{\sin\alpha_1\cdots\sin\alpha_{n-1}}{\cos\alpha_n}d\alpha_1\wedge\cdots\wedge d\alpha_{n-1}.$$

因此，(19.21)可以写成(取绝对值)

$$dG^{n-1}=|\cos\alpha_n|d\sigma\wedge du_{n-1}, \quad (19.22)$$

其中α_n是短程线和S_{n-1}在交点P的法线之间的角。

这个表达式(19.22)直接给出一个很普遍的积分公式。设$f(\sigma,\alpha_n)$为在S_{n-1}上确定的可积函数，它依赖于点$P(\sigma)$和在P的方向α_n。用f乘(19.22)两边，然后在S_{n-1}上和在$n-1$维幺半球面上(考虑无向短程线)取积分，则在左边，对每条短程线G，dG^{n-1}是总和$\sum f(\sigma_i,\alpha_{n,i})$的公因子，其中$f(\sigma_i,\alpha_{n,i})$是$f(\sigma,\alpha_n)$在$G$和$S_{n-1}$的$N$个交点的值。于是

$$\int\sum_{i=1}^{N} f(\sigma_i, a_{n,i})\mathrm{d}G^{n-1}$$

$$=\int_{S_{n-1}}\int_{U_{n-1/2}} f(\sigma, a_n)\,|\cos a_n|\,\mathrm{d}\sigma\wedge \mathrm{d}u_{n-1}。\qquad (19.23)$$

例如若$f=1$，则$|\cos a_n|\mathrm{d}u_{n-1}$的积分是$n-1$维幺球面在一个直径面上的投影的一半，因而

$$\int N\mathrm{d}G^{n-1}=[O_{n-2}/(n-1)]F, \qquad (19.24)$$

其中N是G和S_{n-1}的交点数，而F是S_{n-1}的面积。

5. 短程线段集合

设t表示短程线G上的弧长。由(19.22)得

$$\mathrm{d}G^{n-1}\wedge \mathrm{d}t=|\cos a_n|\mathrm{d}\sigma\wedge \mathrm{d}u_{n-1}\wedge \mathrm{d}t。\qquad (19.25)$$

乘积$|\cos a_n|\mathrm{d}t$等于弧元$\mathrm{d}t$到超曲面S_{n-1}在P的法线上的投影。因此$|\cos a_n|\mathrm{d}t\wedge \mathrm{d}P$代表所给黎曼流形在$P$的体元$\mathrm{d}P$。于是(19.25)可以写成

$$\mathrm{d}G^{n-1}\wedge \mathrm{d}t=\mathrm{d}P\wedge \mathrm{d}u_{n-1}。\qquad (19.26)$$

一段有向短程线S可以用G与t确定(其中G是含S在内的短程线，t是S的原点在G上的坐标)，也可以用P, u_{n-1}确定(其中P是线段S的原点，u_{n-1}是$n-1$维幺球面上对应于S的方向的点)。(19.26)中两个等价齐式中的任意一个都可以作为短程线段的密度。例如让我们考虑一个固定域D以及原点在D内的"有向"短程线S^*的集合的测度。(19.26)左边的积分是$2\lambda \mathrm{d}G^{n-1}$，其中$\lambda$表示$G$在$D$内那段弧长(因子2出现是因为$\mathrm{d}G^{n-1}$是无向短程线的密度)。(19.26)右边的积分等于$O_{n-1}V$，其中V是D的体积。于是得积分公式

$$\int_{D\cdot G\neq 0}\lambda \mathrm{d}G=\frac{1}{2}O_{n-1}V, \qquad (19.27)$$

这把(17.44)推广到黎曼流形。其他应用见[567]。

6. 复空间积分几何

复空间积分几何的研究尚未充分，可能值得进一步探索。我们将扼要地论述其中的诸密度以及关于 n 维复射影空间 $P_n(C)$ 和作用于它上面的酉群$\mathfrak{U}$的一些公式。

设z_i $(i=0,1,\cdots,n)$ 为一点$z\in P_n(C)$的齐次坐标，因而$z=(z_0,\cdots,z_n)$ 和$\lambda z=(\lambda z_0,\cdots,\lambda z_n)$ 确定同一点$(\lambda\neq 0)$。设$\bar{z}_i$ 表示z_i的共轭复数。我们引进Hermite内积

$$(z,\bar{y})=\sum_{i=1}^{n} z_i\bar{y}_i \tag{19.28}$$

并假定把齐次坐标z_i标准化，使得

$$(z,\bar{z})=\sum_{i=1}^{n} z_i\bar{z}_i=1。 \tag{19.29}$$

这个条件把坐标z_i确定到一个具有形状$\exp(i\alpha)$ $(i=\sqrt{-1}$，α 为实数）的因子。考虑一切令(19.29)不变的线性变换 $z'=Az$ 所构成的群 $\mathfrak{U}(n+1)$，它叫做酉群。这样，$(n+1)\times(n+1)$复方阵 A 满足

$$A\bar{A}^t=E,\quad A^{-1}=\bar{A}^t,\quad \bar{A}^tA=E, \tag{19.30}$$

其中 E 是$(n+1)\times(n+1)$幺方阵.这些关系表明,$\mathfrak{U}(n+1)$依赖于$(n+1)^2$个实参数。由于 z 和 $z\exp(i\alpha)$表示同一点,A和$A\exp(i\alpha)$确定同一个线性变换 $z'=Az$；因此，可以把 A 标准化，使 $\det A$ 成为实数，而由方程(19.30)，就得$\det A=1$。

如果 $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{U}(n+1)$ 表示方阵 $\exp(i\alpha)E$ 所构成的群，则商群 $\mathfrak{U}(n+1)/\mathfrak{R}$叫做Hermite椭圆群$\mathfrak{H}(n+1)$，它在$P_n(C)$里确定所谓的 Hermite 椭圆几何(见[89])。$\mathfrak{H}(n+1)$的元素 A 满足(19.30)，因而$\det A=1$；故$\mathfrak{H}(n+1)$的维数是$n(n+2)$。容易证明 $\mathfrak{U}(n+1)$ 和$\mathfrak{H}(n+1)$都是紧致群。

$\mathfrak{U}(n+1)$的Maurer–Cartan齐式用方阵

$$\Omega = A^{-1}\mathrm{d}A = \bar{A}^{t}\mathrm{d}A \quad (\text{因而}\Omega + \bar{\Omega}^{t} = 0) \tag{19.31}$$

确定。因此，一组Maurer–Cartan式是

$$\begin{gathered}\omega_{jk} = \sum_{h=0}^{n} \bar{a}_{hj}\mathrm{d}a_{hk} = (\bar{a}_j, \mathrm{d}a_k), \\ \omega_{jk} + \bar{\omega}_{kj} = 0,\end{gathered} \tag{19.32}$$

其中a_{hk}是方阵A的元素。

$\mathfrak{U}(n+1)$的运动密度等于一切独立的$\omega_{jk}, \bar{\omega}_{jk}$的外积，即除一个常数因子外，

$$\mathrm{d}\mathfrak{U} = \bigwedge(\omega_{jk} \wedge \bar{\omega}_{jk}) \wedge \omega_{hh} \quad j<k; \ 0 \leqslant j,k,h \leqslant n. \tag{19.33}$$

由于$\mathfrak{U}(n+1)$是紧致的，因而是幺模群，这个密度是左右不变式(第九章，第7节)。结构方程是

$$\mathrm{d}\omega_{jk} = -\sum_{i=0}^{n} \omega_{ji} \wedge \omega_{ik}. \tag{19.34}$$

$\mathfrak{H}(n+1)$有相同的不变式(19.32)和相同的结构方程(19.34)。唯一的区别是：对于$\mathfrak{H}(n+1)$，关系$\omega_{00} + \omega_{11} + \cdots + \omega_{nn} = 0$成立，这是对关系$\det A = 1$微导就可以得到的。因此，$\mathfrak{H}(n+1)$的运动密度是去掉一个$\omega_{ii}$以后的一切$\omega_{ij}$的外积。若令$\omega^{ii}$为从(19.33)去掉$\omega_{ii}$以后所得的外积，就可以把$\mathrm{d}\mathfrak{H}(n+1)$写成对称式[47]

$$\mathrm{d}\mathfrak{H}(n+1) = \omega^{00} + \omega^{11} + \cdots + \omega^{nn}. \tag{19.35}$$

线性子空间和正规链的密度。我们要对于$P_n(C)$里的线性子空间和正规链给出在$\mathfrak{H}(n+1)$下的不变密度。除一个常数因子外，它们和在$\mathfrak{U}(n+1)$下的不变密度相同。

设L_r^0为$P_n(C)$的一个固定的r维平面，而$\mathfrak{h}_r$表示令L_r^0不变的$\mathfrak{H}(n+1)$的子群。r维平面的不变密度是齐性空间$\mathfrak{H}(n+1)/\mathfrak{h}_r$

的不变体元。由于$\mathfrak{h}_r$是紧致群$\mathfrak{H}(n+1)$的闭子群，它也是紧致的，因而$\mathfrak{H}(n+1)/\mathfrak{h}_r$有不变体元。为了求它，我们沿用第10章的一般方法。设a_k $(k=0,1,\cdots,n)$是以方阵A的第k列元素为坐标的点。由条件(19.30)可知$(a_j,\bar{a}_k)=\delta_{jk}$，而由(19.32)就得$\mathrm{d}a_k=\sum\limits_0^n \omega_{jk}a_j$。假定$L_r^0$为$a_0,a_1,\cdots,a_r$诸点所确定，则$0\leqslant k\leqslant r$，$r+1\leqslant j\leqslant n$时，$\omega_{jk}=0$。由于$\omega_{jk}$是复齐式，由$\omega_{jk}=0$得$\bar{\omega}_{jk}=0$；于是在$\mathfrak{H}(n+1)$下$r$维平面的不变密度是

$$\mathrm{d}L_r=\bigwedge(\omega_{jk}\wedge\bar{\omega}_{jk})\quad(0\leqslant k\leqslant r,\ r+1\leqslant j\leqslant n),\tag{19.36}$$

而这个密度除一个常数因子外是完全确定的。注意$\mathrm{d}L_r$是一个$2(r+1)(n-r)$次微分齐式，而这是可以预料的，因为$P_n(C)$的r维平面依赖于$2(r+1)(n-r)$个实参数。

$r=0$时，所得的是点密度，即$P_n(C)$对于Hermite（椭圆）几何的体元，它和从所谓Hermite度量

$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}z,\mathrm{d}\bar{z})-(z,\mathrm{d}\bar{z})(\bar{z},\mathrm{d}z)\tag{19.37}$$

推得的体元一致，在(19.37)里，z是按照(19.29)标准化了的。为了证实这一点，我们把(19.37)应用于点a_0，就得

$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}a_0,\mathrm{d}\bar{a}_0)-(a_0,\mathrm{d}\bar{a}_0)(\bar{a}_0,\mathrm{d}a_0)=\sum^n\omega_{j0}\bar{\omega}_{j0},$$

而体元是$\bigwedge\omega_{j0}\wedge\bar{\omega}_{j0}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，和$\mathrm{d}L_0$一致。

在复空间$P_n(C)$里，除线性子空间外，还有所谓的**正规链**。一个n维正规链K_n是一个点集，它的点可以具有参数表达式

$$z=\sum_{i=0}^n\lambda_i a_i,\tag{19.38}$$

其中λ_i为满足$\sum\limits_0^n\lambda_i^2=1$的实参数。一个正规链依赖于$(n+1)(n+2)/2$个实参数。为了求正规链的密度，令$\omega_{rs}=\alpha_{rs}+\mathrm{i}\beta_{rs}$，其中$\alpha_{rs}$，$\beta_{rs}$是实齐式，根据(19.32)，它们满足关系$\alpha_{rs}+\alpha_{sr}=0$，$\beta_{rs}-$

$\beta_{sr}=0$。我们有

$$dz=\sum_{h=0}^{n}\lambda_h da_h$$

$$=\sum_{h=0}^{n}\lambda_h\alpha_{jh}a_j+\mathrm{i}\sum_{j,h=0}^{n}\lambda_h\beta_{jh}a_j, \tag{19.39}$$

因此，若K_n固定，则$j,h=0,1,\cdots,n$时，$\beta_{jh}=0$。于是在$\mathfrak{H}(n+1)$下，正规链的密度是去掉一个β_{ii}以后，一切β_{jh}的外积(因为由关系$\omega_{00}+\cdots+\omega_{nn}=0$可知$\beta_{11}+\cdots+\beta_{nn}=0$)。用$\beta^{ii}$表示去掉$\beta_{ii}$以后一切$\beta_{jh}$的外积，则正规链的密度化为[47]

$$dK_n=\beta^{11}+\beta^{22}+\cdots+\beta^{nn}. \tag{19.40}$$

正规链 $K_r(r<n)$ 的密度等于K_r作为子空间L_r内的正规链密度和L_r的密度dL_r的外积。

积分公式。我们将叙述 Hermite 空间积分几何的若干结果而略去证明(细节见 Santaló [564])。$\mathfrak{U}(n+1)$ 和 $\mathfrak{H}(n+1)$两个群都具有有限体积；根据(19.33)和(19.35)，它们的体积依次是

$$m(\mathfrak{U}(n+1))=\mathrm{i}^{(n+1)(n+2)/2}\prod_{h=1}^{n+1}\frac{(2\pi i)^h}{(h-1)!} \tag{19.41}$$

和

$$m(\mathfrak{H}(n+1))=\mathrm{i}^{n(n+3)/2}\prod_{h=2}^{n+1}\frac{(2\pi i)^h}{(h-1)!}, \tag{19.42}$$

其中添上了 i 的相应的幂作为因子，以便得到实值的测度。

n 维Hermite空间的一切 r 维平面的测度也是有限的，它的值是

$$m(L_r)=\frac{(2\pi)^{(n-r)(r+1)}1!2!\cdots r!}{n!(n-1)!\cdots(n-r)!}. \tag{19.43}$$

令$r=0$，就得 n 维Hermite(椭圆)空间的体积

$$m(L_0)=\frac{(2\pi)^n}{n!}. \tag{19.44}$$

设C_h是$P_n(C)$里复 h 维的一个解析流形，这样的一个流形可以分段地用一组$n+1$个含 h 个复变数 $t_1,\cdots,t_h$ 的解析函数 $z_i=z_i(t_1,\cdots,t_h)$ $(i=0,1,\cdots,n)$来确定，其中$(t_1,\cdots,t_h)$ 属于一个域D。假定z_i是按(19.29)标准化了的，我们考虑$2h$次微分齐式

$$\Omega_h=\sum_{(i_1,\cdots,i_h)}dz_{i_1}\wedge d\bar{z}_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_h}\wedge d\bar{z}_{i_h},\tag{19.45}$$

其中总和的范围是一切组合 $i_1,i_2,\cdots,i_h=0,1,\cdots,n$。这个齐式在$\mathfrak{U}(n+1)$下是不变式(它实际上是在 $\mathfrak{U}(n+1)$下唯一的 $2h$ 次不变齐式；见[86])，而Ω_h在一个复 h 维平面上的积分是

$$\int_{L_h}\Omega_h=\frac{(2\pi i)^h}{h!}.\tag{19.46}$$

对于一个复 h 维解析流形C_h，令

$$J_h(C_h)=\frac{h!}{(2\pi i)^h}\int_{C_h}\Omega_h;\tag{19.47}$$

若C_h为代数流形，$J_h(C_h)$等于C_h的阶.

假定C_h固定而L_r是作运动的 r 维平面，其密度是 dL_r。这时有积分公式(假定$h+r-n\geqslant0$)

$$\int_{C_h\cap L_r\neq\varnothing}J_{h+r-n}(C_h\cap L_r)dL_r=m(L_r)J_h(C_h),\tag{19.48}$$

其中$m(L_r)$的值见(19.43)。特殊地，若$h+r-n=0$，$J_0(C_h\cap L_r)$表示C_h和L_r的交点数。

对于代数(紧致)流形，$J_0(C_h\cap L_{n-r})$是常数，等于流形的阶$J_h(C_h)$。对于非紧致流形，则$J_h(C_h)$和一个一般 $n-h$ 维平面同C_h的交点数(每个交点按其重数计算)之差，可以用一个在C_h边界上的积分表达[364,109]。

若C_r是另一个 r 维解析流形，$r+h-n\geqslant0$，而uC_r表示C_r在$u\in\mathfrak{U}(n+1)$下的象，则

$$\int_{\mathfrak{U}(n+1)} J_{r+h-n}(C_h \cap uC_r)\mathrm{d}\mathfrak{U}(n+1)$$

$$= m(\mathfrak{U}(n+1))J_h(C_h)J_r(C_r)。 \qquad (19.49)$$

同样的公式对于$\mathfrak{H}(n+1)$也是正确的，只须用$m(\mathfrak{H}(n+1))$代替$m(\mathfrak{U}(n+1))$。(19.48)和(19.49)的证明见[564]。运用流技巧，Schiffman[596]给出了一个推广和另一种证法。

公式(19.48)和(19.49)涉及不变量(19.47)。若考虑Hermite度量(19.37)所导出的C_h的体积来代替$J_h(C_h)$，所得公式不那么简单。由那些公式可以推得一些有趣的不等式，这些不等式和Wirtinger[728]所得到的那些有关，而后者则尚未全部求出。对于$n=2$，参考Rohde[516]和Varga[688](还可以参考De Rahm[145])。

关于代数流形，$J_{r+h-n}(C_h \cap uC_r)$与u无关，而(19.49)是Bezout定理。对于非紧致流形，(19.49)可以看作一个平均Bezout定理。把Bezout定理推广到非紧致流形的想法导致了重复的结果。令$C_h(\rho)=C_h \cap S(\rho)$，其中$S(\rho)=\{z; |z| \leqslant \rho\}$，并令

$$N(C_h,\rho)=\int_0^\rho J_h(C_h(t))(\mathrm{d}t/t).$$

Bezout问题就是通过ρ,$N(C_h,\rho)$和$N(C_r,\rho)$来估计$N(C_h \cap C_r,\rho)$。参看Carlson[82]，Stoll[655，656]，Griffiths[239]，以及Carlson与Griffiths[83]，在其中的若干处，积分几何起了重要作用。

Chern[110]把积分几何应用于一个复射影空间的子流形几何(还可以参考Pohl[482])。关于在多复变数的复解析映射上的应用见[114]。

全纯曲线。复积分几何已经成功地应用于复射影空间的亚纯曲线和全纯曲线理论，这些应用见于H. Weyl[717]，H. Weyl与J. Weyl[718]和L. Ahlfors[1]。考虑在复射影空间$P_n(C)$里一条半纯曲线C_1: $y=y(t)$，它用$n+1$个t的全纯函数$y^i=y^i(t)$ ($i=$

$0,1,\cdots,n$）确定，其中 t 是复变数，在一个已给黎曼面上变动。和C_1相联系，我们可以取C_1的$r-1$维密切线性空间所产生的流形C_r $(r=1,2,\cdots,n)$。设$Y_r(r=0,1,\cdots,n)$ 表示多重矢 $y\wedge y'\wedge y''\wedge\cdots\wedge y^{(r-1)}$，这个多重矢的分量是$r\times(n+1)$ 矩阵$(y^{k(i)})$的 r 阶行列式，其中 i 表示导数 $(i=0,1,\cdots,r)$而$k=0,1,\cdots,n$。这样，不变式$J_r(C_r)$可以写成

$$J_r(C_r)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_1}\frac{|Y_{r-1}|^2|Y_{r+1}|^2}{|Y_r|^4}\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}\bar{t},\qquad(19.50)$$

其中$|Y|^2$表示数积$Y\cdot\bar{Y}$．例如$r=1$时，

$$J_1(C_1)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_1}\frac{|y\wedge y'|^2}{|y|^4}\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}\bar{t},\qquad(19.51)$$

其中$y\wedge y'$表示具有分量$y^iy'^h-y^hy'^i$的二重矢。

对于一条平面代数曲线C_1：$y^0=y^0(t),y^1=y^1(t),y^2=y^2(t)$，除符号外，$J_2(C_1)$是$C_1$的级

$$J_2(C_1)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_1}\frac{|y|^2|yy'y''|^2}{|y\wedge y'|^2}\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}\bar{t},\qquad(19.52)$$

其中$|yy'y''|$表示以y,y',y''为元素的行列式的绝对值．

关于代数曲线的经典Plücker公式是不变量J_h之间的线性关系，即$s+J_{r-1}-2J_r+J_{r+1}=-\chi$，其中 s 是所谓平稳指数(依赖于C_1的临界点)而χ是C_1的参数 t 的值所在的黎曼面的欧拉-庞加莱示性数。积分公式(19.48)和(19.49)给出“类”的一项几何意义，显示了它和密切 h 维平面的轨迹同随机 $n-h$ 维平面或随机$n-h$维解析流形的平均交点数的关系．关于亚纯曲线，参看早期工作Weyl[717]和Ahlfors[1]以及较近的结果Hung-Hsi Wu[730]，Chern[115]和Griffiths[240]。

7．辛积分几何

设$Z=(z_{hk})$ 为具有复元素的$n\times n$对称方阵，而$\bar{Z}=(\bar{z}_{hk})$表

示Z的复共轭方阵。令 $Z = X + iY$，其中 $X = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z})$， $Y = (1/2i)(Z - \bar{Z})$，并令H为不等式$Y > 0$ 所确定的域。H的实维数是$n(n+1)$。若A, B, C, D为$n \times n$实方阵，而$2n \times 2n$实方阵

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{19.53}$$

满足关系

$$M'JM = J, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{19.54}$$

其中E是$n \times n$幺方阵而 0 表示零方阵。则一切方阵M所构成的群$\mathfrak{S}_0$叫做齐次辛群。由于$M'JM$是反称方阵，$\mathfrak{S}_0$的维数是$2n^2 + n$。

容易证明变换

$$Z' = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \tag{19.55}$$

把域H变为自己。它们构成辛群$\mathfrak{S}$，它可迁地作用于H上，而且可以从$\mathfrak{S}_0$把M同$-M$粘合得到。辛群$\mathfrak{S}$在H上确定所谓的辛几何。二次微分齐式

$$\begin{aligned} ds^2 &= \mathrm{Tr}(Y^{-1}dZY^{-1}d\bar{Z}) \\ &= \mathrm{Tr}(Y^{-1}dXY^{-1}dX + Y^{-1}dYY^{-1}dY) \end{aligned} \tag{19.56}$$

在$\mathfrak{S}$下不变，它在H上确定一个黎曼度量。这个度量所确定的体元是辛几何中的点密度。除一个常数因子外，这个密度可以写成

$$dP = [\mathrm{Tr}(Y^{-1}dZ \wedge Y^{-1}d\bar{Z})]^{n(n+1)/2}, \tag{19.57}$$

其中的幂应当理解为外积。

联系到短程线，可以证明，辛度量(19.56)在H任意两点之间正好确定唯一的一条联接它们的短程线，而且一切短程线都是$Z = i\exp(sG)$所代表的曲线的辛象(即辛群下的象曲线)，其中s是弧长而G是对角方阵$(\delta_{jk}g_k)$而 $0 < g_1 \leqslant g_2 \leqslant \cdots \leqslant g_n$ 是满足$\sum g_i^2 = 1$的任意常数。这就证明了，H的一切短程线划分为$n-1$维的辛等价类，其中每一类确定于满足$\sum g_i^2 = 1$的实数$(g_1, g_2, \cdots,$

g_n)。每一类的短程线以及经过一个定点的短程线都各有其密度。Legrady[358]研究了这些密度，并把它们应用于同一个固定超曲面相交的短程线集合的一种Crofton公式。

辛积分几何似很值得深入研究。关于辛几何中的必要概念，可以参考Siegel的基本论文[610]。

8. Gelfand 积分几何

Gelfand,Helgason和其他作者曾用积分几何这个名词来代表与本书意义不同的几何。他们考虑了下面的一般性问题。

设X为一个微分流形，在其中已经给定了一些子流形$M(u) = M(u_1,\cdots,u_k)$，它们解析地依赖于参数$u_1,\cdots,u_k$。对于X上的一个已给函数$f(x)$，取每个$M(n)$上的积分

$$\hat{f}(u) = \int_{M(u)} f(x)\mathrm{d}\sigma(u), \qquad (19.58)$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$是$M(u)$上一个适当的微分齐式。这样，就得到在子流形集上确定的一个新函数$\hat{f}$。问题是把"Radon变换" $f\to\hat{f}$ 逆转，即由$\hat{f}(u)$确定$f(x)$。1966年以前关于这个问题的结果，在Gelfand,Graev与Vilenkin的书[224]有系统的阐述。

经典的款是：X在$\boldsymbol{R}^n$内而流形$M(u)$则是$\boldsymbol{R}^n$中的超平面。当$n=2$和$n=3$时，这个问题1917年为Radon[493]所解决，而John[324]则把结果推广到任意n。

John的结果可以叙述如下。对于超平面$(u,x)=u_1x_1+\cdots+u_nx_n=p$，其中$u$为幺矢，$p$为实数，我们取微分齐式

$$\mathrm{d}\sigma = (-1)^{h-1}u_h^{-1}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{h-1}\wedge\mathrm{d}x_{h+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$$

(超平面上的有向面元)，它与h无关。这样，对于无穷次可微而急減(即迅速递减)的任意函数$f(x)$(这个条件可以减弱)，考虑Radon变换

$$\hat{f}(u,p)=\int_{(u,x)=p} f(x)\mathrm{d}\sigma. \qquad (19.59)$$

用$\hat{f}(u,p)$来表达$f(x)$的公式与空间维数是奇是偶有关。若 n 为奇数，Radon变换的逆是

$$f(x)=\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}}\int_{\Sigma}\hat{f}_p^{(n-1)}(u,(u,x))\mathrm{d}\sigma_1, \quad (19.60)$$

其中

$$\mathrm{d}\sigma_1=\sum_{1}^{n}(-1)^{h-1}u_h\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_{h-1}\wedge\mathrm{d}u_{h+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_n$$

为幺球S^{n-1}上的面元，而$\hat{f}_p^{(n-1)}$表示$\hat{f}(u,p)$对于 p 的$n-1$阶导函数。积分范围是把 u 空间的原点包在里面的任意超曲面Σ。

若 n 为偶数，Radon变换的逆是

$$f(x)=\frac{(-1)^{n/2}(n-1)!}{(2\pi)^n}\int_{\Sigma}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(u,p)[p-(ux)]^{-n}\mathrm{d}p\right)\mathrm{d}\sigma_1, \quad (19.61)$$

其中对 p 的积分是用其正则化式表达的。细节见[224]，那里还列有某些函数的Radon变换表。

若 f 是一个空间上的函数，如何通过关于 f 在空间的某些子集上积分的了解来确定该函数本身，这个问题是 Funk[210]首先提出的。他证明了，二维球面上一个对称于中心的函数 f 可以通过 f 在球面大圆的积分来确定（关于其对凸体的应用，见[50，第154页]）。Radon[493]探讨了在非欧单面上，从一个函数在各短程线上的积分求平面上的该函数的问题。与此有关的结果，见 Blaschke[39]和J.W.Green[235]。

Helgason[297]把Radon的和John的公式(19.60)，(19.61)推广到双曲空间；对于每一个具有界支集① 的函数$f(x)$，他取该函数在一切可能超曲面（短程流形）上的积分。Gelfand，Graev 与

① Support.——译者

Vilenkin[224]从另一角度来处理同一个问题，他们对于每个那样的函数，取它在极限球面上的积分；由于双曲空间的极限球面上的内蕴几何是欧氏几何，它们形成同欧氏空间超平面可以类比的一种图形。Gelfand与Graev[222]把上述结果推广到具有一个复等距群的非紧致对称空间，而Helgason则把Radon公式推广到一切非紧致对称空间。

Helgason[300,301]指出，如果把(19.59)考虑在内，公式(19.60)包含两个互相对偶的积分：先在一个经过x的已给超平面上积分，然后再对这个积分在经过x的超平面集合上积分。在这个对偶性指引下，Helgason采取了下面非常一般性步骤.

设G为一个局部紧致拓扑群。设H_X, H_Ξ为G的两个闭子群，并考虑左旁系$X=G/H_X$，$\Xi=G/H_\Xi$。假定：(a) $G, H_X, H_\Xi, H_X\cap H_\Xi$都是幺模群；(b) 若$h_X\in H_X, h_X H_\Xi\subset H_\Xi H_X$，则$h_X\in H_\Xi$；若$h_\Xi\in H_\Xi$，$h_\Xi H_X\subset H_X H_\Xi$，则$h_\Xi\in H_X$。

若X和Ξ里的两个元素，作为G里的旁系有公共点，则这两个元素称为互相关联。然后，对于$x\in X$，令$\check{x}=\{\xi\in\Xi;\ x,\xi$互相关联$\}$而对于$\xi\in\Xi$，令$\hat{\xi}=\{x\in X,\ x,\xi$互相关联$\}$。这些集合构成$G$的某些子群的旁系，它们有不变密度，依次可用$d\mu$和$dm$表示。这样，若$f$和$\phi$依次是在$X$和$\Xi$上适当限制了的函数，并令

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\hat{\xi}} f(x)\,dm(x), \qquad \check{\phi}(x)=\int_{\check{x}}\phi(\xi)\,d\mu(\xi), \tag{19.62}$$

Helgason[301]提出了下面一般性课题：

(a) 通过积分变换$f\to\hat{f}$和$\phi\to\check{\phi}$把X和Ξ上的函数空间相联系起来；

(b) 把X上的函数f与$(\hat{f})^\vee$和Ξ上的函数ϕ与$(\check{\phi})^\wedge$直接联系起来。

Helgason证明了，对于依次在X上和Ξ上适当标准化了的不变测度dx和$d\xi$，公式

$$\int_X f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_\Xi f(\xi)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (19.63)$$

对于一切具有紧致支集的连续函数 f 和ϕ成立。

下为一个例，设G为$\boldsymbol{R}^n$的一切刚体运动所构成的群。设H_X为G中令一个已给 h 维平面 L_h固定的子群而H_Ξ为G中令含L_h在内的一个 r 维平面L_r固定的子群($h<r$, $L_h\subset L_r$)。这样，则$X=G/H_X$是$\boldsymbol{R}^n$里 h 维平面集合而$\Xi=G/H_\Xi$是 r 维平面集合.密度$\mathrm{d}\mu(\xi)=\mathrm{d}L_{r[h]}$是经过 L_h的 r 维平面的不变密度，而$\mathrm{d}m(x)=L_h^{(r)}$是 L_r里的 h 维平面密度。于是公式(19.63)是(12.52)的一个推论.

公式(19.60)和(19.61)显示出，对于$\boldsymbol{R}^n$，在反演公式之间，n为奇数的款同n为偶数的款有着鲜明的对立。在前一款，(19.59)是通过一个微分算子的反演，而在后一款则是通过一个积分算子。对于对称空间，对立仍然存在，但决定性因素不是奇偶性，而是等距群的Cartan子群是否都互相共轭[301]。

John[324a]和Borovikov[65]给出了$\boldsymbol{R}^n$上的 Radon 变换对 $\boldsymbol{R}^n$里常系数微分方程的应用(参看Rhee[509])。Helgason[299,303,305]给出了对称空间上的Radon变换对解这些空间里的微分方程的应用.

Gelfand与Graev[222]，Gelfan, Graev与Vilenkin[224]和Hen lgason[300,304]给出了对群表示的若干例和应用。

关于对称空间上Radon变换作了进一步工作的有 Helgaso-([302]；一秩紧致对称空间反格拉斯曼流形)；Petrov 和 Sibasov([472,607]；格拉斯曼流形)，以及Morimoto[433]和Kelly[331](关于较低维的极限圆).关于一种一般群论理论为基础的探讨，见[301]；关于微分齐式的有关推广，见Gelfand，Graev 与 Shapiro[223]，Kelly[331]，Morimoto[433]和Petrov[472]。

Ramanov[517]给出了关于积分几何的一些唯一性定理 例如他考虑了以下课题：设有一族迴转椭球，它们的一个焦点固定，设经过固定焦点的一个固定平面上有一个点集，而令另一个焦点

则在该点集上变动，问题是由一个函数在椭球族上的积分求函数本身。这个问题对于从地震学数据来研究地球内部结构有应用。

9. 注记

（1）Hermann的两个公式[308]。 (a) 设X为$m+n$维可微流形，它有叶层F. 设n为叶的维而X/F为叶的集合. 设Y为$m+p$维流形而α: $Y\to X$是可微映射。设$\theta^{(p)}$为Y上一个p次齐式而$\omega^{(m)}$为X上叶层F的一个不变m次齐式。假定对于每一个$L\in X/F$（除了一个测度为零的$\omega^{(m)}$的集合外），$\alpha^{-1}(L)$是Y的一个p维子流形。用公式

$$N(L)=\int_{\alpha^{-1}(L)}\theta^{(p)} \tag{19.64a}$$

在X/F上几乎处处确定函数N。则

$$\int_Y \alpha^*(\omega^{(m)})\wedge\theta^{(p)}=\int_{X/F}N\omega^{(m)}. \tag{19.64b}$$

作为这个公式的一项应用，假定$X\to Z$是由X到一个流形Z的映射，而$S(\subset Z)$是Z的一个子流形，它的维$\dim S=\dim Z-\dim F$. 设$Y=q^{-1}(S)$，而α: $Y\to X$的包含映射。这时，在公式(19.64a)里，对于$L(\in X/F)$，$N(L)$变成L在Z里的投影同S相交的次数，而(19.64a)的右边则是F的一切和S相交的叶的测度，都按其相重数计算。

(b) 设$\mathfrak{G}$为连通李群而$\mathfrak{L}$为其闭子群。设$\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$为$\mathfrak{L}$的左旁系空间，而$p$: $\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$为投影$g\to g\mathfrak{L}$。设$K$, K_0为$\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$的子流形，而且$\dim K+\dim K_0=\dim\mathfrak{G}/\mathfrak{L}$。设$gK$表示在$g(\in\mathfrak{G})$下$K$的象，而$N(g)$表示$gK\cap K_0$的点的数目. 假定有截影$\varphi$: $K\to\mathfrak{G}$和ψ: $K_0\to\mathfrak{G}$，并且对于$y\in K_0$，$s\in\mathfrak{L}$，$x\in K$，用下面关系确定映射α: $K_0\times\mathfrak{L}\times K\to\mathfrak{G}$:

$$\alpha(y,s,x)=\psi(y)s\varphi(x)^{-1}.$$

则

$$\int_{\mathfrak{G}} N \mathrm{d}g = \int_{K_0 \times \mathfrak{C} \times K} a^*(\mathrm{d}g),$$

其中$\mathrm{d}g$表示$\mathfrak{G}$上的左不变测度。$a^*(\mathrm{d}g)$的计算与$\mathfrak{G}$作为李群的结构有关。

（2） **短程线的$2h$维集合**。考虑公式 $\mathrm{d}G^h=(\mathrm{d}G^1)^h$(19.12)。假定$M_1$和$M_2$为黎曼流形$M$的两个 h 维子流形，而且每两点$P_1(\in M_1)$和$P_2(\in M_2)$确定唯一的一条短程线G。令$\mathrm{d}\sigma_i$为M_i在 P_i 的体元，r 为短程弧 P_1P_2的长，a_i为G 和M_i在P_i的切空间T_i所作的角，而θ为含T_i在内的$h+1$维短程流形和G之间的角$(i=1,2)$。这样，除去一个常数因子外，

$$\mathrm{d}G^h = r^{-h}\cos\theta\sin\alpha_1\sin\alpha_2 \mathrm{d}\sigma_1 \wedge \mathrm{d}\sigma_2.$$

关于E_n里的直线，见Pohl[481]。

（3） **矢量积分几何**。设K是E_n里一个凸体，它的边界是∂K，H_r表示∂K的 $n-1$个主曲率的第 r 个初等对称函数。K 的矢量截测积分的定义是

$$q_i(K) = \left(n\binom{n-1}{i-1}\right)^{-1} \int_{\partial K} x H_{i-1} \mathrm{d}\sigma \quad (i=1,2,\cdots,n);$$

$$q_0(K) = \int_K x \mathrm{d}v,$$

其中$\mathrm{d}v$是E_n的体元，$\mathrm{d}\sigma$为∂K的面元，而x表示从原点到有关点的矢量。因此，可以推得所谓曲率形心 $p_i = q_i/W_i (i=0,1,\cdots,n)$，其中 W_i 为普通截痕积分(13.8)和(13.45)。特殊地，p_n是K的Steiner点$s(K)$，它具有重要性质（关于参考文献及史实，见[247,248]）。Hadwiger与Schneider[280]把q_i，p_i的定义推广到凸环的点集D（即D是可以用有尽多个凸体的并集表示的点集）并且证明了，若用q_i来代替纯量截测积分W_i，则普通积分几何的许多公式都有其对应的公式.例如若D_1和D_0是同一个凸环的点集，$\mathrm{d}K_1$为域D_1的运动密度，而D_0为固定域，则

$$\int q_h(D_0 \cap D_1) dK_1 = \sum c_{nhi} W_{h-i}(D_0) q_i(D_1),$$

其中 c_{nhi}是某些常数。这是矢量积分几何中对应于(15.72)的公式。细节和推广见 Hadwiger与Schneider[280], Schneider[599, 600], Hadwiger与Meier[279]以及 H.R.Müller[438, 439]。

（4） **曲面上的积分几何.** 设$ds^2 = edu^2 + gdv^2$为一个曲面 Σ 在局部正交坐标系下的第一基本齐式。若ϕ表示在(u,v)点，短程线G和u线所作的角，则短程线密度(19.15)可以写成

$$dG = -\sqrt{e}\sin\phi d\phi \wedge du + \sqrt{g}\cos\phi d\phi \wedge dv$$
$$+ [(\partial\sqrt{g}/\partial u)\sin\phi - (\partial\sqrt{e}/\partial v)\cos\phi] du \wedge dv. \tag{19.65}$$

特殊地，若(u,v)是短程坐标系(即 v = 常数是短程线，而u是这些短程线上的弧长)，则$e=1$，而(19.65)化为

$$dG = (\partial\sqrt{g}/\partial u)\sin\phi du \wedge dv - \sin\phi d\phi \wedge du$$
$$+ \sqrt{g}\cos\phi d\phi \wedge dv. \tag{19.66}$$

若短程线集合中，每一条都和一条u线垂直，则根据第二不变性(第2节)，可以在每条短程线上取$\phi = \pi/2$的点而密度dG化简为

$$dG = (\partial\sqrt{g}/\partial u) du \wedge dv. \tag{19.67}$$

对于短程极坐标，u表示由原点O到短程线G的距离，而v为由O出发而垂直于G的短程线和经过O的一个固定方向所作的角。

设Γ为曲面Σ上一条长度为L的曲线。这时公式(19.24)是

$$\int_{G \cap L \neq \varnothing} N dG = 2L, \tag{19.68}$$

而对于一条长度为L_0的短程线段S^*，若用N表示$S^* \cap \Gamma$的交点数，则

$$\int_{\Gamma \cap S^* \neq \varnothing} N dS^* = 4LL_0, \tag{19.69}$$

其中$dS^* = dP\wedge d\theta = dG^*\wedge ds$是$\Sigma$上的运动密度($dP$是线段$S^*$的始点$P$的密度，而$\theta$是$S^*$和在$P$点一个固定方向所作的角(19.26))。

我们给出这些公式的一项应用。设Σ为E_3一个凸曲面，在它上面的一切短程线都是闭曲线。这时，容易证明，一切短程线都有相同长度L，而且每两条短程线相交于$N\geqslant 2$点。若G_1为固定短程线，而把一条作运动的短程线看成长度为L的短程线段，则根据(19.69)，

$$4L^2=\int N dP\wedge d\theta\geqslant 2\int dP\wedge d\theta=4\pi F, \qquad (19.70)$$

其中F是Σ的面积。若$1/R_0^2$是Σ的高斯曲率K的最大值，则$F=\int K^{-1}du_2\geqslant 4\pi R_0^2$，而由(19.70)可知$L\geqslant 2\pi R_0$。这是Zoll[735]得到的不等式。

设在Σ上取一条固定短程线，在和它相交于不多于一点的短程线中，有一条最长的，设其长为λ。于是由(19.69)可知

$$4\lambda L=\int N dP\wedge d\theta\leqslant\int dP\wedge d\theta=2\pi F, \qquad (19.71)$$

而由于$\lambda\leqslant L/2$，就得$4\lambda^2\leqslant\pi F$。若经过P，取角θ所确定的短程线，设沿该短程线第一次遇到的共轭点是P'，我们用$f(P,\theta)$表示P，P'的距离，并且对于$P(\in\Sigma)$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，令$a=\inf f(P,\theta)$，则$a\leqslant\lambda$，而由最后不等式得$4a^2\leqslant\pi F$。对于紧致可定向曲面，这个不等式可推广为$2a^2\chi\leqslant\pi F$(这是Berger的结果，见L.W.Green[236])，其中χ为曲面的Euler-Poincarè示性数。

关于曲面上和Finsler空间几何，参看[39,95,463,555,621,46]；关于其它观点，参看[253,254]。

附录 微分齐式与外微积

1. 微分齐式与外积

这个附录的目的是对微分齐式作不求严密的介绍，而且主要涉及本书所用到的部分。所谓外微分齐式，或简单地微分齐式，曾于上世纪末被Poincarè在他关于天体力学的“新方法”中采用，然后被E.Cartan 在他关于连续群和 Pfaff 式系的工作中采用。在Cartan的积分不变式理论(1922)中，他曾对这种齐式作了系统的论述[87]。后来，主要是通过Chevalley在1946年关于李群的工作[118]，微分齐式被结合到代数领域，那以后，就广泛而成功地用于微分几何和理论物理(参看 Sternberg [628,629] 和 H.Cartan[91]的著作)。不过，既然我们的目的只是辑入本书所用到的一些定义和结果，在这个附录里，我们将采用较经典而直觉的叙述方式，比较强调微分齐式的运用及其几何意义，而不采用严密而精确的表现形式。这种几何引进的途径可以在E.Cartan [90]和Flanders[201,202]的著作中找到。

在R^n里，一次微分齐式或一次式(也称为Pfaff式)是线积分中积分号下的式

$$\omega^{(1)} = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n. \tag{1}$$

这是指：(1)式可以在有向曲线上积分，其结果与曲线的参数表示无关。

系数a_i是变数$x_1, x_2, \cdots, x_n$的实函数，为简单起见，假定它们属于C^∞类，经过坐标变换$x_i \to x'_i$，一次式(1)可以写成

$$\omega^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_h} dx'_h = \sum_{h=1}^{n} a'_h dx'_h, \tag{2}$$

因而从系数a_i到a'_i的变换法则可以用方程

$$a'_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x'_h} a_i \qquad (\ldots)$$

表示，而这就是R^n中协变矢量的变换法则。

一次式的一个例是一个函数f的微分

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i. \qquad (4)$$

但是，并不是所有一次式都可以这样得到。根据微积分中人们熟知的一个定理，微分齐式（1）是一个函数的微分的充要条件是$\partial a_i/\partial x_h = \partial a_h/\partial x_i$。

一次式$\omega^{(1)}$和纯量λ之积的定义是$\lambda\omega^{(1)} = \sum_i \lambda a_i \mathrm{d}x_i$而一次式$\omega^{(1)} = \sum_i a_i \mathrm{d}x_i$与$\phi^{(1)} = \sum_i b_i \mathrm{d}x_i$的和与差的定义是$\omega^{(1)} \pm \phi^{(1)} = \sum_i (a_i \pm b_i) \mathrm{d}x_i$。在这两种运算下，一次式构成$R^n$里可微函数环上的一个模。一次式$\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$是这个模的一个底。任意一组独立的一次式，即任意满足$\det|a_{hi}| \neq 0$的一次式$\omega_h^{(1)} = \sum_i a_{hi} \mathrm{d}x_i (h = 1, 2, \cdots, n)$也构成这个模的一个底。

为了给出二次齐式或二次式的定义，我们先考虑平面R^2的款。在R^2里，二重积分的积分号下的式含有乘积$\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$，按照变数变换公式，经过变换$x_i \to x'_i$，它变成

$$\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} - \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right) \mathrm{d}x'_1 \mathrm{d}x'_2. \qquad (5)$$

这表明，在二重积分号下出现的“乘积”$\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$不是微分$\mathrm{d}x_i = (\partial x_i/\partial x'_1) \mathrm{d}x'_1 + (\partial x_i/\partial x'_2) \mathrm{d}x'_2 (i = 1, 2)$的普通乘积，而是另一种乘积，称为$\mathrm{d}x_1$与$\mathrm{d}x_2$的外积，它用$\wedge$表示（通常读为“楔积”）。外积的基本性质是反称性或交错性，即

$$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = -\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1, \quad \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0. \qquad (6)$$

根据这个反称性，经过坐标变换$x_i \to x'_i$，就有

$$dx_1 \wedge dx_2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_1}dx'_1 + \frac{\partial x_1}{\partial x'_2}dx'_2\right) \wedge \left(\frac{\partial x_2}{\partial x'_1}dx'_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_2}dx'_2\right)$$

$$= \left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_1}\frac{\partial x_2}{\partial x'_2} - \frac{\partial x_1}{\partial x'_2}\frac{\partial x_2}{\partial x'_1}\right)dx'_1 \wedge dx'_2,$$

和经典法则(5)一致。

若x_1, x_2表示正交坐标，则外积$dx_1 \wedge dx_2$表示平面上有向面元。实际上，若取依次具分量(dx_1, dx_2)和$(\delta x_1, \delta x_2)$的无穷小矢量为边，作有向平行四边形，则

$$dx_1 \wedge dx_2 = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ \delta x_1 & \delta x_2 \end{vmatrix} = dx_1\delta x_2 - dx_2\delta x_1. \tag{7}$$

例如取两个位移，依次平行于坐标轴，则有

$$(dx_1 = dx_1, dx_2 = 0), \quad \delta x_1 = 0, \delta x_2 = \delta x_2,$$

而面元即变为通常的形式dx_1dx_2。取第一个位移沿一个极坐标系(ρ, θ)的径矢方向，第二个位移沿垂直方向，就有

$$dx_1 = \cos\theta d\rho, \quad dx_2 = \sin\theta d\rho, \quad \delta x_1 = -\rho\sin\theta d\theta, \quad \delta x_2 = \rho\cos\theta d\theta,$$

而由(7)得$dx_1 \wedge dx_2 = \rho d\rho \wedge d\theta$，这就是极坐标下的面元。

表示式(7)可以作为在任意仿射坐标(不一定正交)下外积的定义；由此容易导出下面的分配律

$$dx_1 \wedge (dx_2 + dx_3) = dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3,$$

以及 (8)

$$dx_1 \wedge (x_3 dx_2) = x_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

作了这些准备后，我们可以给出$\boldsymbol{R}^n$里的二次式，它们是出现在二重积分的积分号下的式，即

$$\omega^{(2)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \tag{9}$$

它可以在定向二维流形上积分，其结果与流形的参数表示无关。

函数a_{ij}都假定是属于C^∞类。若把差$\frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$仍用记号$a_{ij}$表示，则显然总可以假定二次式的系数是反称的，即$a_{ij} =$

$-a_{ji}$。二次式(9)经过坐标变换$x_i \to x'_i$保持不变的条件导致变换公式

$$a'_{ij} = \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial x_h}{\partial x'_i} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} a'_{hk}, \qquad (10)$$

这证明a_{ij}是一个二秩协变张量的分量。

产生二次式的一种方法是取两个一次式

$$\omega^{(1)} = \sum_i a_i \mathrm{d}x_i, \phi^{(1)} = \sum_i b_i \mathrm{d}x_i$$

的外积，其定义是

$$\omega^{(1)} \wedge \phi^{(1)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$$

$$= \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j, \qquad (11)$$

而根据(7)，它可以写成

$$\omega^{(1)} \wedge \phi^{(1)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j (\mathrm{d}x_1 \delta x_j - \delta x_i \mathrm{d}x_j), \qquad (12)$$

或者，若令$\omega^{(1)}(\mathrm{d}) = \sum_i a_i \mathrm{d}x_i$，$\omega^{(1)}(\delta) = \sum a_i \delta x_i$，同时对$\phi^{(1)}$也引用类似记号，则

$$\omega^{(1)} \wedge \phi^{(1)} = \omega^{(1)}(\mathrm{d})\phi^{(1)}(\delta) - \omega^{(1)}(\delta)\phi^{(1)}(\mathrm{d}), \qquad (13)$$

这样，我们就用两个一次式的普通乘积表示了他们的外积。

显然，并不是每一个二次式都是两个一次式之积。如果是的话，那个二次式就称为可分解的。例如，若$n>3$，而$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$是$R^n$里的一次式，则二次式$(\omega_1 \wedge \omega_2) + (\omega_3 \wedge \omega_4)$就是不可分解的。

沿着上面的路子，可以给出r次式（r次微分齐式）的定义：

$$\omega^{(r)} = \sum_{i_1, \cdots, i_r} a_{i_1 \cdots i_r} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_r}, \qquad (14)$$

它出现在R^n里r维流形上的r重积分的积分号下。若$r>n$，唯一的r次式是零式。

由于楔积的反称性，我们总可以假定系数$a_{i_1\cdots i_r}$是反称的。它们是一个r权反称协变张量的分量。

r次式（14）和q次式

$$\omega^{(q)}=\sum b_{j_1\cdots j_q}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_q}$$

的外积是一个$r+q$次式，其定义为

$$\omega^{(r)}\wedge\omega^{(q)}=\sum_{i,j}a_{i_1\cdots i_r}b_{j_1\cdots j_q}dx_{i_1}$$

$$\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_q}. \qquad (15)$$

注意，经过r次的位置颠倒，可以把dx_{j_1}越过$dx_{i_1},\cdots,dx_{i_r}$移到左面，同样，分别经过r次的位置颠倒可以依次把$dx_{j_2},\cdots,dx_{j_q}$越过$dx_{i_1},\cdots,dx_{i_r}$。所以，通过rq次的次序颠倒，可以从$\omega^{(r)}\wedge\omega^{(q)}$得到$\omega^{(q)}\wedge\omega^{(r)}$。因此，外积对于加法是可结合、可分配的，但具有性质

$$\omega^{(r)}\wedge\omega^{(q)}=(-1)^{rq}\omega^{(q)}\wedge\omega^{(r)}. \qquad (16)$$

特殊地，对于几个一次式的外积，若把因子次序颠倒偶数次，它不变，而若把因子次序颠倒奇数次，它变号。

显然，在通常的加法以及和纯量的乘法下，r次式构成R^n上的可微函数环的一个模，而这个模的一个底是r次式$dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$ $(i_1<i_2<\cdots<i_r)$所构成。因此，R^n里的r次式模的维数是$\binom{n}{r}$。若$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_r$为独立的一次式，则$r$次式

$$\omega_{i_1}\wedge\omega_{i_2}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_r}\quad(i_1<i_2<\cdots<i_r)$$

也构成r次式模的一个底。

2. 外积的两项应用

（1）设$\omega_i=\sum_k a_{ik}dx_k\ (i=1,2,\cdots,r)$为$R^n$里的一次式，它们可以看作未定元$dx_i$的线性式，因而由线代数可知它们线性相关

的充要条件是矩阵(a_{ih})的秩是r。另一方面，作为(11)的推广，我们有

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\begin{vmatrix}a_{1i_1}&\cdots&a_{1i_r}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{ri_1}&\cdots&a_{ri_r}\end{vmatrix}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}. \tag{17}$$

于是得：

一次式$\omega_1,\cdots,\omega_r$线性无关的充要条件是

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_r\neq 0.$$

注意当$r=n$时，我们有

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n=\det|a_{ih}|dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n. \tag{18}$$

(2) 设$\omega_1,\cdots,\omega_r$为$\boldsymbol{R}^n$里线性无关的一次式并假设另有一次式$\phi_1,\cdots,\phi_r$，使

$$\omega_1\wedge\phi_1+\omega_2\wedge\phi_2+\cdots+\omega_r\wedge\phi_r=0. \tag{19}$$

则

$$\phi_i=\sum_{h=1}^{r}A_{ih}\omega_h,\quad A_{ih}=A_{hi}(i=1,2,\cdots,r). \tag{20}$$

这是一个有用的性质，称为E.Cartan引理。为了证明它，选取$\omega_{r+1},\cdots,\omega_n$使$\omega_1,\cdots,\omega_r,\omega_{r+1},\cdots,\omega_n$构成$\boldsymbol{R}^n$里一次式的底。于是可令

$$\phi_i=\sum_{h=1}^{r}A_{ih}\omega_h+\sum_{h=r+1}^{n}B_{ih}\omega_h,$$

而代入(19)，就得

$$\sum_{1\leq i<j\leq r}(A_{ij}-A_{ji})\omega_i\wedge\omega_j+\sum_{i=1}^{r}\sum_{h=r+1}^{n}B_{ih}\omega_i\wedge\omega_h=0.$$

由于外积$\omega_i\wedge\omega_j$构成$\boldsymbol{R}^n$里二次式的底，就得$A_{ij}=A_{ji}$，$B_{ih}=0$，而这就证明了(20)。

3. 外微导

一个 r 次式

$$\omega^{(r)}=\sum_{i_1,\cdots,i_r}a_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_r} \tag{21}$$

的外微分或外导式的定义是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^{(r)}&=\sum_{i_1,\cdots,i_r}\mathrm{d}a_{i_1\cdots i_r}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_r}\\&=\sum_{h,i_1,\cdots,i_r}\frac{\partial a_{i_1\cdots i_r}}{\partial x_h}\mathrm{d}x_h\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_r},\end{aligned} \tag{22}$$

其中我们要对于下标的一切排列取和。

例如若 $\omega=\sum_i a_i\mathrm{d}x_i$，就有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}a_i\wedge\mathrm{d}x_i=\sum_{i,h=1}^n\frac{\partial a_i}{\partial x_h}\mathrm{d}x_h\wedge\mathrm{d}x_i\\&=\sum_{i<h}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_h}-\frac{\partial a_h}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_h\wedge\mathrm{d}x_i.\end{aligned} \tag{23}$$

由于 $a_{i_1\cdots i_r}$ 可以看作一个反称 r 权协变张量的分量，$\mathrm{d}\omega^{(r)}$ 的系数也是一个反称 $r+1$ 权协变张量(所谓 $a_{i_1\cdots i_r}$ 的旋量)的分量，因而定义(22)与坐标系无关。为了使定义完整，我们约定：一个函数 f(作为零次微分齐式)的外微分就是它的普通微分。

外微分有以下性质：

(a) 若 $\omega^{(r)}$ 和 $\omega^{(s)}$ 依次为 r 次式和 s 次式，则

$$\mathrm{d}(\omega^{(r)}\wedge\omega^{(s)})=\mathrm{d}\omega^{(r)}\wedge\omega^{(s)}+(-1)^r\omega^{(r)}\wedge\mathrm{d}\omega^{(s)}. \tag{24}$$

这从定义(22)容易证明。

(b) 对于任意 ω，

$$\mathrm{d}(d\omega)=0. \tag{25}$$

证明 设$\omega=\omega^{(r)}$，我们有

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=\sum_{h,k,i_1,\cdots,i_r}\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_r}}{\partial x_h\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge \mathrm{d}x_h\wedge \mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_r}$$

$$=\sum_{h<k,i_1,\cdots,i_r}\left(\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_r}}{\partial x_h\partial x_k}-\frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_r}}{\partial x_h\partial x_k}\right)$$

$$\times \mathrm{d}x_k\wedge \mathrm{d}x_h\wedge \mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_r}=0.$$

即(25)。

可以证明：外导算子 d 被线性条件$\mathrm{d}(\omega+\phi)=\mathrm{d}\omega+\mathrm{d}\phi$以及性质(24)，(25)，以及(i)唯一地确定。这再次证明外微分与坐标系无关(例如参看[628])。

已给微分齐式ω，若$\mathrm{d}\omega=0$，它称为闭式；若$\omega=\mathrm{d}\phi$，其中 ϕ 是某个齐式，它称为恰[当]式。

由(25)可知，每一个恰式是闭式。逆理只在局部是正确的。例如齐式$\omega=(x_1^2+x_2^2)^{-1}(x_1\mathrm{d}x_2-x_2\mathrm{d}x_1)$在$R^{(2)}-\{O\}$里满足$\mathrm{d}\omega=0$，但只是在局部$\omega=\mathrm{d}\phi$。一般地，有以下结论，称为Poincare引理：

设 ω 为在 R^n 里一个星状开集上确定的 r 次式($1\leqslant r\leqslant n$)而且 $\mathrm{d}\omega=0$。则有$r-1$次式ϕ，使$\omega=\mathrm{d}\phi$。

证明见Sternberg[628]或H.Cartan[91]。

星状集的定义如下：已给点集U，若有一点$x\in U$，使得对于每一点$y\in U$，连接x和y的线段都含在U内，则 U 称为星状集。U 为星状开集只是每一个U上的闭式为恰式的充分条件。Whitney[723]给出了一个充要条件。

4. Stokes 公式

设 ω 为 R^n 里一个定向 r 维流形上具有紧致支集的 $r-1$ 次式，而 ∂V_r表示 V_r的边界；在这里，∂V_r是看作一个定向 $r-1$维流形，V_r的正向导出 ∂V_r的正向。这时，

$$\int_{\partial V_r}\omega=\int_{V_r}\mathrm{d}\omega. \tag{26}$$

这是所谓的 Stokes 公式，证明见[628,201,723]。注意：$r=1$ 时，这就是微积分的基本公式。

特款 (1°) $r=2, n=2$的款。这时 V_2是 $\boldsymbol{R}^2$ 里一条光滑简单闭曲线 ∂V_2所包围的闭域。设 $\omega=a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_2$，则公式(26)化为

$$\int_{\partial V_2}a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_2=\int_{V_2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2, \tag{27}$$

而这就是经典的 Green 定理。

(2°) $r=2, n=3$ 的款. 这时 V_2是 $\boldsymbol{R}^3$里一个光滑定向曲面，它的边界 ∂V_2是一条光滑简单闭线，其正向为 V_2的正向所导出。设 $\omega=a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_2+a_3\mathrm{d}x_3$，则

$$\begin{aligned}\int_{\partial V_2}&a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_2+a_3\mathrm{d}x_3\\&=\int_{V_2}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\\&\quad+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2,\end{aligned}$$

这通常叫做 Ostrogradsky 定理或旋量定理。

(3°) $r=3, n=3$ 的款。设V_3为$\boldsymbol{R}^3$里被一个光滑曲面 ∂V_3所包围的闭域。设 $\omega=a_1\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+a_2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+a_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$，则

$$\begin{aligned}\int_{\partial V_3}&a_1\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+a_2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+a_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\&=\int_{V_3}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3,\end{aligned}$$

这是所谓 Gauss 定理。

(4°) 分部积分. 若 V_r为没有边界($\partial V_r=\varnothing$)的一个紧致流形而 $\omega=\omega^{(p)}\wedge\omega^{(q)}$ $(p+q=r-1)$，则根据式(24)和(26)，我们有

$$\int_{V_r} d\omega^{(p)} \wedge \omega^{(q)} = (-1)^{p+1} \int_{V_r} \omega^{(p)} \wedge d\omega^{(q)},$$

这是分部积分的一种推广。

5. 与三维欧氏空间矢量分析的比较

设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 为三维欧氏空间里的标准正交标架，$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$。每一个一次式 $\omega^{(1)} = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$ 确定一个矢场 $\boldsymbol{A} = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3$，而每一个二次式

$$\omega^{(2)} = a_{12} dx_1 \wedge dx_2 + a_{23} dx_2 \wedge dx_3 + a_{31} dx_3 \wedge dx_1$$

连同 $a_{ij} = -a_{ji}$ 确定一个反称二权协变张量场 a_{ij}，或者一个轴矢场，或相对矢场 $\mathfrak{Q} = a_{23} \boldsymbol{e}_1 + a_{31} \boldsymbol{e}_2 + a_{12} \boldsymbol{e}_3$。所谓轴矢或相对矢是一种几何对象，它们像矢量那样地变换，只是当原标架定向改变时，它们的正向颠倒。例如两个矢量的矢积 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 是一个轴矢。同样，一个三次式 $\omega^{(3)} = a dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ 确定一个相对不变量 $\mathfrak{a} = a$。

取微分齐式

$$\omega^{(1)} = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3, \quad \phi^{(1)} = b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3,$$
$$\omega^{(2)} = c_1 dx_2 \wedge dx_3 + c_2 dx_3 \wedge dx_1 + c_3 dx_1 \wedge dx_3,$$
$$\omega^{(3)} = a dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

而用 ψ 表示变每一个微分齐式为其对应的矢量的算子，这就是说，

$$\psi(\omega^{(1)}) = \boldsymbol{A}, \quad \psi(\omega^{(2)}) = \mathfrak{C}, \quad \psi(\omega^{(3)}) = \mathfrak{a},$$
$$\psi(\omega^{(1)} \wedge \omega^{(2)}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}, \quad \psi(\omega^{(1)} \wedge \omega^{(2)}) = \boldsymbol{A} \cdot \mathfrak{a}.$$

按照定义

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \boldsymbol{e}_3,$$

$$\mathrm{curl} \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) \boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) \boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) \boldsymbol{e}_3,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3},$$

我们有

$$\psi(\mathrm{d}f)=\operatorname{grad}f,\qquad \psi(\mathrm{d}\omega^{(1)})=\operatorname{curl}\boldsymbol{A},\qquad \psi(\mathrm{d}\omega^{(2)})=\operatorname{div}\mathfrak{C}.$$

利用这些关系，可得在外微积恒等式和矢量分析恒等式之间的关系：

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=0\rightarrow\operatorname{curl}\ \operatorname{grad}f=0,$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega^{(1)})=0\rightarrow\operatorname{div}\ \operatorname{curl}\boldsymbol{A}=0,$$

$$\mathrm{d}(fg)=\mathrm{d}f\cdot g+f\mathrm{d}g\rightarrow\operatorname{grad}(fg)=g\operatorname{grad}f+f\operatorname{grad}g,$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega^{(1)})=\mathrm{d}f\wedge\omega^{(1)}+f\mathrm{d}\omega^{(1)}$$
$$\rightarrow\operatorname{curl}(f\boldsymbol{A})=\operatorname{grad}(f)\times\boldsymbol{A}+f\operatorname{curl}\boldsymbol{A},$$

$$\mathrm{d}(f\omega^{(2)})=\mathrm{d}f\wedge\omega^{(2)}+f\mathrm{d}\omega^{(2)}$$
$$\rightarrow\operatorname{div}(f\mathfrak{C})=\operatorname{grad}f\cdot\mathfrak{C}+f\operatorname{div}\mathfrak{C},$$

$$\mathrm{d}(\omega^{(1)}\wedge\phi^{(1)})=\mathrm{d}\omega^{(1)}\wedge\phi^{(1)}-\omega^{(1)}\wedge\mathrm{d}\phi^{(1)}$$
$$\rightarrow\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\operatorname{curl}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{B}.$$

Poincaré 引理可译成矢量分析的下面两定理：

(a) 令 $\omega=\omega^{(1)}$，我们有：$\operatorname{curl}\boldsymbol{A}=0$ 是满足 $A=\operatorname{grad}f$ 的一个函数 f 存在的充要条件(假定 $\operatorname{curl}A=0$ 的区域是星状的)。

(b) 令 $\omega=\omega^{(2)}$，我们有：若 $\mathfrak{A}$ 是一个轴矢场，则 $\operatorname{div}\mathfrak{A}=0$ 是满足 $\mathfrak{A}=\operatorname{curl}B$ 的一个矢场 $\boldsymbol{B}$ 存在的充要条件(假定 $\operatorname{div}\mathfrak{A}=0$ 的区域是星状的)。

这样，我们看到外微积可以用来表现并统一三维欧氏空间里经典矢量分析中的基本运算。

6. 流形上的微分齐式

我们已经看到，在坐标变换 $x\rightarrow x'$ 下，微分齐式是怎样变化的。我们只须对每一个系数 $a_{i_1\cdots i_r}(x)$ 用复合函数 $a_{i_1\cdots i_r}(x(x'))$ 代替，同时对每一个$\mathrm{d}x_i$用微分 $\mathrm{d}x_i=\sum\limits_h(\partial x_i/\partial x'_h)\mathrm{d}x_h$ 代替，然

后取这些一次式的外积。由于在映射下的这个简单的变换法则，微分齐式在用局部坐标确定的空间上可以使用，例如可以在微分流形上使用。

在这样一个微分流形M上，存在着局部图(U_i, h_i)，其中开集U_i覆盖整个流形，而h_i则是从U_i到$\boldsymbol{R}^n$的开集上的一对一映射。这样，U_i上的微分齐式就是$\boldsymbol{R}^n$中对应的开集上的微分齐式的自然的原象。此外，若一个齐式ω在U_i和U_j上的表示式在$U_i \cap U_j$里的关系总满足坐标变换$h_i \circ h_j^{-1}$的要求，我们就可以把ω看作在整个流形上存在。

关于流形上微分齐式的积分，若积分域含在某个U_i内，则该积分就是通常意义下的积分。在其它情况下，需要用到所谓的"单位分解"(参看 Sternberg[628] 和 Fleming[204])。利用这个工具，整个外微积，包括 Stokes 公式，都可以从$\boldsymbol{R}^n$移植到任意微分流形M而不加改变。

在结束附录时，我们叙述一个微分齐式的秩的定义以及关于求一次齐式的法式问题的定理而不加证明。

在一个n维流形上，已给一个r次式ω，若存在着p个(而且不少于p个，$r \leqslant p \leqslant n$)一次式$\phi_n$，使

$$\omega = \sum \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_r} \quad (1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant p),$$

则ω称为是p秩的。若$r = p$，则$\omega = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_r$，而$\omega$称为可分解的。

我们叙述下面的结果：

(1) 一个二次式$\omega^{(2)}$的秩是偶数$p = 2s$，其中s是使

$$\omega^{(2)} \wedge \omega^{(2)} \wedge \cdots \wedge \omega^{(2)} \neq 0 (s \text{个因子})$$

的最大整数。

(2) 若$\omega^{(2)}$是一个n维流形M上一个闭二次式，它的秩是$p = 2s$，则在M的每一点邻近，可以引进坐标$x_1, x_2, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_s$，使得$\omega^{(2)}$用这些坐标表示时，

$$\omega^{(2)} = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}y_1 + \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}y_2 + \cdots + \mathrm{d}x_s \wedge \mathrm{d}y_s.$$

(3) 设 ω 为在M上一次式而 $d\omega$ 的秩是 p。若 $\omega\neq 0$ 而 $\omega\wedge d\omega\wedge\cdots\wedge d\omega=0$(含有 s 个因子 $d\omega$)，则在M的每一点邻近可以求得坐标 $x_1,x_2,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_s$，使 $\omega=x_1dy_1+\cdots+x_sdy_s$。若到处 $\omega\wedge d\omega\wedge\cdots\wedge d\omega\neq 0$($s$ 个因子 $d\omega$)，则在M的每一点邻近，可以引进坐标$x_1,\cdots,x_s,x_{s+1},y_1,\cdots,y_s$，使 $\omega=x_1dy_1+\cdots+x_sdy_s+dx_{s+1}$。这个性质称为 Darboux 定理[628]。

参 考 文 献

下面是与本书内容有密切关系的专著和论文目录，下列文献中，还列有详尽的有关作品：

[51,63,152,271,274,335,367,392,428, 429,647].

1. L.Ahlfors, "The theory of meromorphic curves", *Acta Soc Sci. Fenn.* A3(1941),1—31.
2. G.Ailam,"Moments of coverage and coverage spaces," *J.Appl.Probability* 3(1966), 550—555.
3. H.A.Alikoski,"Über das Sylvestersche Vierpunktproblem."*Ann.Acad.Sci.Fenn.*51(1939),no.7,1—10.
4. C.B.Allendoerfer,"Steiner's formulae on a general S^n," *Bull.Amer.Math.Soc.*54(1948), 128—135.
5. C.B.Allendoerfer and A.Weil, "The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra,"*Trans. Amer. Math.Soc.*53(1943), 101—129.
6. R.V.Ambarcumjan,"Intersections of complex curves and random straight lines,"*Soviet Math. Dokl.* 10 (1969),865—868. (Translated from *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 187(1969),no.3, 487—489.)
7. R.V.Ambarcumjan, "Invariant imbedding in the theory of random lines,"*Izv.Akad.Nauk Armjan. SSR* 5 (1970), 167—206.
8. R.V.Ambarcumjan, "On random plane mosaics,"

*Soviet Math.Dokl.*12 (Pt.2)(1971), 1349—1353.

9. R.V. Ambarcumjan, "Convex polygons and random tessellations," in *Stochastic Geometry* (E.F.Harding and D.G. Kendall.eds.), pp.176—191. Wiley, New York. 1974.

10. R.V.Ambarcumjan, "Probability distributions in the geometry of clusters."*Studia Sci.Math. Hungar.* 6 (1971), 235—241.

11. R.V.Ambarcumjan,"On the solution of the Buffon-Sylvester problem in R^3."*Dokl. Akad.Nauk SSSR* 210 (1973), 1257—1260.

12. P.Armitage,"An overlap problem arising in particle counting."*Biometrika* 36 (1949), 257—266.

13. V.I.Arnold and A.Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*.Gauthier-Villars,Paris,1967.

14. L.Auslander, *Differential Geometry*.Harper & Row, New York. 1966.

15. F.Azorin, "Reconstruccion de patrones por muestreo sistemático espacial," *Estadist. Espanola* 57 (1971), 5—43.

16. F. Azorin, "Comparacion de supuestos y disenos en la estimacion de patrones por muestreo sistematico pluridimensional." *Trabajos Estadist.* 21 (1970), 3—23.

17. M.Balanzat,"Généralisation de quelques formules de géométrie intégrale."*C. R. Acad. Sci. Paris* 210 (1940), 596—598.

18. M.Balanzat,"Sur quelques formules de la géométrie intégrale des ensembles dans un espace à n dime-

nsions, *Portugal. Math.* 3 (1940), 87—94.

19. R. P. Bambah, "Polar reciprocal convex bodies," *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 51 (1954), 377—378.

20. T. F. Banchoffand W. F. Pohl, "On a generalization of the isoperimetric inequality." *J. Diff. Geometry* 6 (1971), 175—192.

21. E. Barbier, "Note sur le problème de laiguille et le jeu du joint couvert." *J. Math. Pures Appl.* (2) 5 (1860), 273—286.

22. A. E. Bates and M. E. Pillow, "Mean free path of sound in auditorium." *Proc. Phys. Soc.* 59 (1957), 535—541.

23. M. Baticle, "Le problème des répartitions," *C. R. Acad. Sci. Paris* 201 (1935), 862—864.

24. G. Baxter, "A combinatorial lemma for convex numbers," *Ann. Math. Statist.* 32 (1961), 901—904.

25. E. A. Bender, "Area-perimeter relations for two-dimensional lattices," *Amer. Math. Monthly* 69 (1962), 742—744.

26. D. C. Benson, "Sharpened form of the plane isoperimetric inequality." *Amer. Math. Monthly* 77 (1970), 29—31.

27. R. V. Benson, *Euclidean Geometry and Convexity*. McGraw-Hill, New York. 1966.

28. J. D. Bernal, "A geometrical approach to the structure of liquids," *Nature* 183 (1959), 141—147; 185 (1960), 68—70.

29. J. D. Bernal, J. Masson, and K. F. Knight, "Radial distribution of the random close packing of spheres,"

Nature 189 (1962), 956—958

30. L. Berwald and O. Varga, [1] Über die Schiebung im Raum, *Math. Z.* 42 (1937), 710—736.

30a. L. Bieberbach, "Über eine Extremaleigenschaft des Kreises," *Jber. Deutsch. Math. Verein* 24 (1915), 247—250.

31. G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1927.

32. R.L. Bishop and S.I. Goldberg, *Tensor Analysis on Manifolds*. Macmillan, New York, 1968.

32a. B. E. Blaisdell and H. Solomon, "On random sequential packing in the plane and a conjecture of Palasti." *J. Appl. Probability* 7 (1970), 667—698.

33. W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Vol 2 (*Affine Differentialgeometrie*). Springer, Berlin, 1923.

34. W. Blaschke, "Einige Bemerkungen über Kurven und Flächen konstanter Breite." *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. Natur. Kl.* 67 (1915), 290—297.

35. W. Blaschke, "Eine isoperimetrische Eigenschaft des Kreises," *Math. Z.* 1 (1918), 52—57.

36. W. Blaschke, "Integralgeometrie I, Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n," *Actualités Sci. Indust.* 252 (1935).

37. W. Blaschke, "Integralgeometrie 2: Zu Ergebnissen von M.W. Crofton," *Bull. Math. Soc. Roumaine Sci.* 37 (1935), 3—11.

38. W. Blaschke, "Integralgeometrie 10: Eine isoperim-

etrische Eigenschaft der Kugel." *Bull. Math. Soc. Roumaine Sci.* 37 (2) (1936), 3—7.

39. W. Blaschke, "Integralgeometrie 11: Zur Variationsrechnung," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 11 (1936), 359—366.
40. W. Blaschke, "Integralgeometrie 12: Vollkommene optische Instrumente," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 11 (1936), 409—412.
41. W. Blaschke, "Integralgeometrie 13: Zur Kinematik," *Math. Z.* 41 (1936), 465—478.
42. W. Blaschke, "Integralgeometrie 17: Über Kinematik," *Deltion* (Athens) 1936. 3—14.
43. W. Blaschke, "Integralgeometrie 20: Zur elliptischen Geometrie," *Math. Z.* 41 (1936), 785—786.
44. W. Blaschke, "Integralgeometrie 21: Über Schiebungen," *Math. Z.* 42 (1937), 1—12.
45. W. Blaschke, "Integralgeometrie 22: Geschlossene Kurven und Flächen in der elliptischen Geometrie," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 12 (1937), 111—113.
46. W. Blaschke, "Sulla proprieta isoperimetrica del cerchio," *Rend. Sem. Mat. Univ. Roma IV* 1 (1937), 233—234.
47. W. Blaschke, "Densita negli spazi di Hermite," *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Ser. VI* 29 (1939), 105—108.
48. W. Blaschke, "Über Integrale in der Kinematik," *Arch. Math.* (*Basel*) 1 (1948), 18—22.
49. W. Blaschke, "Zur Integralgeometrie," *Rend. Circ. Mat. Palermo II* 1 (1952), 103—110.

50. W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, 2nd ed. W. de Gruyter, Berlin, 1956.

51. W. Blaschke, *Vorlesungen uber Integralgeometrie*, 3rd ed. Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1955.

52. W. Blaschke and O. Varga, "Integralgeometrie 9: Über Mittelwerte an Eikörpern," *Mathematica (Cluj)* 12 (1936), 65—80.

53. H.F. Blichfeldt, "A new principle in the geometry of numbers with some applications," *Trans. Amer. Math. Soc.* 15 (1914), 227—235.

54. J. Bodziony, "On the probability of application of integral geometry methods in certain problems of liberation of mineral grains," *Bull. Acad. Polon. Sci.* Sér. Sc. Techniques, 13 (1965), 459—467.

55. J. Bodziony, "On certain indices characterizing the geometric structure of rocks," *Bull. Acad. Polon. Sci.* Sér. Sc. Techniques 13 (1965), 469—475.

56. J. Bodziony, "On the liberation of mineral grains," *Bull. Acad. Polon. Sci.* Sér. Sc. Techniques, 13(1965), 513—518.

57. J. Bohm, "Untersuchung des Simplex-Inhaltes im Raum konstanter Krümmung beliebiger Dimensionen," *J. Reine Angew. Math. (Crelle)* 202(1959), 16—51.

58. J. Bohm, "Über Inhaltsmessung im Raum konstanter Krümmung," *Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena Thüringen* 10 (1960—1961), 29—32.

59. J. Bohm, "Inhaltsmessung im R_5 konstanter Krümmung," *Arch. Math. (Basel)* 11 (1960), 298—309.

60. J. Bokowski, H. Hadwiger, and J.M. Wills, "Eine

Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktzahl konvexer Körper im n-dimensionalen euklidischen Raum," *Math. Z.* 127(1972), 363—364.

61. G. Bol, "Zur kinematischen Ordnung ebener Jordan-Kurven," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 11 (1936), 394—408.

62. T. Bonnesen, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*. Gauthier-Villars, Paris, 1920.

63. T. Bonnesen and W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*. Ergeb. Math., Springer, Berlin, 1934.

64. E. Borel, *Principes et formules classiques du calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, 1925.

65. V. A. Borovikov, "Fundamental solutions of partial differential equationt with constant coefficients," *Trans. Moscow Math. Soc.* 8 (1959), 199—257.

66. O. Bottema, "Eine obere Grenze für das isoperimetrische Defizit ebener Kurven," *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* A36 (1933), 442—446.

67. J. L. Boursin, "Sur quelques problèmes de géométrie aléatoire," *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* (4), 28 (1965), 9—99.

68. N. Bourbaki, *General Topology*, Pt. I. Addison-Wesley, Reading. Mass., 1966.

69. N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques*, Livre VI (*Integration*), Chap. 7. Hermann. Paris. 1963.

70. L. G. Briarty, "Stereology methods for quantitative light and electron microscopy," *Sci. Progr.* 62(1975), 1—32.

71. J. Bronowski and J. Neyman, "The variance of the

measure of a two-dimensional random set," *Ann. Math. Statist.* 16 (1945), 330—341.

72. B. Brosowski, "Über die konvexe Hülle von zufälligen Pfaden," *Z. Angew. Math. Mech.* 43 (1963), Supplement, T. 40, T. 41.

73. J. E. Brothers, "Integral geometry in homogeneous spaces," *Trans. Amer. Math. Soc.* 124 (1966), 480—517.

74. H. Busemann, *Convex Surfaces*. Wiley (Interscience), New York, 1958.

75. H. Busemann, "Volume in terms of concurrent cross-sections," *Pacific J. Math.* 3 (1953), 1—12.

76. H. Busemann and P. J. Kelly, *Projective Geometry and Projective Metrics*. Academic Press, New York, 1953.

76a. J. W. Cahn, "The generation and characterization of shape," *Advances in Appl. Probability*, Spec. Suppl. (*Proc. Symp. Statist. Probabilistic Problems in Metallurgy, Seattle*, 1971) (1972), 221—242.

77. G. Calugareanu, "L'intégrale de Gauss et l'analyse des noeuds tridimensionnels," *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 4 (1959), 5—20.

78. G. Calugareanu, "Sur les classes d'isotopie des noeuds tridimensionnels et leurs invariants," *Czechoslovak Math. J.* 11 (1961), 588—624.

79. G. Calugareann, "Sur les enlacements tridimensionnels des courbes," *Comm. Acad. R. P. Roumaine* 11 (1961), 829—832

80. I. P. Caregradskii, "A certain problem of search by

networks," *Toer.Verojatnost.i Primenen.* 15(1970), 326—330.(English transl. *Theor.Probability Appl.* 15 (1970), 315—319.)

81. T. Carleman, "Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen," *Math.Z.* 3 (1916), 1—7.

82. J.A. Carlson, "A remark on the transcendental Bezout problem," in *Value Distribution Theory* (R. O. Kujala and A.L. Willer III, *eds.*), Pt. A, pp. 133—143. Dekker, New York, 1974.

83. J.A.Carlson and P.A.Griffiths, "The order function for entire holomorphic mappings," in *Value Distribution Theory* (R.O. Kujala and A.L.Willer III, *eds.*), Pt. A, pp. 225—248. Dekker, New York, 1974.

84. H. Carnal, "Die konvexe Hülle von *n* rotationssymmetrisch verteilten Punkten," *Z.Wahrscheinlichkeits.* 15 (1970), 168—176.

85. E.Cartan, "Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace reglé,"*Bull.Soc.Math.France* 24 (1896),140—177. (*Oeuvres Complètes*, Pt.II, Vol.1, pp.265—302.) Gauthier-Villars, Paris, 1952.

86. E.Cartan, "Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces," *Ann.Soc.Polon.Math*.8 (1929), 181—225. (*Oeuvres Complètes*, Pt.II, Vol.1, pp. 265—302.) Gauthier-Villars, Paris, 1952.

87. E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*.

Hermann, Paris, 1922.

88. E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traités par la méthode du repère mobile*. Gauthier-Villars, Paris, 1937.

89. E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie Projective Complexe*. Gauthier-Villars, Paris. 1931.

90. E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, *Actualités Sci. Indust*. 994 (1945).

91. H. Cartan, *Formes différentielles*. Hermann. Paris, 1967.

92. J. W. S. Cassels, *An Introduction to the Geometry of Numbers*. Springer. Berlin. 1959.

93. A. Cauchy, "Mèmoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes," *Mem. Acad. Sci. Paris* 22(1850). 3—15.

94. C. B. S. Cavallin, "Question 6571," *Educational Times* 34(1881). 23.

95. G. D. Chakerian, "Integral geometry in the Minkowski plane," *Duke Math. J*. 29(1962), 375—381.

96. G. D. Chakerian, "An inequality for closed space curves," *Pacific J. Math*. 12(1962), 53—57.

97. G. D. Chakerian, "On some geometric inequalities," *Proc. Amer. Math. Soc*. 15(1964), 886—888.

98. G. D. Chakerian, "Isoperimetric inequalities for the mean width of a convex body," *Geometria Dedicata* 1(1973), 356—362.

99. G. D. Chakerian, "Higher-dimensional analogues of an isoperimetric inequality of Benson," *Math*.

Nachr 48(1971),33—41.

100. G.D.Chakerian and M.S.Klamkin, "Minimal covers for closed curves," *Math.Mag*.46(1973), 55—61.

101. G.D.Chakerian and S.K.Stein, "Bisected chords of a convex body," *Arch.Math.(Basel)*17(1966), 561—565.

102. N.G.Chebotarev, "The determination of volume in Lie groups," *Zap.Mat.Otdel.Fiz.-Mat.Fak.Khar-kov Mat.Obsc*.14(1937), 3—20.

103. C.-S.Chen, "On the kinematic formula of square of mean curvature," *Indiana Univ. Math. J*. 22 (1972—1973), 1163—1169.

104. S.S.Chern,"Sur les invariants intégraux en géométrie," *Sci.Repts.Natl.Tsing-Hua Univ*.A4(1940),85—95

105. S.S.Chern,"On integral geometry in Klein spaces," *Ann.of Math*.(2)43(1942), 178—189.

106. S.S.Chern,"A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet theorem for closed riemannian manifolds," *Ann.of Math*.(2)45(1944), 747—752.

107. S.S.Chern, "On the curvature integral of a riemannian manifold," *Ann.of Math*. (2)46(1945), 674—684.

108. S.S.Chern, "On the kinematic formula in the euclidean space of *n* dimensions," *Amer. J. Math*.74 (1952),227—236.

109. S.S.Chern, "Differential geometry and integral geometry," *Proc.Internat.Congr.Math.,Edinburgh*, 1958 pp.441—449.Cambridge Univ Press,New York, 1960.

110. S.S.Chern, "Geometry of submanifolds in a complex projective space," *Symp.Internat.Top.Alg.,México*, 1958 pp.87—96.

111. S.S.Chern, "Holomorphic mappings of complex manifolds," *Enseignement Math.* 7(1961), 179—187.

112. S.S.Chern, "On the kinematic formula in integral geometry," *J.Math.and Mech.* 16(1966).101—118.

113. S.S.Chern, "Curves and surfaces in euclidean space," in *Studies in Global Geometry and Analysis*, pp. 17—56. The Mathematical Association of America, 1967.

114. S.S.Chern, "The integrated form of the first main theorem for complex analytic mappings in several complex variables," *Ann.of Math.*(2)71 (1960), 536—551.

115. S.S.Chern, "Holomorphic curves in the plane," in *Differential Geometry in Honour of K. Yano*, pp.13—94. Kinokuniya, Tokyo. 1972.

116. S.S.Chern and R.K.Lashof, "On the total curvature of immersed manifolds, I," *Amer.J. Math.* 79 (1957), 306—318; II. *Michigan Math.J.* 5(1958), 5—12.

117. S.S.Chern and C.T.Yien, "Sulla formula principale cinematica dello spazio ad *n* dimensioni," *Boll. Un Mat.Ital.*(2)2(1940).434—437.

118. C.Chevalley, *Theory of Lie Groups*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1946.

119. R.Coleman, "Random paths through convex bodies," *J.Appl.Probability* 6(1969), 430—441.

120. R.Coleman, "Sampling procedures for the lengths of random straight lines," *Biometrika* 59(1972), 415—426.

121. R.Coleman, "The distance from a given point to the nearest end of one member of a random process of linear segments," in *Stochastic Geometry* (E.F. Harding and D.G. Kendall, eds.), pp. 192—201. Wiley, New York, 1974.

122. P.J. Cooke, Sequential Coverage in Geometrical Probability, Ph.D. dissertation, Dept. of Statist., Stanford Univ., 1971.

123. P.J.Cooke, "Bounds for coverage probabilities with applications to sequential coverage problems," *J. Appl.Probability* 11(1974), 281—293

124. H.Corte, "On the distribution of mean density in paper, I,II,"*Papier* 23(1969),381—393; 24(1970), 261—271.

125. R.Courant and D.Hilbert,*Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1. Wiley (Interscience), New York, 1953.

126. T.Cover and B. Efron,"Geometrical probability and random points in a hypersphere," *Ann. Math. Statist*.38 (1967),213—220.

127. H.S.M.Coxeter, *Introduction to Geometry*. Wiley, New York, 1961.

128. H.S.M.Coxeter,*Non-Euclidean Geometry*, 3rd ed. Univ. Toronto Press, Toronto, 1957.

129. H.S.M Coxeter,"Regular compound tessellations of the hyperbolic plane,"*Proc.Roy.Acad*.A278(1964),

147—167.

130. I. K. Crain, "Monte Carlo simulation of random Voronoi polygons; preliminary results," *Search* 3 (1972), 220—221.

131. A. Creanga-Samboan, "Random sets, random coverings," *Stud. Cerc. Mat.* 23(1971), 845—851.

132. M. W. Crofton, "On the theory of local probability," *Phil. Trans. Roy. Soc. London* 158(1868), 181—199.

133. M. W. Crofton, "Probability," in *Encyclopaedia Britannica*, 9th ed., Vol. 19(1885), pp. 768—788.

134. E. Czuber. *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*. Teubner, Leipzig, 1884. (French transl. Hermann, Paris, 1902.)

135. T. Dalenius, J. Hajek, and S. Zubrizcki, "On plane sampling and related geometrical problems," *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probability*, 1961 Vol. 1, pp. 125—150.

136. D. J. Daley, "Various concepts of orderliness for point processes," in *Stochastic Geometry* (E. F. Harding and D. G. Kendall, eds.), pp. 148—161. Wiley, New York, 1974.

137. H. E. Daniels, "The covering circle of a sample from a circular distribution," *Biometrika* 39 (1952), 137—143.

138. L. Danzer, B. Grünbaum, and V. Klee, "Helly's theorem and its relatives," in *Comexity (Proc. Symp. Pure Math.*, 7, *Seattle*, 1961), pp. 101—180. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1963.

139. D. A. Darling, "On a problem of Rényi," *Period.*

Math. Hungar. 3 (1973), 5—7.

140. R. Davidson, "Construction of line processes: second-order properties," in *Stochastic Geometry* (E.F. Harding and D.G. Kenda,l,eds.), pp.55—75. Wiley New York, 1974. (This book contains all of Davidson's published and a great part of his unpublished work on stochastic line processes.)

141. N. G. De Bruin, "Asymptotic distribution of lattice points in a rectangle," *SIAM Rev.* 7(1965), 274—275.

141a. R. T. De Hoff, "The determination of the size distribution of ellipsoidal particles from measurements made in random plane sections," *Trans. Met. Soc. AIME* 224(1962), 474.

141b. R. T. De Hoff, "The estimation of particle size distribution from simple counting measurements made on random plane sections," *Trans. Met. soc. AIME* 233(1965), 25—29.

141c. R. T. De Hoff, "The quantitative estimation of mean surface curvature," *Trans. Met. Soc. AIME* 239 (1967), 617—621.

141d. R. T. De Hoff, "The evolution of particulate structures," Spec. Suppl (*Proc. Symp. Statist. Probabilistic Problems in Metallurgy, Seattle*, 1971), *Advances in Appl. Probability*(1972), 188—198.

141e. R. T. De Hoff and P. Bousquet, "Estimation of the size distribution of triaxial ellipsoidal particles from the distribution of linear intercepts," *J. Microscopy* 92(1970), 119—135.

142. R. T. De Hoff and F. N. Rhines, "Determination of number of particles per unit volume," *Trans. Met. Soc. AIME* 221(1961), 975—982.

143. R. Deltheil, "Sur la théorie des probabilités géométriques," *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*(3)11 (1919), 1—65

144. R. Deltheil, *Probabilités géométriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1926.

145. G. De Rahm, "Sur un procédé de formation d' invariants intégraux," *Jber. Deutsch.Math. Verein* 49(1939), 156—161.

145a. H. L. De Vries, "Über Koeffizientenprobleme bei Eilinien und über die Heinzsche Konstanz," *Math. Z.* 112(1969), 101—106.

146. D.Z.Djorovic, "A problem in geometrical probability," *Publ. Fac. Electrotec.Univ.Belgrade, Ser Mat.-Fis*.175—179(1967),26—33.

147. C.T.J.Dodson, "Statistical analysis of patterns of deformation in flat bounded fibrous networks," *J. Phys.* D3(1970), 269—276.

148. C.T.J.Dodson, "Spatial variability and the theory of sampling in random fibrous networks," *J. Roy. Statist. Soc.* B33(1971), 88—94.

149. C. Domb, "The problem of random intervals on a line," *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 43(1947), 329—341

150. C. Domb, "A note on the series expansion method for clustering problems," *Biometrika* 59(1972), 209—211

151. R. Dontot, "Sur les invariants intégraux et quelques points d' optique géométrique," *Bull. Soc. Math. France* 42(19:4), 53—91

152. G.I. Drinfel'd, "Integral geometry," *Progr. Math.* 12 (*Algebra and Geometry*, R. V. Gamkreilidze, ed.; English transl., N.H. Choksy), pp. 173—2:5. Plenum Press, New York and London, 1972

153. G. I. Drinfel'd, "On measure in Lie groups," *Kharkov Gos. Univ. Ucen. Zap.* 29(1949); *Zap. Mat. Otdel. Fiz.-Mat. Fak. Kharkov Mat. Obsc,* 21(1949), 47—57

154. R.J.Duffin, "Some problems of matnematics and science," *Bull. Amer. Math. Soc* 80(1974), 1053—1070.

154a. R.J. Duffin, R. A. Meussner, and F .N. Rhines, "Statistics of particle measurement and of particle growth," *Carnegie-Mellon Univ., Technical Report* 32, April 1953.

155. S.W.Dufour, Intersections of Random Convex Regions, Ph. D. dissertation. Dept. of Statist., Stanford Univ., 1972.

156. A. Dvoretzky and H. Robbins. "On the parking problem." *Publ. Math. Inst. Hungar. Akad. Sci.* A9 (1964), 209—226.

157. A. Dvoretzky and C.A. Rogers, "Absolute and conditional convergence in normed linear spaces," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 36(1950), 192—197.

158. L.L. Eberhardt, "Some developments in distance sampling," *Biometrics* 23 (1967), 207—216.

159. J. Echarte Reula, "Medidas en espacios foliados y en espacios homogeneos," *Publ. Rev. Acad. Ci. Zaragoza Ser.* 2 21 (1966).

160. B. Efron, "The convex hull of a random set of points," *Biometrika* 52(1965), 331—344

161. H. G. Eggleston, "Note on a conjecture of L. A. Santalo," *Mathematika* 8(1961), 63—65

162. H.G.Eggleston, *Convexity*, Cambridge Univ Press, Cambridge, England, 1958

163. H. G. Eggleston, *Problems in Euclidean Space; Application of Convexity*. Pergamon Press, London, 1957

164. P.Eggleston and W.O.Kermack, "A problem in the random distribution of particles," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 62(1944), 103—115.

165. L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.,1949.

166. H.Elias(ed.),*Stereology(Proc.2nd Internat.Congr. Stereology)*. Springer, Berlin, 1967

167. D. Fairthone, "The distance between random points in two concentric circles," *Biometrika* 51(1964), 275—277.

168. I.Fáry, "Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un noeud." *Bull Soc Math France* 77(1949), 128—138.

169. I. Fáry, "Sur certaines inégalités géométriques," *Acta Sci. Math. (Szeged)* 12(1950),117—124.

170. I. Fáry, "Functionals related to mixed volumes," *Illinois J.Math.*5(1961),425—430.

171. H. Fast and A. Gotz, "Sur l'intégrabilité riemannienne de la fonction de Crofton," *Ann. Soc. Polon. Math.* 25(1952), 301—322.

172. J. Favard, "Définition de la longueur et de l'aire," *C. R. Acad. Sci. Paris* 194(1932), 344—346.

173. H. Federer, "Coincidence functions and their integrals," *Trans. Amer. Math. Soc.* 59(1946), 441—466.

174. H. Federer, "The (ϕ, k)-rectifiable subsets on n space," *Trans. Amer. Math. Soc.* 62(1947), 114—192.

175. H. Federer, "Dimension and measure," *Trans. Amer. Math. Soc.* 62(1947), 536—547

176. H. Federer, "Some integral geometric theorems," *Trans. Amer. Math. Soc.* 77(1954), 238—261.

177. H. Federer, "Curvature measures," *Trans. Amer. Math. Soc.* 93 (1959), 418—491.

178. H. Federer, *Geometric Measure Theory* Springer, Berlin, 1969.

179. L. Fejes Toth, "Über einen geometrischen Satz," *Math. Z.* 46(1940), 83—85.

180. L. Fejes Toth, *Lagerung in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.* Springer, Berlin, 1953.

181. L. Fejes Toth, "Close packing of segments," *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 10(1967), 57—60.

182. L. Fejes Toth and H. Hadwiger, "Mittlere Trefferzahlen und geometrische Wahrscheinlichkeiten," *Experientia* 3(1947), 366—369.

183. L.Fejes Toth and H.Hadwiger, "Über Mittelwerte in einem Eibereichsystem," *Bull. Inst. Polytech. Jassy* 1948,29—35.

184. W. Feller, "Some geometric inequalities," *Duke Math.J.*9(1942), 885—892.

185. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Wiley, New York, 1950.

186. W.Fenchel, "On the differential geometry of closed curves," *Bull.Amer.Math.Soc.*57(1951), 44—54.

187. W.Fenchel, "Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven." *Math.Annal*.101(1929), 238—252.

188. T.Figiel, "Some remarks on Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies," *Colloq. Math.* 24(1971—1972), 241—252.

189. J.P.Fillmore, "Barbier's theorem in the Lobatchewski plane," *Proc Amer. Math. Soc.* 24(1970), 705—709.

190. D.Filipescu, "On some integral formulae for convex bodies," *Stud Cerc. Mat* 22(1970), 1013—1031.

191. D.Filipescu, "Integral formulae for systems of random convex figures in Euclidean space," *Bull.Inst. Politechn Bucuresti* 34(1972), 21—36.

191a. D.Filipescu, "Integral formulas relative to convex figures in the euclidean space E_2," *Stud. Cerc. Mat.* 23(1971), 693—709.

191b. D.Filipescu, "On some integral formulas relative to convex curves in a riemannian space V_2 of constant

curvature," *Stud Cerc. Mat.* 23(1971), 561—578.

192. W.J.Firey, "The mixed area of a convex body and its polar reciprocal," *Israel J. Math.* 1(1963), 201—202.

193. W.J.Firey, "An integral-geometric meaning for lower order area functions of convex bodies," *Mathematika* 19(1972), 205—212.

194. W.J.Firey, "Support flats to convex bodies," *Geometria Dedicata* 2(1973) 225—248.

195. W.J.Firey, "Approximating convex bodies by algebraic ones," *Arch. Math.* 25(1974), 424—425.

196. L.D.Fisher, "The convex hull of a sample," *Bull. Amer. Math, Soc.* 72(1966), 555—558.

197. L.D.Fisher, "Limiting convex hulls of samples; theory and function space examples," *Z Wahrscheinlichkeits.* 18(1971), 281—297.

198. R.A.Fisher, "On the similarity of the distributions found for the test of significance in harmonic analysis and in Steven's problem in geometrical probability," *Ann. Eugenics* 10(1940), 14—17.

199. R.A.Fisher and R.E.Miles, "The role of the spatial patterns in the competition between crop plants and weeds, A theoretical analysis," *Math. Biosci* 18(1973), 335—350.

200. F.J Flaherty, "Curvature measures for piecewise linear manifolds," *Bull. Amer Math Soc.* 79 (1973), 100—102.

201. H.Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences.* Academic Press, New

York, 1963.

202. H.Flanders, "Differential forms," in *Studies in Global Geometry and Analysis* (S.S.Chern, ed.) pp. 57—95. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N J., 1967.

203. H.Flanders, "A proof of Minkowski's inequality for convex curves," *Amer Math Monthly* 75(1968), 581—593.

204. W H Fleming, *Functions of Several Variables* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.

205. E. Fratila, "Une methode statist que d' évaluer la longueur d' un arc de courbe spatial," *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 16(1971), 494—498.

206. M.Fujiwara, "Ein Satz über konvexe geschlossene Kurven," *Sci Repts Tohoku Univ.* 9(1920), 289—294.

207. K.Fukunaga, *Introduction to Statistical Pattern Recognition*. Academic Press. New York. 1972.

208. R.L.Fullman, "Measurement of particle sizes in opaque bodies," *J. Metals* 5(1953), 447—452.

209. R.L.Fullman, "Measurement of approximately cylindrical particles in opaque samples," *J. Metals* 5 (1953), 1267—1268.

209a. H.Furstenberg and I. Tzkoni, "Spherical functions and integral geometry," *Israel J. Math.* 10(1971), 327—338.

210. P. Funk, "Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung," *Math. Ann.* 77(1916), 129—135.

211. F. Gaeta, "Sobre la subordinacion de la geometria integral a la teoria de la represen'acion de grupos mediante transformaciones lineales," *Contrib. Ci. Univ. Buenos Aires, Fac. Ci. Ex Nat. Ser. Mat.* 2(1960), 31—87.

212. J. Gani, "A car parking problem," *Period. Math. Hungar.* 2(1972), 61—72.

213. F. Garwood, "The variance of the overlap of geometrical figures with reference to a bombing problem," *Biometrika* 34(1947), 1—17.

214. F. Garwood, "An application of the theory of probability to vehicular controlled traffic," *J. Roy. Statist. Soc.* Suppl. 7(1960), 65—67.

215. F. Garwood, "The vectorial representation of the frequency of encounters of freely flowing vehicles," *J. Appl. Probability* 11(1974), 797—808.

216. E. Gaspar, "Formulas integrales referentes a la interseccion de una figura plana con bandas paralelas variables," *Publ. Inst. Mat. Univ. Litoral. Rosario, Argentina* 2(1940), 113—118.

217. E. P. Geciauskas, "Distribution of the distance between two points in an ovaloid," *Litovsk. Mat. Sb.* 7(1967), 35—36.

218. E. P. Geciauskas, "The method of integral geometry for finding the distribution of distances in an ovaloid," *Litovsk. Mat. Sb.* 9(1969), 481—482.

219. E. P. Geciauskas, "Search by an oval," *Theor. Probability Appl.* 9(1965), 635—637 (translation).

220. J. Geffroy, "Contribution à la théorie des valeurs

extrêmes," *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **8** (1959), 123—185.

221. J. Geffroy. "Localisation asymptotique du lophy polyhedre d'appui d'un échantillon laplacien en k dimensions," *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **10** (1961), 3, 212—228.

222. I. M. Gelfand and M. I. Graev, "The geometry of homogeneous spaces, group representations in homogeneous spaces and questions in integral geometry related to them, I," *Trans. Moscow. Math. Soc.* 8 (1959), 321—390.

223. I. M. Gelfand, M. I. Graev, and Z. Ya. Shapiro, "Differential forms and integral geometry," *Functional Anal. Appl.* 3 (1969), 101—114 (translation).

224. I. M. Gelfand, M. I. Graev, and N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions*, Vol. 5: *Integral Geometry and Representation Theory*. Academic Press, New York, 1966.

224a. J. Gerriets and F. Poole, "Convex regions which cover arcs of constant length," *Amer. Math. Monthly* 81 (1974), 36—41.

225. B. Ghosh. "Random distances within a rectangle and between two rectangles," *Bull. Calcutta Math. Soc.* 43 (1951), 17—2[illegible].

226. H. Giger, "Zufallsmoirés," *Optica Acta* 15 (1968), 511—51[illegible].

227. H. Giger, "Fundamental equations in stereology, I," *Metrika* 16 (1970), [illegible]—5[illegible]; II, 18 (1972), [illegible]—93.

228. H. Giger and H. Hadwiger, "Über Treffzahlw[illegible]rs-

chscheinlichkeiten im Eikörperfeld." *Z. Wahrscheinlichkeits.* 10(1968), 329—331.

229. H.Giger and H.Riedwyl, "Bestimmung der Größenverteilung von Kugeln aus Schnittkreisradien," *Biometrische Z.* 12(1970), 156—162.

230. E.N.Gilbert, "Random subdivisions of space into crystals," *Ann. Math. Statist.* 33(1962), 958—972.

231. E.N.Gilbert, "The probability of covering a sphere with n circular caps," *Biometrika* 52(1965), 323—330.

232. J. R. Goldman, "Stochastic point processes: limit theorems," *Ann. Math. Statist.* 38(1967), 323—330.

233. A.W.Goodman and R.E.Goodman, "A circle covering problem," *Amer. Math. Monthly* 52(1945), 494—498.

234. S.Goudsmidt, "Random distributions of lines in a plane," *Rev. Modern Phys.* 17(1945), 321—322.

235. J.W.Green, "On the determination of a function in the plane by its integrals over straight lines," *Proc. Amer. Math. Soc.* 9(1958), 758—762.

236. L.W. Green, "Auf Wiedersehenflächen," *Ann. of Math.* (2) 78(1963), 289—299.

237. U.Grenander, "Statistical geometry: a tool for pattern analysis," *Bull. Amer. Math. Soc.* 79(1973), 829—856.

238. N. T. Gridgeman, "Geometric probability and the number π," *Scripta Math.* 25(1960), 183—195.

239. P.A.Griffiths, "On the Bezout problem for entire analytic sets," *Ann. of Math.*(2)100(1974),533—552.

240. P.A.Griffiths, "On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry," *Duke Math. J.* 41(1974), 775—814.

241. H.Groemer, "Über die mittlere Dichte von Massenverteilungen," *Monatsh. Math.* 70 (1966), 437—443.

242. H.Groemer, "On plane sections and projection of convex sets," *Canad. J. Math.* 21(1969), 1331—1337.

243. H.Groemer, "Eulersche Charakteristik, Projektionen und Quermassintegrale," *Math. Annal.* 198(1972), 23—56.

244. H. Groemer, "On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set," *Pacific J. Math.* 45(1973), 525—533.

245. H.Groemer, "On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set," *Arch. Math. (Basel)* 25(1974), 86—90.

246. B. Grünbaum, "Measures of symmetry for convex sets," in *Convexity (Proc. Symp. Pure Math.7th Seattle*, 1961), pp.233—270. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963.

247. B.Grünbaum, *Convex Polytopes*, Wiley, New York, 1967.

248. B.Grünbaum, "Polytopes, graphs and complexes,"

Bull. Amer. Math. Soc. 76(1970), 1131—1201.

249. G.Grünwald and P.Turan, "Über den Blochschen Satz," *Acta Litt. Sci. R. Univ. Hungar.* 8(1936), 238.

250. W. C. Guenther, "Circular probability problems," *Amer. Math. Monthly* 68(1961), 541—544.

251. W.C.Guenther and P.J.Terragno, "A review of the literature on a class of coverage problems," *Ann. Math. Statist.* 35(1964), 232—260.

252. H. Guggenheimer, *Differential Geometry*. McGraw-Hill, New York, 1963.

253. H. Guggenheimer, "Pseudo-Minkowski differential geometry," *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 70(1965), 305—370.

254. H.Guggenheimer, *Plane Geometry and Its Groups*. Holden-Day, San Francisco, 1967.

255. H.Guggenheimer, "Integral geometry in the Laguerre group," *Atti Congr. Internaz. Geom. Diff.* (*Bologna*) 1967, 1—3.

256. H. Guggenheimer, "Hill equations with coexisting periodic solutions," *J. Diff. Equations* 5(1969), 159—166.

257. H.Guggenheimer, "Bemerkung zur Aufgabe 493," *Elem. Math.* 24(1969), No. 1.

258. H.Guggenheimer, "Polar reciprocal convex bodies," *Israel J. Math.* 14(1973), 309—316.

259. H.Guggenheimer, "A formula of Furstenberg-Tzkonis type," *Israel J. Math.* 14(1973), 281—282.

260. R.S.Guter, "On the probability of detecting a re-

gion by a linear search," *Theor. Probability Appl.* 9(1961), 331—333.

261. H. Hadwiger, "Über Mittelwerte im Figurengitter," *Comment. Math. Helv.* 11(1939), 221—233.

262. H. Hadwiger, "Über statistische Flächen-und Längenmessung," *Mitt. Naturforsch. Gesellsch. Bern* 53—58 (1939).

263. H. Hadwiger, "Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate," *Comment. Math. Helv.* 13 (1941), 195—200.

264. H. Hadwiger, "Gegenseitige Bedeckbarkeit zweier Eibereiche und Isoperimetrie," *Vierteljschr. Naturforsch. Gesellsch. Zürich* 86(1941), 152—156.

265. H. Hadwiger, "Die erweiterten Steinerschen Formeln für ebene und sphärische Bereiche," *Comment. Math. Helv.* 18(1945), 59—72.

266. H. Hadwiger, "Nonseparable convex systems," *Amer. Math. Monthly* 54(1947), 583—585.

266a. H. Hadwiger, "Un valor medio integral de la caracteristica de Euler para ovalos moviles," *Rev. Un. Mat. Argentina* 13(1948), 66—72.

267. H. Hadwiger, "Neue Integralrelationen für Eikörperpaare," *Acta Sci. Math. (Szeged)* 13(1950), 252—257.

268. H. Hadwiger, "Einige Anwendungen eines Funktionalsatzes für konvexe Körper in der räumlichen Integralgeometrie," *Monatsh. Math.* 54(1950), 345—353.

269. H. Hadwiger, "Über zwei quadratische Distanzinte-

grale für Eikörper," *Arch. Math. (Basel)* 3(1952), 142—144.

270. H. Hadwiger, *Altes und Neues über konvexe Körper*. Birkhauser, Basel and Stuttgart, 1955.

271. H. Hadwiger, "Über Gitter und Polyeder," *Monatsh. Math.* 57(1953), 246—254.

272. H. Hadwiger, "Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie," *J. Reine Angew. Math. (Crelle)* 194(1955), 101—110.

273. H. Hadwiger, "Integralsätze im Konvexring," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 20(1956), 136—154.

274. H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer, Berlin, 1957.

275. H. Hadwiger, "Zur Axiomatik der innermathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie," *Mitt. Verein. Schweiz. Versich.-Math.* 58(1958), 151—165.

276. H. Hadwiger, "Normale Körper im euklidischen Raum und ihre topologischen und metrischen Eigenschaften," *Math. Z.* 71(1959), 124—140.

277. H. Hadwiger, "Volumen und Oberfläche eines Eikörpers der keine Gitterpunkte überdeckt," *Math. Z.* 116(1970), 191—196.

278. H. Hadwiger, "Gitterperiodische Punktmengen und Isoperimetrie," *Monatsh. Math.* 76(1972), 410—418.

279. H. Hadwiger and C. Meier, "Studien zur vektoriellen Integralgeometrie," *Math. Nachr.* 56(1973), 261—268.

280. H. Hadwiger and R. Schneider, "Vektorielle Integra-

lgeometrie," *Elem. Math.* 26(1971), 49—52.

281. H.Hadwiger and F.Streit, "Über Wahrscheinlichkeiten räumlicher Bündelungserscheinungen," *Monatsh. Math.* 74(1970), 30—40.

282. H. Hadwiger, H. Debrunner, and V. Klee, *Combinatorial Geometry in the Plane*. Holt. New York, 1964.

283. M.Haimovici, "Géométrie intégrale sur les surfaces courbes," *C. R. Acad. Sci. Paris* 203(1936),230 232.

284. M.Haimovici, "Géométrie intégrale sur les surfaces courbes," *Ann. Sci. Univ. Jassy* 23(1937), 57—74.

285. M. Haimovici, "Généralisation d'une formule de Crofton dans un espace de Riemann à *n* dimensions," *C. R. Acad. Sci. Roumaine* 1(1936), 291—196.

286. M. Halperin, "Some asymptotic results for a coverage problem," *Ann. Math. Statist.* 31(1960), 1063—1076

287. J. Hammer, "On a general area-perimeter relation for two-dimensional lattices," *Amer. Math. Monthly* 71(1964), 534—537.

288. J.M.Hammersley, "The distribution of distances in a hypersphere," *Ann. Math. Statist.* 21(1950), 447—452.

289. J.M.Hammersley, "On counters with random dead time, I," *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 49(1953), 623—637.

290. J.M.Hammersley and K.W. Morton, "A new Monte-

Carlo tecnnique: antithetic variates," *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 52(1956), 449—475.

291. H.Hancock, *Development of the Minkowski Geometry of Numbers*, Vol. I. Dover, New York, 1939.

292. D.C.Handscomb, "On the random disorientation of two cubes," *Canad. J. Math.* 10(1958), 85—88.

293. H. Happel, "Einige Probleme über geometrische Wahrscheinlichkeiten," *Z. Math. Phys.* 61(1912), 43—56.

294. E.F.Harding and D.G.Kendall (eds.), *Stochastic Geometry*. Wiley, New York, 1974.

295. P.Hartman and A.Wintner, "On the needle problem of Laplace and its generalizations," *Bol. Mat.* 14 (1941), 260—263.

296. E.Heil, "Abschätzung für einige Affininvarianten konvexer Kurven," *Monatsh. Math.* 71(1967), 405—423.

296a. E.Heil, Zur affinen Differentialgeometrie der Eilinien, Ph.D. dissertation. Darmstadt, 1965.

297. S.Helgason, "Differential operators on homogeneous spaces," *Acta Math.* 102(1959), 239—299.

298. S.Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Academic Press, New York, 1962.

299. S.Helgason, "Duality and Radon transform for symmetric spaces," *Amer. J. Math.* 85(1963), 667—692.

300. S.Helgason, "A duality in integral geometry; some generalizations of the Radon transform," *Bull. Amer.*

Math. Soc. **70**(1964), 435—446.

301. S. Helgason, "A duality in integral geometry on symmetric spaces," *U.S.-Japan Sem. Diff. Geometry (Kyoto,* 1965), pp.37—56, Nippon Hyoronsha, Tokyo, 1966.

302. S. Helgason, "The Radon transform on Euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds," *Acta Math.* 113(1965), 153—180.

303. S. Helgason, "Fundamental solutions of invariant differential operators on symmetric spaces," *Amer. J. Math.* **86**(1964), 565—601.

304. S. Helgason, "A duality for symmetric spaces with applications to group representations," *Advances in Math.* 5(1970), 1—154.

305. S. Helgason, "The surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces, I," *Ann. of Math.* (2) 98(1973), 451—479.

305a. J.M. Hemmersley, "Stochastic models for the distribution of particles in space," *Advances in Appl. Probability* Spec. Suppl. (*Proc. Symp. Statist. Probabilistic Problems in Metallurgy, Seattle,* 1971) (1972), 47—68.

306. G. Herglotz, *Lectures on Geometrical Probability* (mimeographed notes), Göttingen, 1933.

307. G. Herglotz, "Über die Steinersche Formel für Parallelfläche," *Abh. Math Sem Univ. Hamburg* 15(1943), 165—177

308. R. Hermann, "Remarks on the foundations of inte-

gral geometry," *Rend. Circ. Mat. Palermo, II* 9 (19 0), 91—93.

309. J E. Hilliard, "Determination of structural anisotropy," in *Stereology (Proc. 2nd Internat. Congr. Stereology)*, pp.219—227. Springer, Berlin, 1967.

309a. J.E.Hilliard, "Stereology: an experimental viewpoint," *Advances in Appl. Probability* Spec. Suppl. *(Proc Symp. Statist. Probabilistic Problems in Metallurgy, Seattle,* 1971) (1972), 92—111

309b. J E.Hilliard, "Direct determination of the moments of the size distribution of particles in an opaque sample," *Trans. Met. Soc. AIME* 242(1968), 1373—1380.

310. D.F.Holcomb, M.Iwasawa, and F D.K. Roberts, "Clustering of randomly placed spheres," *Biometrika* 59(1972), 207—209.

311. P.Holgate, "The distance from a random point to the nearest point of a closely packed lattice," *Biometrika* 52(1965), 261—263.

312. K.Horneffer, "Eine Crofton-Formel und der Satz von Stokes," *Izv. Akad. Nauk Armjan SSR Ser. Mat* 5(1970), 235—250.

313. K.Horneffer, "Über die Integration von Differentialformen mittels integralgeometrischer Masse," *J. Diff. Geometry* 5(1971), 451—466.

314. H.Hornich, "Eine allgemeine Ungleichung für Kurven," *Monatsh. Math Phys.* 47(1939), 432—438.

315. M.Horowitz, "Probability of random paths across elementary geometrical shapes," *J. Appl. Probabi-*

lity 2(1965), 169—177.

316. B. Hostinsky, "Sur les probabilités géométriques," *Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, Brno* 50(1925).

317. B. Hostinsky, "Probabilités relatives à la position d'une sphère à centre fixe," *J. Math. Pures Appl. (Liouville)* (9) 8(1929), 35—43.

318. B. Hostinsky, "Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille," *Bull. Sci. Math.* 44(1920), 126—136.

319. A. Hurwitz, "Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier," *Ann. Ecole Normale Sup.* (3) 19(1902), 357—408.

320. I. M. Jaglom and W. G. Boltjanski, *Konvexe Figuren*. Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1956.

321. A. J. Jakeman and R. S. Anderssen, "A note on numerical methods for the thin section model," *Proc. 8th Internat. Congr. Electron Microscopy (Canberra,* 1974) Vol. 2, pp. 4—5.

322. J. Jakeman and R. S. Anderssen, "On computational stereology," *Proc. 6th Austral. Computer Conf. (Sydney,* 1974) Vol. 2, pp. 353—362.

323. A. T. James, "Normal multivariate analysis and the orthogonal group," *Ann. Math. Statist.* 25(1954), 40—75.

324. F. John, "Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten," *Math. Ann.* 100(1934), 488—520.

324a. F. John, *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations*. Wiley(Inter-

science), New York, 1955.

325. W. A. Johnson and R. F. Mehl, "Reaction kinetics in processes of nucleation and growth," *Trans. Amer. Ins. Min. Met. Eng.* 135 (1939), 416—458.

326. D. Jusupov, "On the integral geometry method in the theory of nonregular curves," *Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika* 119(4) (1972), 120—122.

327. M. Kac, "Toeplitz matrices, transformation kernels and a related problem in probability theory" *Duke Math. J.* 21 (1954), 501—509.

328. M. Kac, E. R. van Kampen, and A. Wintner, "On Buffon's problem and its generalizations," *Amer. J. Math.* 61 (1939), 672—678.

329. B. C. Kahan, "A practical demonstration of a needle experiment to give a number of concurrent estimates of π," *J. Roy. Statist. Soc.* A124 (1961), 227—239

330. J. Karamata, "On the distribution of intersections of diagonals in regular polygons," Univ. of Wisconsin Research Center Tech. Rept. 281 (Dec. 1961).

331. E. Kelly, "Lower-dimensional horocycles and the Radon transforms on symmetric spaces," *Trans. Amer. Math. Soc.* (to appear).

332. D. G. Kendall, "On the number of lattice points inside a random oval," *Quart. J. Math.* (2) 19 (1948), 1—26.

333. D. G. Kendall, "Foundations of a theory of random sets," in *Stochastic Geometry* (E. F. Harding and D. G. Kendall, eds.), pp. 322—356. Wiley, New

York, 197[illegible]

334. D.G. Kendall and R. A. Rankin, "On the number of points of a given lattice in a random hypersphere," *Quart.J.Math.*(2) 4 (1953), 178—189.

335. M.G.Kendall and P.A. P. Moran, *Geometrical Probability*.Griffin, London, 1963.

336. J.F.C.Kingman, "Mean free paths in a convex reflecting region." *J. Appl. Probability* 2 (1965), 162—268.

337 J F.C.Kingman, "Random secants of a convex body," *J. Appl. Probability* 6 (1969), 660—672.

338. V.Klee, "What is the expected volume of a simplex whose vertices are chosen at random from a gievn convex body?" *Amer. Math Monthly* 76 (1969), 186—188

339. E. Knothe, "Über Ungleichungen bei Sehnenpotenzintegralen," *Deutsche Math.* 2 (1937), 544—551.

340. E.Knothe, "Konjugierte Normalensysteme und Stacheln von Eiflächen," *Arch.Math.(Basel)* 19(1968), 214—224.

341. E. Knothe, "Bemerkungen zur Isoperimetrie des Kreises auf der Kugel," *Arch. Math. (Basel)* 22 (1971), 325—327.

341a. S.Kobayashi and K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publ., New York, vol.I, 1963; vol.II, 1969.

342. A.Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ergeb Math.* 2, 1933). English transl. Chelsea, New York, 1950.

343. C.W.Kosten, "The mean free path in room acoustics," *Acustica* 10 (1960), 245—250.

344. G.Kowalewski, *Einführung in die Determinantentheorie*. Berlin, 1912.

345. K.Krickeberg. "Invariance properties of the correlation measure of line processes, *Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat.* 5 (1970), 251—262. Reproduced in *Stochastic Geometry* (E. F. Harding and D. G. Kendall, eds.), pp. 76—88 Wiley, New York, 1974.

346. K Krickeberg, "Moments of point processes," in *Stochastic Geometry* (E.F.Harding and D.G. Kendall, eds.), pp. 89—113. Wiley, New York, 1974.

346a. K. Krickeberg, "The Cox process," *Symposia Matematica (Convegno di calcolo delle probabilità, INDAM, Roma,* 1971), pp. 151—167, Academic Press, London, 1972.

347. J.P.V.Krishma, "The theory of probability distributions of points on a lattice," *Ann. Math Statist.* 21 (1950), 198—217.

348. T.Kubota, "Über konvex geschlossene Mannigfaltigkeiten im n-dimensionalen Raum," *Sci. Repts. Tôhoku Univ.* 14 (1925), 85—99

349. T.Kubota and D.Hemmi, "Some problems of minima concerning the oval," *J. Math. Soc Japan* 5 (1953), 372—389

349a. R.D.Kulle, "Messung des spezifischen Flächeninhaltes, "*Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II, Math. Phys. Kl.* 1971, No.10, 209—215

350. R. D. Kulle and A. Reich, Flächenmessung mit gleichverteilten Folgen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II, Math.-Phys. Kl.* 1973, Heft 12

351. **M. Kurita, "An extension of Poincare's formula in integral geometry,"** *Nagoya Math. J.* 2 (1951) 55—61.

352. **M. Kurita,** *Integral Geometry*. Nagoya Univ., 1956 (japanese).

353. **M. Kurita, "On the volume in homogeneous spaces,"** *Nagoya Math. J* 15 (1959), 201—217.

354 **M. Kurita, "On the vector in homogeneous spaces,"** *Nagoya Math. J.* 5 (1953), 1—33.

355. E. Langford, "Probability that a **random triangle is** obtuse." *Biometrika* 56 (1969), 689—690.

356. E. Langford, "A problem in geometrical **probability**," *Math. Mag.* 43 (1970), 237—244.

356a. M. M. Lavrentev and A. G. Buhgeim, **"A certain class** of problems of integral geometry," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 211 (1973), 38—39; **English transl.,** *Soviet Math. Dokl.* 14 (1973), 957—959.

357. H. Lebesgue, "Exposition d'une memoire de M. W. Crofton," *Nouv. Ann. Math.* (4) 12 (1912), 481—502.

358. K. Legrady, "Symplektische Integralgeometrie," *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 41 (1956), 139—159.

359. K. Legrady, "Sobre la determinacion de functionales en geometria integral," *Rev. Un. Mat. Argentina* 19 (1960), 175—178

360. J. Lehner, *A Short Course in Automorphic Funct-*

ions.Holt, New York, 1966.

361 C. G.Lekkerkerker, *Geometry of Numbers*. North-Holland.Amsterdam, 1969.

362. J.Lengauer, "Geometrische Wahrscheinlichkeitsprobleme," *Progr.Gymn. (Würzburg)* 1899.

363. H.Lenz, "Mengenalgebra und Eulersche Charakteristik," *Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg* 34 (1969—1970), 135—147.

364. H.Levine, "A theorem on holomorphic mappings into complex projective space." *Ann. of Math.* (2) 71 (1960), 529—535.

365. P.Levy, "Sur la division d' un segment par des points choisis au hasard." *C.R.Acad. Sci. Paris* 208 (1939), 147.

366. G.van der Lijn, "Sur la mesure d' un ensemble autre qu' un ensemble de points et son application au problème du Buffon." *Bull.Soc Roy.Sci. Liège* 2 (1933), 104—113.

367. D. V. Little, "A third note on recent research in geometrical probability." *Advances in Appl.Probability* 6 (1974), 103—130.

368. L.H.Loomis and S. Sternberg. *Advanced Calculus*. Addison-Wesley.Reading.Mass., 1968.

369. R.D.Lord, "The distribution of distances in a hypersphere." *Ann. Math. Statist.*25 (1954), 794—798.

370. R.Luccioni. "Geometria integral en espacios proyectivos." *Rev. Mat. Fis. Teor. Univ.Tucumán* 15 (1964).53—80.

371. R. Luccioni, "Sobre la existencia de medida para hipercuádricas singulares en espacios proyectivos," *Rev. Mat. Fís. Téor. Univ. Tucumán* 14 (1962), 269—276.

372. A. V. Lucenko, "Measurability of n-point sets with respect to projective groups in the plane," *Ukrain. Geometr. Sb.* 11 (1971), 53—63.

373. A. V. Lucenko, "The measure of sets of geometric elements and their subsets," *Ukrain. Geometr. Sb.* 1 (1965), 39—57

374. A. V. Lucenko and L. M. Jurtova, "Measures of sets of pairs on the plane that are invariant under projective transformation groups," *Ukrain. Geometr. Sb.* 5—6 (1968), 99—102.

375. G. Lükö, "On the mean length of the chords of a closed curve," *Israel J. Math.* 4 (1966). 23—32.

375a. E. Lutwak, "A general Bieberbach inequality," *Proc Cambridge Phil. Soc.* 78 (1975), 493—495

376. W. Maak, "Integralgeometrie 18: Grundlagen der ebenen Integralgeometrie," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 12 (1938), 83—110

377. W. Maak, "Integralgeometrie 27: Über stetige Kurven," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 12 (1938), 163—178.

378. W. Maak, "Schnittpunktzahl rektifizierbarer und nicht rektifizierbarer Kurven," *Math. Ann.* 118 (1942), 229—304.

379. W. Maak, "Oberflächenintegral und Stokes-Formel im gewöhnlichen Raum (Integralgeometrie 29),"

Math.Ann.116 (1939), 574—597

380. W.Maak, "Über Längen-und Inhaltsmessung,"*Nachr.Akad.Wiss.Göttingen* II *Math.Phys. Kl*. 1970, 57—66

381. A.M Macbeath and C A.Rogers,"Siegel's mean value theorem in the geometry of numbers," *Proc. Cambridge Phil Soc* 54 (1958), 139—151; 51 (1955), 567—576; 54 (1958), 322—326.

382 C.Mack,"An exact formula for $Q_k(n)$, the probable number of k-aggregates in a random distribution of n points," *Phil Mag*. (7) 39 (1948), 778—790

383 C.Mack, "The expected number of aggregates in a random distribution of points," *Proc Cambridge Phil.Soc*.45 (1949), 285—292.

384 C Mack,"The effect of overlapping in bacterial counts of incubated colonies."*Biometrika* 40 (1953), 220—222.

385. C.Mack,"The expected number of clumps when convex laminae are placed at random and with random orientation on a plane area,"*Proc Cambridge Phil Soc*.50 (1954), 581—585

386. J.K Mackenzie."Sequential filling of a line by intervals placed at random and its application to linear adsorption," *J.Chem.Phys*.37 (1962), 723.

387 K.Mahler,"Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper," *Casopis Pest Mat Fys*. 68 (1939), 93—102

388. C.L.Mallows and J.M.Clark,"Linear intercept dis-

tributions do not characterize plane sets." *J. Appl. Probability* 7 (1970), 240—241.

389. D Mannion, "Random space-filling in one dimension." *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* A9 (1964), 143—154

390. L. Mantel, "An extension of the Buffon needle problem." *Ann. Math. Statist.* 22 (1951), 314—315; 24 (1953), 674—677

391. F. H. Marriot, "Buffons's needle problem for non-random directions," *Biometrics* 27 (1971), 233—235

392. G Masotti-Biggiogero, "La geometria integrale," *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* 25 (1953—1954), 3—70

393. G. Masotti-Biggiogero, "Su alcune formule di geometria integrale," *Rend. Mat.* (5) 14 (1955), 280—288

394. G. Masotti-Biggiogero, "Sulla geometria integrale, generalizzazione di formule di Crofton, Lebesgue e Santalo," *Rev. Un. Mat. Argentina* 17 (1955), 125—134.

395. G. Masotti-Biggiogero, "Sulla geometria integrale, nuove formule relative agli ovaloidi, in *Scritti Math. in Onore di Filippo Sibirani*, pp. 173—179. Cesari Zuffi, Bologna, 1957

396. G. Masotti-Biggiogero, "Nuove formule di geometria integrale relative agli ovali," *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 58 (1962), 85—108

397. G. Masotti-Biggiogero, "Nuove formule di geometria

integrale relative agli ovaloide," *Rend. Sc. Ist. Lombardo* A96 (1962), 666—685.

398. M. Masuyama, "On a fundamental formula in bulk sampling from the viewpoint of integral geometry," *Rept. Statist. Appl. Res. Un Japan Sci. Engrs.* 4 (1956), 85—89.

399. G. Matheron, "Ensembles fermés aléatoires, ensembles semi-markoviens et polyèdres poissoniens," *Advances in Appl. Probability* 4(1972), 508—543.

400. G. Matheron, "Random sets theory and its applications to stereology," *J. Microscopy* 95(1972), 15—25.

401. G. Matheron, "Hyperplanes poissoniens et compacts de Steiner," *Advances in Appl. Probability* 6(1974), 563—579.

401a. G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, New York, 1975.

402. M. Matschinski, "Considérations statistiques sur les polygones et les polyèdres," *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 3 (1954), 179—201.

403. M. Matschinski, "Détermination expérimentale des probabilités du nombre des côtés des polygones couvrant chaotiquement un plan sans lacunes," *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 18 (1969), 246—265.

404. G. A. McIntyre, "Estimation of plant density using line transects," *Ecology* 41 (1955), 90—96.

405. J. L. Meijering, "Interface area, edge length and number of vertices in crystal aggregates with random nucleation," *Philips Research Rept.* 8 (1953), 270—290.

406. Z.A.Melzak, "Self-intersections in continuous random walk," *Bull.Amer.Math.Soc.* 70 (1970), 1251—1252.

407. R.E. Miles, "Random polygons determined by random lines in a plane, I, II," *Proc. Natl. Acad. Sci USA* 52 (1964), 901—907, 1157—1160

408. R.E.Miles, "On random rotations in R^3," *Biometrika* 52 (1965), 636—639.

409. R. E. Miles, "Probability distribution of a network of triangles (a solution to problem 67—15)," *SIAM Rev.* 11 (1969), 399—402

410. R. E. Miles, "Poisson flats in Euclidean space, Pt. I: A finite number of random uniform flats," *Advances in Appl.Probability* 1 (1969), 211—237.

411. R. E. Miles, "On the homogeneous planar Poisson point process," *Math.Biosci.* 6 (1970), 85—127.

412. R.E.Miles, "The asymptotic values of certain coverage probabilities," *Biometrika* 56 (1969), 661—680

413. R.E.Miles, "Random points, sets and tessellations on the surface of a sphere," *Sankhyā* A33 (1971), 145—174

414. R.E. Miles, "Poisson flats in Euclidean spaces. Pt. II: Homogeneous Poisson flats and the complementary theorem. *Advances in Appl. Probability* 3 (1971), 1—43.

415. R.E.Miles, "A synopsis of Poisson flats in Euclidean spaces," *Izv.Akad.Nauk Arm.SSR Ser.Mat.* 5 (1970), 263—285. Reprinted in *Stochastic Geome-*

try (E.F.Harding and D. G. Kendall, eds.), pp. 20?—227 Wiley.New York, 1974.

416. R.E.Miles, "Multidimensional perspectives on stereology," *J.Microscopy* 95 (1972), 181—195

417. R. E. Miles, "On the elimination of edge effects in planar sampling," in *Stochastic Geometry* (E. F. Harding and D. G. Kendall, eds.), pp. 229—247. Wiley. New York, 1974

418. R. E. Miles, "The various aggregates of random polygons determined by random lines in a plane," *Advances in Math* 10 (1973), 256—290

419. R. E. Miles, "The random division of space," *Advances in Appl. Probability* Suppl (1972) 243—266.

420. R. E. Miles, "Isotropic random simplices," *Advances in Appl Probability* 3 (1971), 353—382.

421. R. E. Miles, "A simple derivation of a formula of Furstenberg and Tzkoni," *Israel J. Math.* 14 (1973), 278—280

421a. R. E. Miles, "The fundamental formula of Blaschke in integral geometry and geometrical probability and its iteration, for domains with fixed orientations," *Austral. J. Statist.* 16 (2)(1974). 111—118

421b R. E. Miles, "Direct derivation of certain surface integral formulae for the mean projection of a convex set," *Advances in Appl. Probability* 7(1975), 818—829

422. E. Mohr, "Bemerkung zu Mises' Behandlungen des

Nadelproblems von Buffon," *Deutsche Math* 6 (1941), 108—113.

423. P G. Moore, "Spacing in plant populations," *Ecology* 35 (1954), 222—227

424. P A. P. Moran, "Measuring the surface area of a convex body," *Ann. of Math.* 45 (1944), 783—789

425. P A. P. Moran, "The random division of an interval, I," *J. Roy. Statist. Soc Suppl.* 9 (1947), 92—98; II, B13 (1951), 147—150; III, B15 (1953), 77—80.

426. P A. P. Moran, "Numerical integration by systematic samping," *Proc. Cambridge Phil. Soc* 46 (1950), 111—115

427. P A. P. Moran, "Measuring the length of a curve," *Biometrika* 53 (1966), 359—364

428. P A. P. Moran, "A note on recent research in geometrical probability," *J. Appl. Probability* 3 (1966), 453—463

429. P A P. Moran, "A second note on recent research in geometrical probability," *Advances in Appl. Probability* 1 (1969), 73—89.

430. P A P Moran, "The probabilistic basis of stereology," *Advances in Appl Probability* Spec Suppl (*Proc Symp. Probabilistic Problems in Metallurgy, Seattle*, 1971) (1972), 69—91.

431. P. A. P Moran and S. Fazekas de St Groth, "Random circles on a sphere," *Biometrika* 49 (1962), 289—396.

432. G W Morgenthaler, "Some circular coverage problems," *Biometrika* 48 (1961), 313—[illegible]

433. M Morimoto, "Sur les transformations horosphériques généralisées dans les espaces homogènes," *J Fac Sci. Univ Tokyo Sect. IA* 13 (19[illegible]), 65—83.

434. R. R. A. Morton, "The expected number and angle of intersections between random curves in a plane," *J. Appl. Probability* 3 (1966), 559—562.

435. V. M. Morton, "The determination of angular distribution of planes in space," *Proc. Roy Soc.* A302 (1967), 51—68.

436. G. D. Mostow, "Homogeneous spaces with finite invariant measure," *Ann. of Math.* (2) 75 (1962), 17—37.

437. A. Müller, "Integralgeometrie 16: Dichten linearer Mannigfaltigkeiten im euklidischen und nichteuklidischen R_n," *Math. Z.* 42 (1936), 101—124.

438. H. R. Müller, "Über lineare und quadratische Momente konvexer Bereiche," *Nachr. Österr. Math. Ges.* 21—22 (1952), 47.

439. H. R. Müller, "Über Momente ersten und zweiten Grades in der Integralgeometrie," *Rend. Circ. Mat. Palermo II* 2 (1953), 119—140.

440. J. P. Mullooly, "A one-dimensional random space-filling problem." *J. Appl. Probability* 5 (1968), [illegible]—43[illegible]

441 M. E. Munroe, *A Modern Multidimensional Calculus*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963.

442. E. J. Myers, "Size distribution of cubic particles," in *Stereology (Proc. 2nd Internat. Congr Stereology)*, pp. 187—188. Springer, Berlin, 1967

443. L. Nachbin, *The Haar Integral*. Van Nostrand, Princeton, N. J., 1965.

443a. G. Nagy, "State of the art in pattern recognition," *Proc. IEEE* 56 (1968), 836—862.

444. J. I. Naus, "Clustering of random points in two dimensions," *Biometrika* 52 (1965), 263—267.

445. F. Neumann, "Center affine invariants of plane curves in connection with the theory of the second-order linear differential equations," *Arch. Math. Brno* 4 (1968), 201—216.

446. F. Neuman, "A note on Santalo's isoperimetric problem," *Rev. Mat. Fis. Teor Univ. Tucumán* 20 (1970), 204—206

447. F. Neuman, "Closed plane curves and differential equations," *Rend. Mat.* 3 (1970) 423—433.

448. F. Neuman, "Linear differential equations of the second order and their applications," *Rend Mat.* (6) 4(1971), 559—617.

449. P. E. Ney, "A random space-filling problem," *Ann. Math. Statist.* 33 (1962), 702—718

449a. W. L. Nicholson and K. R. Merckx, "Unfolding particle size distribution," *Technometrics* 11(1970), 707—723.

450. W L. Nicholson, "Estimation and linear properties of particle size distributions," *Biometrika* 57 (1970), 273—297

451. A. Nijenhuis, "On Chern's kinematic formula in integral geometry," *J. Diff. Geometry* **9** (1974), 475—482.

452. G. Nöbeling, "Über die Flächenmaße im Euklidischen Raum," *Math. Ann.* 118 (1943), 687—701.

453. G. Nöbeling, "Über die Flächeninhalte dehnungsbeschränkter Flächen," *Math. Z.* **48** (1943) 747—771

454. G. Nöbeling, "Über die Hauptformel der ebenen Kinematik von L. A. Santalo und W. Blaschke, I, II," *Math. Ann.* 120 (1949), 585—614, 615—633

455. G. Nöbeling, "Die Formel von Poincaré für beliebige Kontinuen," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 15 (1943), 120—126.

456. G. Nöbeling, "Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn W. Maak," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 17 (1951) 95—97

457. A. B. J. Novikoff, "Integral geometry as a tool in pattern perception," in *Principles of Self-Organization* (H. von Foerster and G. W. Zopf, Jr. eds.), pp. 347—368. Pergamon Press, London, 1962.

458. N. Obrechkoff, "On hyperbolic integral geometry," *C. R. Acad. Bulgare Sci. Math. Nat.* 2 (1949), 1—4.

459. A. M. Odlyzko, "On lattice points inside convex bodies," *Amer. Math. Monthly* 80 (1973), 915—918

460. D. Ohmann, "Ungleichungen zwischen den Quermassintegralen beschränkter Punktmengen, I," *Math. Ann.* 124 (1952), 265—276; II, 127 (1954), 1—7; III, 130 (1956), 386—393.

461. D. Ohmann, "Eine Verallgemeinerung der Steinerschen Formel," *Math. Ann.* 129 (1955), 209—242

462. D. Ohmann, "Extremalprobleme für konvexe Bereiche der euklidischen Ebene," *Math. Z.* 55 (1952), 347—352

463. O. G. Owens, "The integral geometric definition of arc length for two-dimensional Finsler spaces," *Trans. Amer. Math. Soc.* 73 (1952), 198—210.

464. S. Oshio, "On mean values and geometrical probabilities in E_2," *Sci. Rept. Kanazawa Univ.* 3 (1955), 35—43.

465. S. Oshio, "On mean values and geometrical probabilities in E_n," *Sci. Rept. Kanazawa Univ* 3 (1955), 199—207

466. R. S. Palais, "A global formulation of the Lie theory of transformation groups," *Amer Math. Soc. Memoirs* No. 22 (1957)

467. I. Palasti, "On some random space-filling problems," *Publ Math. Inst. Hung. Acad. Sci* 5 (1960), 353—360.

468. J. E. Paloheimo, "On a theory of search," *Biometrika* 58 (1971), 61—75.

469. F. Papangelou, "On the Palm probabilities of processes of points and processes of lines," in *Stocha-*

stic Geometry (E. F. Harding and D. K. Kendall, eds.), pp. 114—147. Wiley, New York. 1974.

470. B. Parzen, [1] *Modern Probability Theory and Its Applications*. Wiley, New York. 1960

471. B. Petkantschin, "Zusammenhänge zwischen den Dichten der linearen Unterräume im n-dimensionalen Raume," *Abh. Math. Sem Univ. Hamburg* 11 (1936), 249—310.

472. E. E Petrov, "The Radon transform in matrix spaces and in Grassmann manifolds," *Soviet Math. Dokl.* 8 (1967), 1504—1507

473. C M. Petty, "Centroid surfaces," *Pacific J Math* 11 (1961), 1535—1547

474. C. M Petty. "Projection bodies," *Proc. Colloq. on Convexity, Copenhagen*, 1965, pp. 234—241. Copenhagen Univ. Math. Inst., 1967

475. C M. Petty, "Isoperimetric problems," *Proc. Conf. on Convexity and Combinatorial Geometry* pp. 26—41. Univ of Oklahoma Press, Norman, Okla., 1972

476. C. M. Petty, "Geominimal surface area," *Geometria Dedicata* 3 (1974), 77—97

477. J. R. Philip, "Some integral equations in geometrical probability," *Biometrika* 53 (1966), 365—374.

478. E. M. Philofsky and J. E. Hilliard, "The measurement of the orientation distribution and arear arrays," *Quart. Appl. Math.* 27 (1969), 79—86.

479. A. Pleijel, "Zwei kurze Beweise der isoperimetris-

chen Ungleichung," *Arch. Math.(Basel)* 7(1956), 317—319.

480. A. Pleijel, "On konvexa kurvor," *Nordisk Math Tidskr.* 3 (1955), 57—64.

481. W. F Pohl, "On some integral formulas for space curves and their generalization," *Amer J Math* 90 (1968), 1321—1345

482. W. F. Pohl, "Extrinsic complex projective geometry," *Proc. Conf Complex Analysis. Minneapolis.* 1964 pp. 18—29.

483. W. F. Pohl, "The self-linking number of a closed space curve," *J. Math Mech.* 17 (1968), 975—986.

484. H. Poincaré, *Calcul des probabilités.* 2nd ed. Gauthier-Villars. Paris. 1912.

485. H. Poincaré, "Théorie des groupes fuchsiens," *Acta Math.* 1 (1882), 1—62

486. G. Polya. "Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde," *Arch. Math. Phys* 27 (1918), 135—142.

487. G. Polya, "Über geometrische Wahrscheinlichkeiten," *Sitz. Akad. Wiss. Wien* 124 (1917), 319—328.

488. G. Polya, "Über geometrische Wahrscheinlichkeiten in konvexen Körpern," *Ber Vern Sächs. Ges Wiss. Leipzig* 69 (1917), 457—458.

489. G. Polya and G Szego. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* Vols. 1 and 2. Springer, Berlin, 1925

490. G. Polya and G. Szego, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Ann. of Math. Studies No. 27). Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1951.

491. G. Poole and J. Gerriets, "Minimum covers for arcs of constant length," *Bull. Amer. Math. Soc.* 79 (1973), 462—463.

492. A. Prekopa, "On the number of vertices of random convex polyhedra," *Period Math. Hungar.* 2 (1972), 259—282.

493. J. Radon, "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten," *Ber Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. Natur. Kl.* 69 (1917), 262—277.

494. E. Raimondi, "Sobre un problema de probabilidades geométricas," *Rev. Un. Mat. Argentina* 7 (1940—1941), 106—109

495. E. Raimondi, "Sobre los pares de secantes de un poligono," *Rev. Un. Mat. Argentina* 7 (1940—1941), 133—134.

496. H. Raynaud, "Sur l'enveloppe convexe des nuages des points aléatoires dans R_n, I," *J. Appl. Probability* 7 (1970), 35—48.

497. L. Redei and B. v. Sz. Nagy, "Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron," *Publ. Math. Debrecen* 1 (1949), 42—50.

498. W J Reed, "Random points in a simplex," *Pacific J Math* 54 (1974), 183—198

499. W. P Reid, "Distribution of sizes of spheres in

a solid from a study of slices of the solid," *J. Math. Phys.* 35 (1955), 95—102

500. H. Reiter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups* (Oxford Math. Monographs). Oxford Univ. Press, London and New York, 1968.

501. A. Rényi, "On a new axiomatic theory of probability," *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 6 (1955), 285—335

502. A. Rényi, "On a one-dimensional problem concerning random place filling," *Magyar Tud. Akad. Mat. Intézet Közl.* 3 (1958), 109—127 (in Hungarian)

503. A. Rényi, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1962.

504. A. Rényi and R. Sulanke, "Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten, I," *Z. Wahrscheinlichkeits.* 2 (1963), 75—84; II, 3 (1964), 138—147.

505. A. Rényi and R. Sulanke, "Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet," *Z. Wahrscheinlichkeits.* 9 (1968), 146—157.

506. Y. G. Reshetnyak, "Integral geometric methods in the theory of curves," *Proc. 3rd All-Union Math. Congr.* Vol. 1, p. 164. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1956 (in Russian).

507. J. Rey Pastor and L. A. Santalo, *Geometría Integral*. Espasa-Calpe, Buenos Aires, Argentina, 1951.

508. J. Rezek, "A contribution to embracing the basic concepts of the integral geometry within the scope of ideas of Lie's group theory," *Casopis Pest. Mat. Fys.* 75 (1950), 17—26.

509. H. Rhee, "A representation of the solutions of the Darboux equation in odddimensional spaces," *Trans. Amer. Math. Soc.* 150(1970), 491—498.

510. P. I. Richards, "Averages for polygons formed by random lines," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 52 (1964), 1160—1164.

511. S. A. Roach, *The Theory of Random Clumping.* Methuen, London, 1968.

512. H. E. Robbins, "On the measure of a random set, I," *Ann. Math. Statist.* 15 (1944), 70—74; II, 16 (1945), 342—347

513. H. E. Robbins, "Acknowledgement of priority," *Ann. Math. Statist.* 18 (1947), 297.

514. F. D. K. Roberts, "Nearest neighbours in a Poisson ensemble," *Biometrika* 56 (1969), 401—406.

515. F. D. K. Roberts and S. H. Storey, "A three-dimensional cluster problem," *Biometrika* 55(1968), 258—260.

516. H. Rohde, "Integralgeometrie 33: Unitäre Integralgeometrie," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 13 (1940), 295—318.

517. V. G. Romanov, *Integral Geometry and Inverse Problems for Hyperbolic Equations* (Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 26). Springer,

Berlin, 1971.

518. H. Ruben, "An intrinsic formula for volume," *J. Reine Angew Math (Crelle)* 226 (1967), 116—119.

519. A.M. Russell and N.S. Josephson, "Measurement of area by counting," *J. Appl Probability* 2 (1965), 339—351.

520. H. Sachs, "Ungleichungen für Umfang, Flächeninhalt und Trägheitsmoment konvexer Kurven," *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 11(1960), 103—115.

521. J. Sancho San Roman, "Sobre la existencia de medidas relativamente invariantes en un espacio de Klein," *Actas 2nd Coloq. Geometria Dif., Santiago de Compostela*, 1967 pp 39—44.

522. L.A Santalo, "Algunas propiedades de las curvas esféricas y una caracteristica de la esfera," *Rev Mat Hispano-Amer* 10 (1935), 1—4.

523. L. A. Santalo, "Geometria integral 4; Sobre la medida cinemática en el plano," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 11 (1936), 222—236.

524. L. A. Santalo, "Integralgeometrie 5; Über das kinematische Maß im Raum," *Actualités Sci. Indust.* 357 (1936)

525. L.A. Santalo, "Geometria integral 7; Nuevas aplicaciones de la medida cinemática en el plano y en el espacio," *Rev. Acad. Ci. Madrid* 33 (1936), 451—477, 481—504.

526. L. A. Santalo, "Unos problemas referentes a pro—

babilidades geométricas," *Rev. Mat. Hisp.-Amer.* (2) 11 (1936), 87—97.

527. L. A. Santalo, "Geometria integral 15: Formula fundamental de la medida cinemática para cilindros y planos paralelos moviles," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 12 (1938), 38—41.

528. L.A. Santalo, "Geometria integral de figuras ilimitadas," *Publ. Inst. Mat. Univ. Litoral, Rosario, Argentina* 1, No. 2 (1939).

529. L. A. Santalo, "Geometria integral 31: Sobre valores medios y probabilidades geométricas," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 13 (1940), 284—294.

530. L.A.Santalo, "Géométrie intégrale 32: Quelques formules intégrales dans le plan et dans l'espace," *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 13 (1940),344—356.

531. L.A Santalo, "Una demonstracion de la propiedad isoperimétrica del circulo," *Publ. Inst. Mat. Univ. Litoral, Rosario, Argentina* 2, No.3 (1940)

532. L.A. Santalo, "Sur quelques problèmes de probabilités géométriques." *Tohoku Math. J.* 47(1940), 159—171.

533. L.A. Santalo, "Beweise eines Satzes von Bottema über Eilinien," *Tôhoku Math. J.* 48 (1941), 221—224.

534. L.A. Santalo, "Un esquema de valores medios en la teoria de probabilidades geométricas," *Rev. Ci. (Lima)* 43 (1941), 147—154

535. L.A. Santalo, "A theorem and an inequality referring to rectifiable curves," *Amer. J. Math.* 53 (1941), 635—644.

536. L.A. Santalo "Generalizacion de un problema de probabilidades geométricas," *Rev. Un. Mat. Argentina* 7 (1941), 129—132.

537. L.A. Santalo, "Algunos valores medios y desigualdades referentes a curvas situadas sobre la superficie esférica," *Rev Un. Mat. Argentina* 8 (1942), 113—125.

538. L.A. Santalo, "La desigualded isoperimétrica sobre superficies de curvatura constante negativa, " *Rev Mat Fis. Teor Univ Tucumán* 3 (1942), 243—259.

539. L.A. Santalo, "Integral formulas in Crofton's style on the sphere and some inequalities referring to spherical curves, " *Duke Math. J.* 9 (1942) , 707—722.

540. L.A. Santalo. "Una formula integral referente a figuras convexas, " *Rev. Un. Mat Argentina* 8 (1942), 165—169.

541. L.A Santalo, "Integral geometry on surfaces of constant negative curvature, " *Duke Math. J.* 10 (1943), 687—704.

542. "Sobre la distribucion probable de corpusculos en un cuerpo deducida de la distribucion en sus secciones," *Rev. Un. Mat. Argentina* 9 (1943), 145—164.

543. L.A.Santalo, "Acotaciones sobre la longitud de una

curva o para el numero de puntos necesarios para cubrir aproximadamente un domino," *An. Acad. Brasil. Ci.* 16 (1944), 112—121.

544. L. A. Santalo, "Valor medio del numero de regiones en que un cuerpo del espacio es dividido por *n* planos arbitrarios, " *Rev. Un. Mat. Argentina* 10 (1945), 111—108.

545. L. A. Santalo, "Note on convex curves on the sphere," *Bull. Amer. Math. Soc.* 50 (1944), 528—534.

546. L. A. Santalo, "Unas formulas integrales referentes a cuerpos convexos," *Rev. Un. Mat. Argentina* 12 (1946—1947), 78—87.

547. L. A. Santalo, "Sobre el circulo de radio máximo contenido en un recinto," *Rev. Un. Mat. Argentina* 10 (1945), 155—162.

548. L A. Santalo, "Note on convex curves on the hyperbolic plane," *Bull. Amer Math. Soc.* 51 (1945), 405—412.

549. L. A. Santalo, "Sobre la longitud de una curva del espacio como valor medio de las longitudes de sus proyecciones ortogonales," *Math. Notae* 6 (1946), 158—166.

550. L. A. Santalo, "Sobre figuras planas hiperconvexas," *Summa Brasil. Math.* 1 (1946), fasc. 11.

551. L.A. Santalo, "Sobre la medida de figuras convexas congruentes contenidas en el interior de un rectángulo o de un triángulo," *Actas Acad. Ci. Lima* 10 (1947), 103—116.

552. L. A. Santalo, "On the first two moments of the measure of a random set," *Ann. Math. Statist* 18 (1947), 37—49.

553. L. A. Santalo, "Sobre la distribucion de planos en el espacio," *Rev. Un. Mat. Argentina* 13(1948), 120—124.

554. L. A. Santalo, "Geometria integral en los espacios tridimensionales de curvatura constante," *Math. Notae* 9 (1949), 10—28.

555. L. A. Santalo, "Integral geometry on surfaces," *Duke Math. J.* 16 (1949), 361—375.

556. L. A. Santalo, "Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones," *Portugal. Math.* 8 (1949), 155—161.

557. L.A. Santalo, "Integral geometry in projective and affine spaces," *Ann. of Math* (2) 51 (1950), 739—755.

558. L. A. Santalo, "On parallel hypersurfaces in the elliptic and hyperbolic n-dimensional space," *Proc. Amer. Math. Soc.* 1 (1950), 325—330.

559. L. A. Santalo, "Unas formulas integrales y una definicion de área q-dimensional de un conjunto de puntos," *Rev. Mat. Fis. Teor. Univ. Tucumán* 7 (1950), 271—282.

560. L. A. Santalo, "Sobre unas formulas integrales y valores medios referentes a figuras convexas moviles en el plano," *Publ. Fac. Ci Univ. Buenos Aires Ser. Mat.* No. 2 (1950).

561. L. A. Santalo, "Integral geometry in general spa-

ces," *Proc. Internat. Congr. Math., Cambridge, Mass.*, 1950 Vol. 1, pp. 483—489. The American Math. Soc., Providence, R.I., 1952.

562. L. A. Santalo, "Problemas de geometria integral," *UNESCO Symp. sobre Algunos problemas matem. que se están estudiando en América Latina, Montevideo*. 1952 pp. 23—40.

563. L. A. Santalo, "Generalizacion de una desigualdad isoperimetrica de Feller," *Rev. Un. Mat. Argentina* 16 (1954), 78—81.

564. L. A. Santalo, "Integral geometry in Hermitian spaces," *Amer. J. Math.* 74 (1952), 423—434.

565. L. A. Santalo, "Geometria integral en espacios de curvatura constante," *Publ. Com. Nac. Energia Atomica, Ser. Mat.* 1 (1952), fasc. I.

566. L. A. Santalo, "Algunos valores medios sobre la semiesfera," *Math. Notae* 12 (1952), 32—37.

567. L. A. Santalo, "Measure of sets of geodesics in a riemannian space and applications to integral formulas in elliptic and hyperbolic spaces," *Summa Brasil. Math.* 13 (1952), fasc. I.

568. L. A. Santalo, Introduction to integral geometry, *Actualités Sci. Indust.* 1198 (1952).

569. L. A. Santalo, "On the kinematic formula in spaces of constant curvature," *Proc. Internat. Congr. Math., Amsterdam*, 1954 Vol. 2, pp. 251—252. North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1957.

570. L. A. Santalo, "Cuestiones sobre geometria diferencial e integral en espacios de curvatura constan-

te," *Rend. Sem. Mat. Torino* 14 (1955), 277—295.

571. L. A. Santalo, "On geometry of numbers," *Japan. J. Math.* 7 (1955), 208—213.

572. L. A. Santalo, "Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problèmes qui s'y rattachent," *Colloq. sur les questions de réalité en géométrie Liège*, 1955 pp. 177—190. Masson, Paris, 1956.

573. L. A. Santalo, "Sobre la distribucion de los tamanos de los corpusculos contenidos en un cuerpo a partir de la distribucion en sus secciones," *Trabajos Estadist.* 6 (1955), 181—196.

574. L. A. Santalo, "On the mean curvatures of a flattened convex body," *Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul* 21 (1956), 189—194.

575. L. A. Santalo, "Un nuevo invariante afin para cuerpos convexos del plano y del espacio," *Math Notae* 16 (1958), 78—91.

576. L. A. Santalo, "Sobre los sistemas completos de desigualdades entre los elementos de una figura convexa del plano," *Math. Notae* 17 (1958), 82—104.

577. L. A. Santalo, "Two applications of the integral geometry in affine and projective spaces," *Publ. Math. Debrecen* 7 (1960), 226—237.

578. L. A. Santalo, "On the measure of sets of parallel linear subspaces in affine space," *Canad. J. Math.* 13 (1962), 313—319.

579. L. A. Santalo, "Sobre la formula fundamental cinemática de la geometria integral en espacios de curvatura constante," *Math. Notae* 18 (1963), 79—94.

580. L. A. Santalo, "Una relacion entre las curvaturas medias de cuerpos convexos paralelos en espacios de curvatura constante," *Rev. Un. Mat. Argentina* 21 (1963), 131—137

581. L. A. Santalo, "Integral geometry on the projective groups of the plane depending on more than three parameters," *An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi, Sect. Ia Mat. (N.S.)* 11B (1965), 307—335

582. L. A. Santalo, "Valores medios para poligonos formados por rectas al azar en el plano hiperbolico." *Rev Mat. Fis Téor Univ Tucumán* 16 (1966), 29—44.

583. L. A. Santalo, "Horocycles and convex sets in the hyperbolic plane," *Arch Math (Basel)* 28 (1967), 529—533

584. L. A. Santalo, "Horospheres and convex bodies in hyperbolic space," *Proc. Amer Math. Soc.* 19 (1968), 390—395.

585. L. A. Santalo, "Grupos del plano respecto de los cuales, los conjuntos de puntos y de rectas admiten una medida invariante," *Rev. Un. Mat. Argentina* 23 (1967), 119—148.

586. L. A. Santalo, "Integral geometry," in *Studies in Global Geometry and Analysis* (S. S. Chern,

(..), pp. 147—195. Math. Assoc. Amer., Washington, D.C., 1967

587. L. A. Santalo, "On some geometric inequalities in the style of Fary," *Amer. J Math* 91(1969), 25—41.

588. L. A. Santalo, "Curvaturas absolutas y totales de variedades contenidas en un espacio euclidiano," *Acta Ci. Compostelana* 5 (1969), 149—158

589. L. A Santalo, "Convexidad en el plano hiperbolico," *Rev. Mat. Fis. Teor Univ Tucumán* 19 (1969), 174—183

590. L A. Santalo, "Mean values and curvatures," *Izv. Akad Nauk Armjan. SSR Ser. Mat.* 5 (1970), 286—195. Reprinted in *Stochastic Geometry* (E. F. Harding and D. G. Kendall, eds.), pp. 165—175. Wiley, New York, 1974.

591. L. A. Santalo, "Total curvatures of compact manifolds immersed in euclidean space," *Symp. Mat Ist. Naz. Alta Mat. Roma* 14 (1974), 364—390.

592. L. A. Santalo and I. Yanez, "Averages for polygons formed by random lines in euclidean and hyperbolic planes," *J Appl. Probability* 9(1972), 140—157.

593. D. B. Sawyer, "On the covering of lattice points by convex regions," *Quart J. Math. Oxford Ser.*2, 4 (1953), 284—292

594. J. J Schäffer, "Smallest lattice-point covering convex set," *Math. Ann.* 129 (1955), 265—273.

595. E. Scheil, "Die Berechnung der Anzahl und Größenverteilung kugelförmiger Körper mit Hilfe der durch ebene Schnitte erhaltenen Schnittkreise," *Z. Anorg. Allgem. Chem.* 201 (1931), 259—264.

596. B. Schiffman, "Applications of geometric measure theory to value distribution theory of meromorphic maps," in *Value Distribution Theory* (R. O. Kujala and A. L. Willer III, eds.), Pt. A, pp. 63—95. Dekker, New York, 1974.

597. L. Schläfli, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Vol. 1. Birkhäuser, Basel, 1950.

598. W. M. Schmidt, "Some results in probabilistic geometry," *Z. Wahrscheinichkeits.* 9 (1968), 158 162.

598a. W M. Schmidt, "Volume, surface area and the number of integer points covered by a convex set," *Arch. Math. (Basel)* 23 (1972), 537—543.

599. R. Schneider, "On Steiner points of convex bodies," *Israel J. Math.* 9 (1971), 241—249.

600. R. Schneider, "Krümmungsschwerpunkte konvexer Körper, I, II," *Abh. Math. Sem Univ. Hamburg* 37 (1972), 112—132, 204—217.

601. E. F. Schuster, "Buffon's needle experiment." *Amer. Math. Monthly* 81 (1974), 26—29

602. D. G. Scott, "Packing of spheres, " *Nature* 188 (1961), 908—909; 194 (1962), 956—957.

603. P. R. Scott, "A lattice problem in the plane," *Mathematika* 20 (1973), 247—252.

604. S. Sherman, "A comparison of linear measures in

the plane," *Duke Math. J.* 9 (1942), 1—9.

605. J. A. Shohat and J. D. Tamarkin, *The Problem of Moments*. Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1943.

606. M. Sholander, "On certain minimum problems in the theory of convex curves," *Trans. Amer. Math Soc.* 23 (1952), 139—173.

607. L. P. Sibasov, "Integral geometry in Grassmann manifolds," *Moskor. Oblast. Ped. Inst. Ucen. Zap.* 262 (1969), 256—270.

608. F. Sibirani, "Alcune probabilità geometriche," *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. Fis.* (10), 1, (1944), 113—123.

609. Z. A. Sidak, "On the mean number and size of opaque particles in transparent bodies," in *Studies in Mathematical Statistics. Theory and Applications* (K. Sarkadi and I. Vincze, eds.), Acad. Kiadr, Budapest, 1968.

610. C. L. Siegel, "Symplectic geometry," *Amer. J Math.* 65 (1943), 1—86.

610a. C. L. Siegel, "A mean value theorem in geometry of numbers," *Ann. of Math.* (2) 46 (1945). 340—347.

611. L. Silberstein, "Aggregates in random distribution of points," *Phil. Mag.* (7) 36 (1945) 319—336.

612. M. Silver, "On extremal figures admissible relative to rectangular lattices," *Pacific J. Math.* 40 (1972), 451—457.

613. J. G. Skellam, "The mathematical foundations underlying the use of line transects in animal ecology," *Biometrics* 14 (1958), 385—400.

614. V. V. Slavskii, "A certain integral geometry relation in surface theory," *Sibirsk. Mat. Z.* 13 (1972), 645—658.

615. C. S. Smith and L. Gutman, "Measurement of internal boundaries in threedimensional structure of random sectioning," *J. Metals* 5 (1953), 81—87.

616. H. Solomon, "A coverage distribution," *Ann. Math. Statist.* 21 (1950), 139—140.

617. H. Solomon, "Distribution of the measure of a random two-dimensional set," *Ann. Math Statist.* 24 (1953), 650—656.

618. H. Solomon, "Random packing density, *Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probability* pp. 119—154. Univ. of Calif Press, Berkeley, 1966.

619. H. Solomon and P. C. C. Wang, "Non-homogeneous Poisson fields of random lines with applications to traffic flow," Stanford Univ. Statist. Dept. Tech. Rept. No.22 (1971)

620 F Spiter and H Widom, "The circumference of a convex polygon," *Proc. Amer. Math. Soc.* 12 (1961). 506—509

621. G Stanilow. "Zur Integralgeometrie im euklidischen Raum E_{3}," *Math. Nachr.* 43 (1970), 181—183.

622. G. Stanilow, "The integral geometry of generalized biaxial spaces," *Bülgar Akad. Nauk. Otdel. Mat. Fiz. Nauk. Izv. Mat. Inst.* 11 (1970), 39—53.

623. G. Stanilow and R. Sulanke, "Crofton type integral formulae in the theory of line congruences in the euclidean space E_n," *Bülgar Akad. Nauk. Otdel. Mat. Fiz. Nauk. Izv. Mat. Inst.* 11 (1970), 27—37.

624. S. K. Stein, "Averages over a pair of convex surfaces," *Michigan Math. J* 15 (1968), 377—380.

625. H. Steinhaus, "Sur la portée pratique et théorique de quelques théorèmes sur la mesure des ensembles de droites," *C. R. Ier Congr. Mathématiciens des Pays Slaves, Warszawa*, 1929 pp. 348—354.

626. H. Steinhaus, "Length, shape and area," *Colloq. Math.* 3 (1954), 1—13.

627. J. A. Steppe and E. Wong, "Invariant recognition of geometric shapes," *Internat. Conf. Method. Pattern Recognition, Hawaii*, 1968.

628. S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

629. S. Sternberg, *Advanced Calculus* (with L. H. Loomis) Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968

630. W. L. Stevens, "Solution to a geometrical problem in probability," *Ann. Eugenics* 9 (1939), 315—320

631. M. I. Stoka, "Masura unei multimi da varietati

dintr-un spati R_n, " *Bull. Stınt. Acad. R. P. Romine* 7 (1955) , 903—937.

632. M. I. Stoka, "Asupra masurii multimii cerculiror din plan, " *Gaz. Mat. Fiz.* A10 (1955) , 556—559.

633 M. I. Stoka, "Invariantii integrali ai unui grup Lie de transformari, " *An. Univ. Bucaresti Mat -Mec.* 20 (1958) , 33—35.

634. M. I. Stoka, "Geometria integrale in uno spazio euclideo E_n, " *Boll. Un. Mat. Ital.* 13 (1958) 470—485.

635. M. I. Stoka, "Masura familitor de varietati dintr-un spatiu E_n, " *Stud. Cerc. Mat.* (2) 9 (1958) , 547—558.

636. M. I. Stoka, "Asupra grupurilor G_r masurabili dintr-un spatiu E_n, " *Comm. Accad. R. P. Romına* 9, 1 (1959) , 5—10.

637. M. I. Stoka, "Géométrie integrale dans un espace E_n," *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 4(1959), 123—156.

638. M. I. Stoka, "Congruence de variétés mesurables dans un espace E_n," *Rev. Roumaıne Math. Pures Appl.* 4 (1959) , 431—449.

639. M. I. Stoka, "Famiglie de varietà misurabili in un spazio E_n, " *Rend. Circ. Mat. Palermo* 8 (1959) , 192—205.

640. M. I. Stoka, "Sulla misura cinematica in un spazio euclideo E_n, " *Boll. Un. Mat. Ital.* 14 (1959), 467—476

641. M. I. Stoka, "Asupra grupurilor de miscare ale spatilor riemanniene V_2 cu curbura constanta," *Stud. Cerc. Mat.* 11 (1960), 207—228.

642. M. I. Stoka, "Geometrie integrala intr-un spatiu riemannian V_n," *Stud. Cerc. Mat.* 11 (1960), 381—395.

643. M. I. Stoka, "Das Maß der Untersysteme von Mannigfaltigkeiten in einem Raum X_n," *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* (2) 5 (1960), 275—286.

644. M. I. Stoka, "Géométrie intégrale dans un espace E_3," *Rev. Mat. Fis. Teor. Univ. Tucumán* 14 (1962), 25—59.

645. M. I. Stoka, "Familii de varietati mesurabili intr-un spatiu riemannian V_3 cu curbura constanta," *Stud. Cerc. Mat.* 12 (1963), 365—376.

646. M. I. Stoka, *Géométrie Intégrale* (Mémorial des Sciences Mathematiques, Fasc. 165). Gauthier-Villars, Paris, 1968.

647. M. I. Stoka, *Geometria Integrala*. Ed. Acad. R. S. Romania, 1967

648. M. I. Stoka, "Alcune formule integrali concernenti i corpi convessi dello spazio euclideo E_3," *Rend. Sem. Mat. Torino* 28 (1969), 95—105.

649. M. I. Stoka, "Une extension du problème de l'aiguille de Buffon dans l'espace euclidien R_n," *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) 10 (1974), 386—389.

650. M. I. Stoka, "Alcune formule integrali concernenti le curve convesse di uno spazio riemanniano

V_2 dalla curvatura constanta, " *Rend. Sem. Mat.* *Messina* 12 (1968—1970), 63—78.

651. M. I. Stoka, "La variance d'une variable aléatoire associé à une famille des ovales du plan euclidien." *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci* (5) 59 (1973), 178—184.

652. M. I. Stoka, "Géometrie integrale dans le plan projectif," *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 19 (1974), 79—96.

653. M. I. Stoka, "Sur quelques probabilités géométriques liées aux systémes de corps convexes dans un espace euclidien E_n," *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) 11 (1975), 22—29.

654. M. I. Stoka and R. Theodorescu, *Probabilitate si geometrie*. Bucaresti, 1966.

655. W. Stoll, "A Bezout estimate for complete intersections," *Ann. of Math.* (2) 96 (1972), 361—401.

656. W. Stoll, "Deficit and Bezout estimates," in *Value Distribution Theory* (R. O. Kujala and A. L. Willel III, eds.) Pt. B, pp. 1—272. Dekker, New York. 1973.

657. F. Streit, "On multiple integral geometric integrals and their applications to probability theory," *Canad. J. Math.* 22 (1970), 151—163.

658. F. Streit, "Mean value formulae for a class of random sets," *J. Roy. Statist. Soc* 35 (1973), 437—444.

659. R. Sulanke, "Die Verteilung der Sehnenlängen an

ebenen und räumlichen Figuren," *Math. Nachr.* 23 (1961), 51—74

660. R. Sulanke, "Schnittpunkte zufälliger Geraden," *Arch. Math.* 16 (1965), 320—324.

661. R. Sulanke, "Croftonsche Formeln in Kleinschen Räumen," *Math. Nachr.* 32 (1966), 218—224.

662. R. Sulanke, "Integralgeometrie ebener Kurvennetze," *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 17 (1966), 233—261.

663. R. Sulanke, "Croftonsche Formeln für Strahlensysteme des euklidischen Raumes," *Math. Nachr* 38 (1968), 299—307.

664. R Sulanke and P. Wintgen, *Differentialgeometrie und Faserbunde*. Birkhäuser, Basel, 1972.

665. R. Sulanke and P. Wintgen, "Zufälliger konvexer Polyeder im N-dimensionalen euklidischen Raum," *Period. Math. Hungar.* 2 (1972), 215—221.

665a. J. J. Sylvester, "On a funicular solution of Buffon's needle problem," *Acta Math.* 14 (1890), 185—205

666. L. Takacs, "On the probability distribution of the measure of the union of random sets placed in a Euclidean space," *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvos Sect. Mat.* 1 (1958), 89—95.

667. G. M. Tallis, "Estimating the distribution of spherical and elliptical bodies in conglomerates from plane sections," *Biometrics* 26 (1970), 87—103.

668. C. Tate, "Aggregates in a random distribution of points in a cylinder," *SIAM J. Appl. Math.* 17

(1969), 1177—1189.

669. H. R. Thomson, "Distribution of distance to *n*th neighbour in a population of randomly distributed individuals," *Ecology* 37 (1956), 391—394.

670. H. Tietze, "Würfelspiel und Integralgeometrie," *S.-B. Mat. Kl. Bayer Akad. München* 1945/46 (1947), 131—158.

671. R. Trandafir, "Familles de courbes mesurables du plan euclidien, I," *Rev. Roumaine Math Pures Appl.* (2) 11 (1966), 1009—1013; 11, 12(1967).

672. R. Trandafir, "Familii de varietati cu unu, doi, si trei parametri masurabili din spatiul euclidean E_3," *Stud Cerc. Mat* 19 (1967), 619—634

673. R. Trandafir, "Probleme de acoperiri in spatiul euclidean E_3," *Stud Cerc Mat* 19 (1967), 1105—1111

674. R Trandafir, "Probleme de acoperiri in spatii riemannien V_2 cu curbure constante," *Stud. Cerc. Mat.* 19 (1967)

675. R. Trandafir, "Problems of integral geometry of lattices in an euclidean space E_3," *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 22 (1967), 228—235.

676. R. Trandafir, "Problems of integral geometry of lattices in a riemannian space V_2 with constant curvature," *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 23 (1968), 244—248

677. R. Trandafir, "Problemi di geometria della reti di un spazio omogeneo," *Rend. Sem. Mat. Messina* 12 (1971), 3—25.

677a. R. Trandafir, "Probleme de geometrie integrale de retelelor dintr-un spatiu omogen," *Stud Cerc Mat.* 23 (1971), 425—466.

678. F. Tricomi, "Densita di un continuo di punti o di rette e densita di una correspondenza," *Rend Acad. Naz. Lincei* (6) 23 (1936), 313—316

679. M. Tsuji, "Theorems in the geometry of numbers for Fuchsian groups," *J Math Soc Japan* 4 (1952), 189—193.

680. M. Tsuji, "Analogue of Blichfeldt's theorem for Fuchsian groups," *Comment. Math. Univ. St Paul* 5 (1956), 17—24.

681. S Ueno, "On the densities in a two-dimensional generalized space," *Mem. Fac. Sci Kyusyu Univ.* A9 (1955), 65—77

682. S. Ueno, H. Hombu, and J Naito, "Some integral geometric inequalities," *Mem Fac Sci. Kyusyu Univ.* A6 (1951), 97—105

682a. E. E. Underwood, *Quantitative Stereology*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970.

683. F. Valentine, *Comex Sets*. McGraw-Hill, New York, 1964.

684. K. Valsala, "Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten," *Ann. Acad Sci Fenn* A51 (1938), No.6, 1—22.

685. O. Varga, "Integralgeometrie 3; Croftons Formeln für den Raum," *Math. Z.* 40 (1935), 387—405.

686. O Varga, "Integralgeometrie 8; Über die Masse von linearen Mannigfaltigkeiten im projektiven Raum

P_n," *Rev. Mat. Hisp. Amer.* (2) 10 (1935), 241—264; 11 (1936), 1—14.

687. O Varga, "Integralgeometrie 19; Über Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen, *Math. Z.* 41 (1936), 768—784.

688. O Varga, "Über die Integralinvarianten, die zu einer Kurve in der Hermiteschen Geometrie gehören," *Acta Litt. Sci. Szeged* 9 (1939), 88—102.

689. G. P. Ventikos, "On the mean value of a straight segment in a plane convex region," *Bull. Soc. Math. Grèce* 22 (1946), 195—197

690. E. Vidal Abascal, "A generalization of Steiner's formula," *Bull Amer Math Soc* 53 (1947), 841—844.

691. E Vidal Abascal, "Geometria integral sobre superficies curvas," *Publ Observ Astron. Santiago de Composteta* 7 (1950)

692. E Vidal Abascal, "Sobre los fundamentos de la geometria integral," *Rev Mat. Hisp.-Amer* (4) 12 (1952), 290—310.

693. E Vidal Abascal, "Sobre los fundamentos de la geometria integral," *Mem Acad. Ci Madrid* 4 (1953), 1—29.

694. E. Vidal Abascal, "A generalization of integral invariants," *Proc Amer Math Soc* 10(1959), 721—727.

695. E Vidal Abascal, "Generalizacion de los invariantes integrales y aplicacion a la geometria integral

en los espacios de Klein y de Riemann, " *Collect. Math.* 12 (1960), 71—102.

696. E. Vidal Abascal, "Sobre algunos problemas en relacion con la medida en espacios foliados, " *Acta ler Coloq. Geometria Dif., Santiago de Compostela,* 1963 pp. 63—82

697. E. Vidal Abascal, "Mesures définies sur les espaces des feuilles d'un feuilletage, " *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) 15 (1966), 247—256.

698. E. Vidal Abascal, "Sur les feuilletages réguliers et les problèmes qui s'y reportent, " *Acta Ci. Compostelana* 3 (1966), 3—12.

699. E. Vidal Abascal, "On regular foliations, " *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 17 (1967), 129—133.

700. E. Vidal Abascal, "Cuestiones en relacion con las medidas en espacios foliados, " *Acta 2nd Coloq Geometria Dif., Santiago de Compostela,* 1967 pp. 59—63.

701. U. Viet, "Umkehrung eines Satzes von H. Brunn über Mittelpunktbereiche, " *Math.-Phys. Semester ber.* 5 (1956), 141—142.

702. P. Vincensini, *Corps convexes séries linéaires, domaines vectoriels* (Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. 94) Gauthier-Villars. Paris. 1938

703. O. P. Vinogradov and I. P. Zaregradski, "Geometrical probabilities in the theory of optimal search, " *Izv. Akad. Nauk Armian. SSR Ser. Mat.* 5 (1970), 207—218.

704. G. Voronoi, "Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, *J Reine Angew. Math.* 134 (1908), 198—287.

705. D.F.Votaw, "The probability distribution of the measure of a random linear set," *Ann. Math. Statist.* 17 (1946), 240—244.

706. G. Vranceanu, "The measurability of Lie groups," *Ann. Polon. Math.* (2) 15 (1964), 179—188.

707. A.G.Walters, "The distribution of projected areas of fragments," *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 43 (1947), 342—347.

708. G. S. Watson, "Estimating functionals of particle size distributions," *Biometrika* 58 (1971), 483—490.

709. G. S. Watson, "Orientation statistics in the earth sciences," *Bull. Geol. Inst. Univ. Uppsala* (2) 9 (1970), 73—89.

710. A. Weil, "*L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*," *Actualités Sci. Indust.* 869 1938.

711. A.Weil, "Review of Chern's article [105], *Math. Reviews* 3 (1942), 253.

712. A.Weil, "Sur quelques résultats de Siegel," *Summa Brasil. Math.* 1 (1946), 21—39.

713. J.L. Weiner, "A generalization of the isoperimetric inequality on the 2-sphere," *Indiana Univ. Math. J.* 24 (1974), 243—248.

714. J. G. Wendel, "A problem in geometric probability," *Math. Scand.* 11 (1962), 109—111.

715. J.E. Wetzel, "Covering balls for curves of constant length," *Enseignement Math.* (2) 17(1971), 275—277

716. H. Weyl, "On the volume of tubes," *Amer. J. Math.* 61 (1939), 461—472.

717. H. Weyl, *Meromorphic Functions and Analytic Curves* (Ann. of Math. Studies No. 12). Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1943.

718. H. Weyl and J. Weyl, "Meromorphic curves," *Ann. of Math.* 39 (1938), 516—538.

719. D. J. White, "On the largest cap in a convex set of a sphere," *Proc. London Math. Soc.* (3) 17 (1967), 157—162.

720. J.H. White, "Self-linking and the Gauss integral in highe dimensions," *Amer. J. Math.* 91(1969). 693—728.

721. J.H. White, "Geometric inequalities for surfaces in euclidean three-space," *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 17 (1972), 1487—1494.

722. J.H. White, "Some differential invariants of submanifolds of euclidean space," *J. Diff. Geometry* 5 (1971), 357—369

723. H. Whitney, *Geometric Integration Theory*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1957.

724. S. D. Wicksell, "The corpuscle problem, Pt. I: A mathematical study of a biometric problem," *Biometrika* 17 (1925), 84—99; Pt. II, 18(1926), 151—172

725. T. J. Willmore, *An Introduction to Differential*

Geometry. Oxford Univ. Press, London and New York, 1959.

726. J.M. Wills, "Ein Satz über konvexe Mengen und Gitterpunkte," *Monatsh. Math*. 72 (1968), 451—463.

727. J.M. Wills, "Gitterpunkte und Volumen-Oberfläche-Verhältnis konvexer Mengen," *Arch. Math. (Basel)* 22 (1971), 445—448.

728. W Wirtinger, "Eine Determinantenidentität und ihre Anwendungen auf analytische Gebilde in Euklidischer und Hermitescher Maßbestimmung," *Monatsh. Math. Phys*. 44 (1936), 343—365.

729. J Wolfowitz, "The distribution of plane angles of contact," *Quart. J. Appl. Math*. 7 (1949), 117—120.

730. H.H. Wu, *The equidistribution theory of holomorphic curves* (Ann. of Math. Studies, No. 64). Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.

731. T.J Wu, "Integralgeometrie 26: Über die kinematische Hauptformel," *Math. Z*. 43 (1937), 212—227.

732. T.J. Wu, "Integralgeometrie 28: Über elliptische Geometrie," *Math. Z*. 43 (1938), 495—521.

732a. T.J. Wu, "Der Dual der Grundformel in der Integralgeometrie," *J. Chinese Math. Soc*. 2(1940), 199—204.

733. I.M. Yaglom, "Integral geometry in the set of line elements," Appendix to the Russian translation of L.A. Santalo's *Introduction to Integral Geo-*

metry, pp. 153—169, Moscow, 1956.

734. L. M. Yurtova and A. V. Lutsenko, "Measures of sets of pairs," *Ukrain. Geometr. Sb.* 1968

735. O. Zoll, "Uber Fldchen mit Scharen geschlossener geodetischer Linien," *Math. Ann.* 57 (1903), 108—133.

736. H. Ziezold, "Uber die Eckenzahl zufälliger konvexer Polygone," *Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR. Ser. Mat.* 5 (1970), 296—312.

作者索引[①]

① 有些作者，书中只指出其著作编号，未指明其姓名的，不列入本索引内。——译者

C

D

E

F

G

H

N

O

P

R

S

T

内 容 索 引

一 画

二 画

三 画

四 画

五　画

六　画

七　画

八　画

九　画

十 画

十一画

十二画

十三画

十四画

十五画

十八画